

पिछले व्याख्यानों में से एक में मंडलियों पर व्याख्यान 10 में आपका स्वागत है हमने किन्हीं दो वृत्तों के बीच प्रत्यक्ष सामान्य स्पर्शरेखा और अनुप्रस्थ सामान्य स्पर्शरेखाओं के बारे में चर्चा की थी और हमने विशेष रूप से विभिन्न मामलों पर विचार किया था जिनमें से एक मामला था जहां मंडल प्रतिच्छेद करते थे एक दूसरे को और वृत्तों के समीकरणों को देखते हुए हमने यह भी बताया था कि कैसे पता लगाया जाए कि दो वृत्त प्रतिच्छेद कर रहे हैं या नहीं, लेकिन फिर उन स्थितियों के लिए हमने कोई प्रमाण नहीं दिया था,

इसलिए हमने जो कहा था, वह यह था कि मान लीजिए कि हमारे पास दो हैं वृत्त  $s$  एक जिसमें समीकरण  $x$  वर्ग जमा  $y$  वर्ग जोड़ दो  $g$  एक  $x$  जोड़ दो  $f$  एक  $y$  जमा  $c$  एक शून्य के बराबर है और दूसरा वृत्त  $s$  दो समीकरण  $x$  वर्ग जोड़  $y$  वर्ग जोड़ दो  $g$  दो  $x$  जोड़ दो  $f$  दो  $y$  जोड़  $c$  दो शून्य के बराबर है

इसलिए हमें ये दो समीकरण दिए गए हैं और फिर हमें आह खोजने के लिए कहा जाता है और फिर हमने कहा कि ये दोनों वृत्त एक दूसरे को काटेंगे यदि और केवल यदि उनके केंद्र के बीच की दूरी  $s$  तो उनके केंद्रों को पहले सर्कल का केंद्र ऐसा होने दें  $s$  एक को  $o$  द्वारा दर्शाया गया है, जिसका निर्देशांक माइनस  $g$  एक माइनस  $f$  एक है और दूसरे सर्कल का केंद्र  $o$  दो माइनस  $g$  दो कॉमा माइनस  $f$  दो है जो पहले सर्कल की त्रिज्या है।

$r$  एक बराबर होता है  $g$  का वर्गमूल जमा  $f$  एक वर्ग घटा  $c$  एक और इसी तरह दूसरे वृत्त  $s$  दो की त्रिज्या  $g$  के वर्गमूल के बराबर होती है दो वर्ग जमा  $f$  दो वर्ग घटा  $c$  दो तो बस इतनी ही जानकारी दी हमने कि यदि केंद्रों के बीच की दूरी इतनी है कि केंद्रों के बीच की दूरी जो कि वर्गमूल है तो इन दो बिंदुओं के बीच की दूरी जो कि जी का वर्गमूल दो घटा जी एक पूर्ण वर्ग प्लस एफ दो घटा एफ एक पूर्ण वर्ग है तो हमने कहा कि यदि यह दूरी त्रिज्या के योग से कम या उसके बराबर है या यदि यह दो वृत्तों की त्रिज्या के निरपेक्ष अंतर के अंतर से अधिक या बराबर है तो यदि यह सत्य है तो यदि यह स्थिति सत्य है तो हम उसने कहा दो वृत्तों पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करने पर हमने यह भी कहा कि यदि एक ओ दो करें जो कि केंद्रों के बीच की दूरी  $r$  एक जमा  $r$  दो के बराबर है तो दोनों वृत्त एक दूसरे को ठीक एक बिंदु पर बाहरी रूप से स्पर्श करते हैं

इसलिए यह मामला है जहां हम ऐसा कुछ है तो यह एक हो सकता है और यह दो हो सकता है और वे एक दूसरे को यहां एक बिंदु पर स्पर्श करते हैं तो उस बिंदु को पी होने दें तो ये केंद्र एक और ओ दो हैं और फिर हमने यह भी कहा था कि केंद्रों को मिलाने वाली सीधी रेखा भी इस बिंदु  $p$  से होकर गुजरेगी जहां दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं और फिर हमने यह भी कहा कि यदि  $d$  एक  $o$  दो  $r$  एक जोड़  $r$  दो से बड़ा है तो दोनों वृत्त प्रतिच्छेद नहीं करते हैं

इसलिए यह स्थिति है कुछ इस तरह जहाँ हमारे पास पहला वृत्त और दूसरा वृत्त है और वे एक दूसरे के साथ प्रतिच्छेद नहीं करते हैं इसलिए यह स्थिति है और फिर हमने यह भी कहा था कि यदि केंद्रों के बीच की दूरी पूर्ण अंतर के बराबर है दो त्रिज्या  $r$  1 और  $r$  2 के बीच में दो वृत्त एक-दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं,

इसलिए इसका मतलब यह है कि यह पहला वृत्त हो सकता है जिसका केंद्र  $o$  एक पर है और फिर हमारे पास दूसरा वृत्त  $s$  दो हो सकता है।

केंद्र  $o$  दो के साथ  $s$  दो है और ये दो वृत्त हैं

इसलिए वृत्त  $s$  दो वृत्त को स्पर्श करता है एक  $s$  एक अंदर से

इसलिए हमने कहा कि केवल एक बिंदु  $p$  पर आंतरिक रूप से प्रवेश करें और इस मामले में दो केंद्रों के बीच की दूरी पूर्ण दूरी है त्रिज्या के बीच और फिर निश्चित रूप से हमने भी चर्चा की थी हमने पिछले मामले पर भी चर्चा की थी जहां केंद्रों के बीच की दूरी त्रिज्या के बीच पूर्ण अंतर से सख्ती से कम है, इस मामले में फिर से मंडलियों के लिए निश्चित रूप से वे छेड़छाड़ नहीं करते हैं जो वे करते हैं नहीं और आगे कि एक सर्कल पूरी तरह से दूसरे सर्कल के अंदर होने वाला है,

इसलिए हमारे पास ऐसी स्थिति है जहां हम कहते हैं कि हमारे पास सर्कल एस वन है जिसका केंद्र ओ एक है और फिर हमारे पास है यह सर्कल दो केंद्र ओ दो के साथ है,

इसलिए ये दो सर्कल एक दूसरे को नहीं काटते हैं और आगे यह है कि सर्कल के दो में से एक पूरी तरह से दूसरे सर्कल के अंदर है,

इसलिए इस व्याख्यान की मुख्य चर्चा इन शर्तों को सख्ती से प्राप्त करने पर केंद्रित होगी।

इसलिए हम दिखाएंगे कि दो वृत्त कोई भी दो वृत्त एक दूसरे को काटेंगे यदि और केवल यदि यह शर्त पूरी हो जाती है तो इसका मतलब यह है कि यदि यह शर्त संतुष्ट नहीं है तो दोनों वृत्त एक दूसरे को नहीं काट सकते हैं और विशेष मामलों के रूप में यह भी दिखाएं कि यदि यह और यह सब सख्ती से साबित हो जाएगा क्योंकि हमने उस व्याख्यान में आह नहीं किया था जहां हम आम स्पर्शरेखा की व्युत्पत्ति पर चर्चा कर रहे थे और फिर हम इस विशेष मामले को भी दिखाएंगे जहां दूरी के बीच है केंद्र त्रिज्या के योग के बराबर हैं तो वे एक दूसरे को बिल्कुल एक बिंदु पर स्पर्श करेंगे क्योंकि जब वे एक दूसरे को काटेंगे तो वे वास्तव में एक दूसरे को काटेंगे दो अलग-अलग बिंदुओं पर लेकिन एक विशेष मामले के रूप में जब दूरी योग के बराबर होती है तो वे एक दूसरे को बाहरी रूप से स्पर्श करते हैं मेरा मतलब यह है कि दो मंडल एक दूसरे के अंदर नहीं हैं, उदाहरण के लिए एस दो एस 1 के बाहर है और यह इस बिंदु  $p$  पर बाहर से  $s$  1 को छू रहा है और फिर निश्चित रूप से हम इस मामले को भी सख्ती से व्युत्पन्न दिखाएंगे जहां एक मंडल दूसरे को आंतरिक रूप से छूता है तो आइए हम यह देखने के साथ शुरू करें कि ऐसा किन परिस्थितियों में होगा कि दो वृत्त एक दूसरे के साथ प्रतिच्छेद करेंगे तो आइए हम कहते हैं कि हमारे पास ये दो वृत्त हैं और

इसलिए हमने  $s$  एक की परिक्रमा की है और हमारे पास वृत्त दो हैं और हम कहते हैं कि वे इन दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं और इनमें से किसी एक का समन्वय करते हैं प्रतिच्छेदन के बिंदु  $x$  और  $y$  हैं

इसलिए यह केंद्र  $o$  पहले वृत्त में से एक है जिसके निर्देशांक मैं  $a$  और  $ba$  अल्पविराम  $bo$  दो से निरूपित करते हैं, दूसरे वृत्त का केंद्र है जिसके निर्देशांक  $c$  द्वारा निरूपित किए जाते हैं और  $dc$  अल्पविराम  $d$  और निश्चित रूप से यह सीधी रेखा की लंबाई दो केंद्रों के बीच की दूरी  $d$  एक  $o$  दो है,

इसलिए  $s$  1 और  $s$  2 इस बिंदु  $x$  अल्पविराम  $y$  पर प्रतिच्छेद करते हैं, यह बिंदु  $x$  अल्पविराम  $y$  अब दोनों वृत्तों पर स्थित है इस

समस्या को हल करने के लिए हम एक सर्कल के पैरामीट्रिक फॉर्म या पैरामीट्रिक समीकरण का उपयोग करने जा रहे हैं, इसलिए यदि आपको किसी सर्कल के पैरामीट्रिक समीकरण को याद है तो सर्कल पर किसी भी बिंदु  $x$  और  $y$  को इस तरह लिखा जा सकता है ताकि एक्स समन्वय कर सके  $x$  के रूप में लिखा जा सकता है कि केंद्र के बराबर  $x$  सर्कल के केंद्र के समन्वय के साथ-साथ सर्कल के त्रिज्या उप कोण थीटा के कॉस के बराबर है,

इसलिए यह कोण आमतौर पर यह कोण होता है यदि हम इस सर्कल के केंद्र के माध्यम से एक रेखा खींचते हैं जो है एक्स अक्ष के समानांतर हम कहते हैं कि यह हरी बिंदीदार रेखा है तो थीटा केवल

वामावर्त दिशा में लिया गया कोण है जो एक्स अक्ष  $x$  अक्ष से इस त्रिज्या तक वामावर्त दिशा में लिया जाता है जो एक केंद्र को जोड़ता है यह बिंदु  $xy$  तो यह यह पूरा कोण है

इसलिए यह कोण थीटा है

इसलिए पैरामीट्रिक रूप का उपयोग करके हमारे पास वृत्त पर किसी भी बिंदु का  $x$  निर्देशांक है जिसे  $a$  प्लस  $r \cos \theta$  के रूप में लिखा गया है और  $y$  निर्देशांक  $y$  निर्देशांक के बराबर होगा केंद्र का जो बी प्लस त्रिज्या है, उसी कोण की साइन अब थीटा क्योंकि यह बिंदु  $x$  अल्पविराम  $y$  भी दूसरे सर्कल के दो पर स्थित है, हम दूसरे सर्कल के पैरामीट्रिक रूप के संदर्भ में एक्स और वाई भी लिख सकते हैं।

उस स्थिति में  $x$  किसी अन्य कोण  $\phi$  के  $c$  प्लस  $r \cos \phi$  कोसाइन के बराबर है क्योंकि अब कोण अलग होगा क्योंकि अब हम इस बिंदु  $x$  और  $y$  के निर्देशांक को  $ah$  के साथ पैरामीट्रिक रूप में व्यक्त करने का प्रयास कर रहे हैं।

दूसरा सर्कल  $s_2$  अब हम अगर फिर से  $\phi$  दिखाने के लिए हमें क्या करना है, तो हमें केंद्र  $o_2$  के माध्यम से  $x$  अक्ष के समानांतर एक रेखा खींचनी होगी और फिर मान लें कि हमारे पास यह त्रिज्या है जो केंद्र  $o_2$  को इस बिंदु  $xy$  से मिलती है।

और फिर अंग क्षैतिज से या इस त्रिज्या के कोण से वामावर्त दिशा में लिए गए  $x$  अक्ष के संबंध में,

इसलिए हमें यह देखना होगा कि इस क्षैतिज  $x$  अक्ष को किस कोण से वामावर्त दिशा में घुमाया जाना चाहिए ताकि यह इसके साथ मेल खाता हो त्रिज्या ताकि कोण ठीक यही कोण हो और मैं इसे फी द्वारा निरूपित करूंगा,

इसलिए चूंकि यह बिंदु  $x$  अल्पविराम  $y$  दोनों वृत्तों पर स्थित है,

इसलिए हम शुरू में निर्देशांक  $x$  और  $y$  को पैरामीट्रिक रूप में पैरामीट्रिक रूप में व्यक्त करते हैं पहले सर्कल के संबंध में फॉर्म और चूंकि वही बिंदु दूसरे सर्कल पर भी स्थित है,

इसलिए हम दूसरे सर्कल के संबंध में फिर से पैरामीट्रिक रूप में निर्देशांक व्यक्त करते हैं,

इसलिए एक्स यह है और वाई डी प्लस आर 2 पाप फी होगा यदि मैं इसे समान करूं और यह जो मुझे मिल रहा है वह यह है कि एक प्लस आर वन कॉस थीटा सी प्लस आर टू कॉस फी है

इसलिए इस बिंदु पर सामान्यता के नुकसान के बिना आइए हम मान लें कि सामान्यता के नुकसान के बिना सामान्यता चलो हम मानते हैं कि  $r$  एक  $r$  दो से बड़ा या बराबर है,

इसलिए यदि  $r$  दो  $r$  एक से बड़ा है तो उसी प्रकार का प्रमाण अनुसरण करेगा कि  $r$  एक और  $r$  दो के नियम उलट हो जाएंगे,

इसलिए इस धारणा के साथ समीकरण करके यह और यह जो हमें वास्तव में मिलता है वह है आर वन कॉस थीटा सी माइनस ए प्लस आर टू कॉस फी के बराबर है और इसी तरह अगर हम इसे समान करते हैं और यह हमें मिलता है आर वन पाप थीटा डी माइनस बी प्लस आर टू सिन फी है तो अगर आर दो को  $r$  एक से बड़ा या उसके बराबर होना था तो हम इस पूरी बात को अलग तरह से लिखते तो उस स्थिति में हमें  $r$  दो  $\cos \phi$  बराबर एक माइनस  $c$  जमा  $r_1 \cos \theta$  और  $r_2 \sin \phi$  लिखना चाहिए था।

बराबर आर 1 पाप थीटा प्लस बी माइनस डी तो और फिर शेष सबूत बिल्कुल समान है

इसलिए हमने कहा कि व्यापकता के नुकसान के बिना अब हम इन दोनों समीकरणों को दोनों पक्षों के वर्ग में रखते हैं और उन्हें जोड़ते हैं जो हमें बाईं ओर मिलता है आर एक वर्ग है क्योंकि वर्ग थीटा प्लस आर एक वर्ग पाप वर्ग थीटा तो यह दाहिनी ओर बाईं ओर है, हमें सी माइनस ए प्लस आर टू कॉस फी पूरा वर्ग प्लस डी माइनस बी प्लस आर टू सिन फी पूरा वर्ग मिलता है क्योंकि कॉस स्क्वायर थीटा प्लस सिन स्क्वायर थीटा एक के बराबर है बाएं हाथ की ओर  $r$  एक वर्ग को सरल करता है

इसलिए हमारे पास यह समीकरण है और यदि हम अब दाहिने हाथ की ओर का विस्तार करते हैं तो हमें जो मिलता है वह  $c$  घटा एक पूरा वर्ग प्लस  $d$  घटा  $b$  पूरा वर्ग प्लस  $r$  दो वर्ग  $\cos$  वर्ग  $\phi$  जमा  $r$  दो वर्ग पाप वर्ग फी प्लस दो आर दो सी माइनस ए कॉस फी प्लस टू आर टू डी माइनस बी सिन फी अब यह आर टू स्क्वायर के अलावा और कुछ नहीं है क्योंकि कॉस स्क्वायर फी प्लस सिन स्क्वायर फी एक है

इसलिए हमें आर एक वर्ग के बराबर है और यह मात्रा और कुछ नहीं बल्कि दो केंद्रों  $ab$  और  $cd$  के बीच की दूरी है,

इसलिए यह मात्रा कुछ भी नहीं है,

इसलिए यह वर्ग दूरी के बराबर है क्षमा करें,

इसलिए यह दोनों केंद्रों के बीच की वर्ग दूरी है,

इसलिए हमारे पास  $r$  एक वर्ग बराबर वर्ग है बीच की दूरी केंद्र प्लस आर टू स्क्वायर प्लस टू आर टू इन सी माइनस ए कॉस फी प्लस डी माइनस बी सिन फी और फिर हम यहां थोड़ा हेरफेर करते हैं

इसलिए बस इस शब्द को हम  $d^2$  से गुणा और विभाजित करते हैं और यह सी माइनस ए बाय डी वन ओ हो जाता है दो गुना कॉस फी प्लस डी माइनस बी बाय डी ओवर ओ टू इन सिन फी अब अगर हम आह महसूस करते हैं कि हम जानते हैं कि डी ओवर ओ टू स्क्वायर सी माइनस ए पूरा स्क्वायर प्लस डी माइनस बी पूरा वर्ग है तो अनिवार्य रूप से हमारे पास कुछ ऐसा है सी माइनस  $a$  और  $d$  माइनस  $b$  तो हमारे पास एक समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण लंबाई  $d$  का  $o$  दो से अधिक है और अन्य दो भुजाएँ  $c$  माइनस  $a$  और

d माइनस b हैं और

इसलिए यह होना चाहिए और हम वास्तव में ऐसा नहीं कर सकते हैं उस समकोण त्रिभुज को यहाँ दिखाना बहुत कठिन है इसलिए यदि हम अपनी आकृति पर वापस जाते हैं तो यह समकोण यदि आप इस केंद्र से o दो इस हरी बिंदीदार रेखा पर लंबवत खींचते हैं जो x अक्ष के समानांतर है तो आइए हम इसे लंबवत कहें तो यह समकोण त्रिभुज है जिससे हम बात कर रहे हैं इसके बारे में क्योंकि इस समकोण त्रिभुज में कर्ण लंबाई का है do1 o2 यह लंबाई c माइनस a यह d माइनस b है और आइए हम समकोण त्रिभुज के इस कोण को अल्फा द्वारा निरूपित करें ताकि हमारे पास यह कोण अल्फा हो और

इसलिए c माइनस ए बाय डी ओवर ओ 2 कुछ भी नहीं है, कॉस अल्फा और डी माइनस बी बाय डी ओवर ओ 2 साइन अल्फा है इसलिए हम अब इस समीकरण में इसका उपयोग करेंगे

इसलिए हमारे पास यह है कि आर एक वर्ग एक ओ दो पूर्ण वर्ग प्लस आर है टू स्क्वायर प्लस टू आर टू डी ओवर ओ दो गुना कॉस अल्फा कॉस फी प्लस साइन अल्फा साइन फी तो यह कॉस ए कॉस बी प्लस पाप ए पाप बी फॉर्मूला का उपयोग कर रहा है यह फी माइनस अल्फा के कॉस के बराबर है और

इसलिए यहां से हमें मिलता है फाई माइनस अल्फा का कॉस बराबर आर एक वर्ग माइनस एक ओ दो पूर्ण वर्ग प्लस आर दो वर्ग दो आर दो डी एक ओ दो के बराबर है

इसलिए यदि हम ऐसा करते हैं तो हमारा मुख्य उद्देश्य अब इस फाई का मूल्य खोजना है क्योंकि यदि आपको याद है मूल समस्या यह थी कि हमें ये दोनों दिए गए थे सर्कल और हमें अब चौराहे के बिंदुओं का पता लगाना चाहिए

क्योंकि हम पैरामीट्रिक फॉर्म का उपयोग करते हैं, चौराहे के बिंदुओं को ढूँढना इन कोणों थीटा और फाई को खोजने जैसा ही है क्योंकि एक बार जब हम थीटा और फाई पाते हैं तो हम स्पष्ट रूप से एक्स और वाई ढूँढ सकते हैं लेकिन फिर यह थीटा और फाई ऐसा होना चाहिए कि यह एक साथ इन दो समीकरणों को हल करें ये त्रिकोणमितीय समीकरण हैं

इसलिए हमारे पास दो अज्ञात थीटा और फाई हैं जिन्हें पता लगाया जाना चाहिए और अन्य सभी अन्य सभी चर यहां हमें ज्ञात हैं क्योंकि आर एक ज्ञात है r दो को 2 केंद्रों के निर्देशांक ab और cd के बारे में भी जाना जाता है और यही हम पिछली कुछ स्लाइड्स में करने की कोशिश कर रहे हैं और हम इस बिंदु पर पहुंच गए हैं जहां बाकी सब कुछ तो यह दाहिने हाथ की तरफ पूरी तरह से जाना जाता है हमारे लिए अल्फा हमें भी जाना जाता है क्योंकि अगर हम याद करते हैं कि कॉस और अल्फा की साइन ज्ञात मात्रा के त्रिकोणमितीय अनुपात हैं तो अल्फा भी हमें ज्ञात है और

इसलिए हमें सक्षम होना चाहिए फाई का पता लगाने के लिए और एक बार जब हमें फी का पता चल जाता है तो हम फी के उस मूल्य को इन दो समीकरणों में वापस प्लग कर सकते हैं और हम आसानी से थीटा का पता लगा सकते हैं और एक बार जब हम थीटा और फी को जान लेते हैं तो हम पा सकते हैं कि हम चौराहे के बिंदु के समन्वय को जानते हैं इन दो सर्किलों में से इस आह को हल करने के लिए आइए हम फाई माइनस अल्फा बनाम फी के कॉस का ग्राफ बनाएं ताकि फाई के अल्फा कॉस के बराबर फी माइनस अल्फा में अल्फा प्लस पीआई पर दो का अधिकतम अधिकतम मान होगा जब फाई है अल्फा प्लस पीआई बाय टू कॉस ऑफ फी माइनस अल्फा फी पर शून्य होगा शून्य के बराबर वैल्यू माइनस अल्फा का कॉस है जो हमें अल्फा प्लस पीआई पर यह मान कहने देता है कि वैल्यू फी माइनस अल्फा के कॉस का मान होने जा रहा है माइनस वन होने जा रहा है जो यहां अल्फा प्लस थ्री पीआई बटा टू पर है

इसलिए जब फाई अल्फा प्लस थ्री पीआई बटा टू कॉस ऑफ फाइव माइनस अल्फा फिर से शून्य है तो यह फिर से यहां है और फिर हम कहते हैं कि हम केवल दो तक प्लॉट करते हैं pi क्योंकि यह पर्याप्त है क्योंकि phi m के ये कार्य cos इनस अल्फा फाई आवधिकता का एक आवधिक कार्य है, दो पीआई होने के कारण यह शून्य और दो पीआई के बीच ग्राफ खींचने के लिए पर्याप्त है क्योंकि अन्य सभी अंतरालों के लिए दो पीआई से चार पीआई के अंतराल के लिए ग्राफ बिल्कुल समान होने जा रहा है।

शून्य से दो पीआई से शून्य भी शून्य से 2 पीआई के लिए ग्राफ के समान होगा,

इसलिए प्राप्त ग्राफ कुछ इस तरह दिखाई देगा, फिर यह यहां 0 पर जाता है और फिर शून्य से 1 और फिर वापस 0 पर और दो पीआई पर यह मूल रूप से एक पूर्ण चक्र या एक पूर्ण आह एक पूर्ण दो पीआई रोटेशन को पूरा करने जा रहा है और

इसलिए यह मान और यह मान समान होगा और फिर कहें कि अब यह स्पष्ट है कि यदि इस दाहिने हाथ की ओर से अधिक मापांक है एक तो स्पष्ट रूप से कोई समाधान नहीं है और ठीक यही मामला है जहां इसका मतलब यह है कि चूंकि कोई समाधान नहीं है या मूल रूप से इस त्रिकोणमितीय समीकरण का कोई समाधान नहीं है, उस मामले में जहां पूर्ण या या मान इस दाहिने हाथ की ओर का निरपेक्ष मान एक से अधिक है जिसका अर्थ है कि या तो यह एक से बड़ा है या यह ऋणात्मक एक से कम है,

इसलिए उस स्थिति में चूंकि इन त्रिकोणमितीय समीकरणों का कोई हल नहीं है, यह स्पष्ट है कि दोनों वृत्त प्रतिच्छेद नहीं करते हैं, इसलिए दूसरा मामला यह है कि जब इस दाहिने हाथ की ओर के इस निरपेक्ष मान का मापांक उस स्थिति में एक से कम है, यदि मान मान लिया जाए कि क्या निरपेक्ष मान एक से कम है, तो ऐसा ही मामला है।

मान लें कि मान एक से कम है तो मान लें कि मान आधा जैसा कुछ है तो समाधान खोजने के लिए हम क्या करते हैं तो आइए हम कहें कि यह यह मान बराबर है तो यह अधिकार हाथ की तरफ इतना बराबर है और

इसलिए हम एक्स अक्ष के समानांतर एक क्षैतिज रेखा खींचते हैं,

इसलिए खेद है कि यह लाल वक्र केवल यहां तक जाएगा क्योंकि यह और यह समान होना चाहिए और

इसलिए हम जो देखते हैं वह किसी भी मूल्य के लिए है जो एच सख्ती से एक से कम है यह देखना बहुत आसान है कि वास्तव में दो अलग-अलग समाधान या फाई के दो अलग-अलग मूल्य होंगे जो इस समीकरण को संतुष्ट करेंगे ताकि हम कोई अन्य मूल्य भी ले सकें ताकि हम कुछ अन्य मूल्य ले सकें, आइए हम कहें हम इस मान को कहते हैं, जो मान लें कि हम ऋण एक बटा चार कहते हैं,

इसलिए यदि यह दाहिने हाथ की ओर से एक बटा चार घटा है तो समाधान खोजने के लिए x अक्ष के समानांतर एक क्षैतिज रेखा खींची जाएगी जिसकी x अक्ष से लंबवत दूरी है एक से चार है, लेकिन यह नकारात्मक पक्ष पर है, नकारात्मक पक्ष पर है,

इसलिए मूल रूप से यह हरी रेखा है,

इसलिए जब यह शून्य से एक से चार है तो दो समाधान इस हरे रंग की रेखा के वक्र के साथ चौराहे के बिंदु से दिए जाते हैं कॉस फी माइनस अल्फा और वे दो बिंदु यह हैं

इसलिए ये दो एक हैं ताकि कोई भी आसानी से देख सके कि इस दाहिने हाथ की ओर के किसी भी मूल्य के लिए जिसका एक निरपेक्ष मूल्य एक से कम है, वहां दो अलग-अलग मान मौजूद होंगे फाई या दो अलग-अलग फी के लिए समाधान और फी के ऐसे प्रत्येक समाधान के लिए यदि हम इसे यहां इस समीकरण में वापस रखते हैं तो हमें उस फी के अनुरूप थीटा का एक अनूठा मूल्य मिलेगा, जो अब एक थीटा और फी जोड़ी होगी क्योंकि दो अलग-अलग फाई हैं ऐसे मामलों के लिए जहां दाहिने हाथ की ओर का निरपेक्ष मान एक से कम है, यह स्पष्ट है कि दो अलग-अलग थीटा फी जोड़े होंगे, इसका मतलब यह है कि उदाहरण के लिए चौराहे के दो अलग-अलग बिंदु होंगे जैसा कि इस आंकड़े में दिखाया गया है।

मामला जहां निरपेक्ष मूल्य तो यह वह मामला है जहां हम अभी इस समीकरण की पिछली स्लाइड पर समीकरण के दाहिने हाथ की ओर के पूर्ण मूल्य के साथ काम कर रहे हैं,

इसलिए यदि इस दाहिने हाथ की ओर पूर्ण मूल्य सख्ती से है एक से कम तो यह मामला है जिस पर हम विचार कर रहे हैं और हमने तर्क दिया है कि इस मामले में दो बिंदु होंगे जहां दो वृत्त प्रतिच्छेद करेंगे लेकिन फिर अंततः हम जो दिखाना चाहते हैं, वह यह है कि हम यह दिखाना चाहते हैं कि यह स्थिति निहित है और इस शर्त से भी निहित है कि दूरी त्रिज्या के योग से कम है और निरपेक्ष अंतर से अधिक है, इसलिए हमें यहीं से शुरुआत करनी चाहिए दोनों तरह से अगर हम यहां से शुरू करते हैं तो हमें इसे प्राप्त करना चाहिए और इसका मतलब यह भी होना चाहिए लेकिन अगर आप यह देखना चाहते हैं कि हमें इस समीकरण से पहले हमारे समीकरण पर वापस जाना होगा जो यहां लिखा गया है तो अगर हम फिर से इस समीकरण को देखें एक वर्ग या यों कहें कि अगर हम इस समीकरण को फिर से वही समीकरण देखते हैं तो यह हमें कोसाइन सूत्र की याद दिलाता है कोसाइन कानून यह हमें कोसाइन कानून की याद दिलाता है क्योंकि अगर हम कोसाइन कानून को याद करते हैं तो हमारे पास यह था कि मान लें कि हमारे पास है एक त्रिभुज जिसकी भुजाएँ  $r$  दो  $r$  एक और  $d$  एक  $o$  दो हैं और मान लें कि लंबाई  $r$  दो और एक  $o$  दो की भुजाओं के बीच का कोण बीटा है तो हम जानते हैं कि बीटा की कोज्या कुछ और नहीं बल्कि  $r$  दो वर्ग प्लस एक अल्पविराम है दो  $w$  होल स्क्वायर माइनस आर वन स्क्वायर बटा टू आर टू इन डी वन ओ टू और यह राइट हैंड साइड इस साइड से काफी मिलता-जुलता है, सिवाय इसके कि हमें नेगेटिव साइन को छोड़कर इसे नकारना होगा,

इसलिए अगर हम इस राइट हैंड साइड का माइनस लेते हैं इसे प्राप्त करें तो इसका मतलब यह है कि अगर हम फिर से अपनी शुरुआती स्लाइड पर जाते हैं तो आइए यह देखने की कोशिश करें कि यह कोण वास्तव में कहां है मेरा मतलब बीटा है जिसके बारे में हम बात कर रहे हैं

इसलिए अगर हम यहां वापस जाते हैं तो हम जो देखते हैं वह यह है कि हमें तो आइए देखते हैं कि यह बिंदु  $p$  है और आइए त्रिभुज  $po_1 o_2 po_1 o_2$  देखें तो हम देखते हैं कि यह भुजा एक  $p$  लंबाई  $r$  एक  $o$  दो  $p$  लंबाई  $r$  दो और एक  $o$  दो स्पष्ट रूप से है लंबाई एक ओ दो करो तो यह वह त्रिकोण है जिसे हमने

कुछ मिनट पहले खींचा था और फिर हम इस आर के बीच के कोण के बारे में बात कर रहे थे दो लंबाई के पक्ष की लंबाई आर दो एन यह आह लंबाई लंबाई के इस तरफ डी एक  $o$  दो तो यह वही है जो यह कोण है तो यह कोण है जिसे हम  $a$  कह रहे थे  $s$  बीटा लेकिन फिर बीटा को खोजना बहुत मुश्किल नहीं है क्योंकि अगर हम देखते हैं कि यह  $90$  डिग्री  $pi$  बटा  $2$  के अलावा और कुछ नहीं है और यह कोण अल्फा था

इसलिए यदि आप इस समकोण त्रिभुज को यहाँ देखते हैं तो यह अल्फा है और

इसलिए यहाँ यह कोण  $pi$  है दो माइनस अल्फा अब अगर हम इन सभी को एक दो तीन और चार इन चारों कोणों को जोड़ते हैं तो हमें दो पीआई मिलनी चाहिए,

इसलिए दो पीआई बराबर है तो आइए हम एंटीक्लॉकवाइज दिशा में शुरू करते हैं फाई से शुरू करते हैं तो फी प्लस और फिर बीटा प्लस पीआई दो से माइनस अल्फा प्लस पीआई बाय टू इस इक्वेशन से हमें जो मिलेगा वह यह है कि यह एंगल बीटा पीआई माइनस फी प्लस अल्फा के बराबर है अब अगर हम अगर हम इसे देखते हैं तो मुझे इस त्रिकोण को यहां पर खींचने दें तो यह बीटा है आर एक आर दो और यह एक ओ दो है

इसलिए यदि हम इस त्रिभुज पर कोसाइन कानून लागू करते हैं तो हमें जो मिलेगा वह ठीक वैसा ही होगा जैसा हमने यहां लिखा था लेकिन फिर हमने पिछली स्लाइड पर दिखाया है कि बीटा पीआई माइनस के बराबर है फाई प्लस अल्फा और

इसलिए बीटा  $i$  .

की कोज्या  $s pi$  माइनस  $phi plus alpha$  की कोज्या के अलावा और कुछ नहीं है,

इसलिए बीटा का  $cosine pi$  माइनस  $phi plus alpha$  के कोसाइन के बराबर है जो  $phi$  माइनस अल्फा के कोसाइन के माइनस के बराबर है और हमें यहाँ एक नेगेटिव साइन मिलता है,

इसलिए मेरा मतलब है कि यह है इसके बराबर जो मूल रूप से इसका मतलब है कि इससे हमें यह समीकरण मिलेगा तो हमारे पास जो कुछ भी है वह मूल रूप से यह है कि यहां जो समीकरण हमें मिला है वह इस त्रिभुज पर लागू कोसाइन कानून के अलावा कुछ भी नहीं है एक ओ दो पी अब त्रिकोणीय असमानता से तो क्या हमारे पास यह है कि यदि यह स्थिति सत्य है यदि यह स्थिति सत्य है तो उस स्थिति में दो वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगे

इसलिए यह प्रतिच्छेदन का बिंदु है  $p$  और हमारे यहाँ यह त्रिभुज है एक  $o$  दो  $p$  और इस त्रिभुज के लिए त्रिभुज असमानता संतुष्ट होना चाहिए और चूंकि त्रिकोणीय असमानता को संतुष्ट होना चाहिए, यह सच होना चाहिए कि डी एक ओ दो आर एक प्लस आर दो से सख्ती से कम होना चाहिए अन्यथा हमारे पास दूसरी तरफ त्रिभुज नहीं हो सकता है यदि हम पता है कि अगर हमारे पास है तो यह एक बात है दूसरी बात यह है कि यह एक ऐसी स्थिति है जो हमें त्रिकोणीय असमानता के कारण मिलती है, लेकिन यह केवल एक समय है क्योंकि पूरी

तरह से तीन असमानताएं होंगी

इसलिए अन्य आह त्रिकोणीय असमानता तब होती है जब हम  $r$  एक को बाईं ओर रखते हैं और हम कहते हैं कि  $r$  एक एक  $o$  दो से कम है  $r$  दो  $r$  एक माइनस  $r$  दो अब इस मामले में व्यापकता के नुकसान के बिना  $r$  एक  $r$  दो से बड़ा है तो यह और कुछ नहीं बल्कि इसके पूर्ण अंतर के समान है क्योंकि  $r$  एक है तो यह सच है क्योंकि  $r$  एक  $r$  दो से बड़ा है

इसलिए यह आह दूसरी त्रिकोणीय असमानता इसका अर्थ है और तीसरी त्रिकोणीय असमानता हमें कुछ भी सार्थक नहीं देगी क्योंकि तीसरा होगा आर दो एक ओ दो प्लस आर एक से कम है जो वैसे भी सच है क्योंकि आर एक आर दो के बराबर से बड़ा है और दो केंद्रों के बीच की दूरी सकारात्मक है

इसलिए इससे हमें कुछ भी मतलब नहीं होगा  $gfu1$  तो हमने जो देखा वह यह था कि यदि इस समीकरण के त्रिभुज का दाहिना हाथ यहाँ है यदि निरपेक्ष मान एक से कम है तो हमने तर्क दिया कि प्रतिच्छेदन के दो बिंदु होंगे और फिर हमने यह भी दिखाया कि हम का उपयोग करते हुए दिखाया कि यह समीकरण

पहली आकृति में त्रिभुजों में से एक के लिए कोसाइन कानून से मेल खाता है और फिर उस त्रिभुज में त्रिभुज असमानता को लागू करने से हमने दिखाया है कि इन दो शर्तों को संतुष्ट होना चाहिए यदि दो सर्कल दो बिंदुओं पर छेड़छाड़ कर रहे हैं तो यह होना चाहिए सच है

इसलिए हमने केवल एक ही रास्ता दिखाया है कि यदि दो वृत्त प्रतिच्छेद करते हैं तो इन दोनों को संतुष्ट होना चाहिए लेकिन विपरीत भी सत्य है क्योंकि यदि ये दो शर्तें पूरी होती हैं तो यह तीसरी शर्त वैसे भी सच है क्योंकि  $r$  एक  $r$  दो से बड़ा है और केंद्रों के बीच की दूरी सकारात्मक है और

इसलिए इसलिए हमारे पास तीन संख्याएं तीन सकारात्मक संख्याएं आर एक आर दो हैं और एक ओ दो करते हैं जो संतुष्ट करते हैं सभी तीन त्रिकोणीय असमानताएं और

इसलिए उन्हें हमेशा  $r_1$   $r_2$  के साथ एक त्रिभुज का निर्माण करना चाहिए और इसके पक्ष के रूप में  $1$   $o$   $2$  करना चाहिए और फिर हम तर्क को पीछे की ओर ले जा सकते हैं और यदि हम तर्क को पीछे की ओर ले जाते हैं तो यह बहुत मुश्किल नहीं है दिखाएँ कि वे दो त्रिभुजों में हैं जो प्रतिच्छेद करेंगे और वे इस बिंदु  $p$  पर बिल्कुल प्रतिच्छेद करेंगे क्योंकि चूंकि ये तीन संख्याएँ  $r$  एक  $r$  दो और  $d$  एक  $o$  दो इस त्रिकोणीय असमानता को संतुष्ट करते हैं एक त्रिभुज का अस्तित्व उसके दो शीर्षों के साथ एक और  $o$  के रूप में होना चाहिए दो क्योंकि  $d$  एक  $o$  दो दो केंद्रों के बीच की दूरी के अलावा कुछ भी नहीं है और दूसरे शीर्ष के साथ जिसकी दूरी  $o2$  से  $r2$  है, इसलिए यह शीर्ष दूसरे सर्कल पर स्थित होना चाहिए क्योंकि दूसरे सर्कल का दूसरा त्रिज्या  $r2$  है और इस की दूरी बिंदु  $p$   $r$  दो है इसलिए इस बिंदु पर हमें इस वृत्त पर झूठ बोलना चाहिए और इसी तरह चूंकि यह दूसरी तीसरी लंबाई  $r$  है, इस त्रिभुज का एक ही शीर्ष  $p$  भी पहले वृत्त पर स्थित होना चाहिए और

इसलिए चूंकि यह दोनों वृत्तों पर स्थित है,

इसलिए यह प्रतिच्छेदन का एक बिंदु होना चाहिए,

इसलिए मैं फिर से दूसरे तर्क को दोहराता हूँ,

इसलिए हमने सबसे पहले जो दिखाया वह यह था कि त्रिकोणीय असमानता का उपयोग करके हमने दिखाया कि आह इस स्थिति का अर्थ है कि ये दोनों आवश्यक हैं अभी पकड़ो हम पिछड़े तर्क को दिखाएंगे कि अगर हमें केवल ये दो शर्तें दी गई हैं तो भी इन दो शर्तों का अर्थ यह होगा कि दो मंडल प्रतिच्छेद करेंगे, क्योंकि हमें ये दो शर्तें दी गई हैं, यह स्थिति वैसे भी सच है क्योंकि  $r$  एक  $r$  से बड़ा है  $r$  बराबर  $r_2$   $r_1$   $r_2$  से बड़ा या बराबर है और केंद्र के बीच की दूरी सकारात्मक है अब इन तीन स्थितियों को देखते हुए हम महसूस करते हैं कि यह  $c$  स्थिति कुछ भी नहीं बल्कि त्रिभुज वे तीन समीकरण प्रतीत होते हैं त्रिकोणीय असमानता का

इसलिए हमारे पास मूल रूप से सकारात्मक संख्या  $r$  एक  $r$  दो के साथ तीन संख्याएँ हैं और एक ओ दो करते हैं जो त्रिकोणीय असमानता को संतुष्ट करते हैं और

इसलिए हमें सक्षम होना चाहिए  $o$  एक त्रिभुज की रचना करें जिसकी भुजाओं की लंबाई  $r$  एक  $r$  एक  $r$  दो हो और अब एक  $o$  दो करें  $d$  एक  $o$  दो दो केंद्रों के बीच की दूरी के अलावा और कुछ नहीं है

इसलिए हम इस त्रिभुज के दो शीर्षों को चुनते हैं जिनका निर्माण हम कर रहे हैं एक और ओ दो और तीसरा शीर्ष हम इसे एक बिंदु के रूप में चुन सकते हैं जो दूसरे सर्कल के केंद्र से  $r$  दो की दूरी पर है और पहले सर्किल के केंद्र से  $r$  एक की दूरी पर है लेकिन फिर हम पता है कि दूसरे वृत्त की त्रिज्या  $r_2$  है और

इसलिए यह बिंदु दूसरे वृत्त पर होना चाहिए इसी तरह हम जानते हैं कि पहले वृत्त की त्रिज्या  $r_1$  है और

इसलिए यह बिंदु भी स्रोत वृत्त पर होना चाहिए और चूंकि यह चालू है दोनों वृत्त यह प्रतिच्छेदन के बिंदुओं में से एक होना चाहिए जिसका अर्थ है कि दो वृत्त प्रतिच्छेद कर रहे हैं

इसलिए हमने इस व्याख्यान में अब तक जो दिखाया है वह यह है कि यदि दो वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तो मेरे कहने का मतलब यह है कि यदि दो अलग हैं समाधान या इस समीकरण के लिए फाई के दो अलग-अलग समाधान जो केवल तभी होगा जब इस दाहिने हाथ की तरफ एक से कम पूर्ण मूल्य हो,

इसलिए यदि हम उस स्थिति को मानते हैं कि यदि दाहिने हाथ की ओर का पूर्ण मूल्य एक से कम है जिसमें दो अलग-अलग हैं फाई के समाधान जिसका मूल रूप से मतलब है कि हम मान रहे हैं कि दो मंडल दो अलग-अलग बिंदुओं पर दो अलग-अलग छेड़छाड़ करते हैं,

इसलिए यदि दो मंडल दो अलग-अलग बिंदुओं पर छेड़छाड़ करते हैं तो यहाँ से शुरू होता है और त्रिकोणीय असमानता का उपयोग करता है हमने दिखाया है कि दो केंद्रों के बीच की दूरी त्रिज्या के योग से सख्ती से कम होनी चाहिए और यह भी कि केंद्रों के बीच की दूरी दो त्रिज्या के बीच पूर्ण अंतर से अधिक होनी चाहिए और उसके बाद हमने यह भी दिखाया कि हम उल्टा तर्क भी दिखाया हमने दिखाया कि अगर हम शुरुआत करते हैं तो अगर हम इस धारणा से शुरू करते हैं कि दूरी शर्त है दो सर्किलों के बीच आर एक प्लस आर दो से कम है और यह दो त्रिज्या के बीच पूर्ण अंतर से अधिक है यदि हम उस धारणा से शुरू करते हैं तो हमने यह भी दिखाया कि हमने तर्क दिया कि यह होना चाहिए और शायद पहले 15-20 मिनट में अगले व्याख्यान में हमें शेष तर्क को समाप्त करने में सक्षम होना चाहिए

ताकि शेष मामले मूल रूप से ऐसे मामले हों जहां हमारे पास एक के बराबर होने के लिए पूर्ण मूल्य या उदाहरण के लिए पूर्ण मूल्य एक से अधिक हो,  
इसलिए हम उन्हें लेंगे अगले व्याख्यान में मामले  
इसलिए हम समाप्त करेंगे कि अगले व्याख्यान के पहले 15 20 मिनट में और अगले व्याख्यान के शेष भाग में मंडलियों के परिवार पर एक नया विषय शुरू होगा, धन्यवाद

Prutor@iitk