

मागील व्याख्यानात वर्तुळांवरील नऊ व्याख्यानात आपले स्वागत आहे ,  
आम्ही दोन वर्तुळांच्या सामाईक स्पर्शिकेशी संबंधित काही समस्या सोडवल्या होत्या त्याबद्दल आम्ही चर्चा केली होती ,  
त्यामुळे या व्याख्यानात आपण कोणत्याही दोन वर्तुळांमधील छेदनबिंदूच्या कोनाबद्दल बोलू  
आणि नंतर दिलेली कोणतीही दोन वर्तुळे एकमेकांना ऑर्थोगोनल आहेत अशी स्थिती शोधण्यासाठी आपण पुढे जाऊ या शिवाय दिलेल्या  
कोणत्याही दोन वर्तुळांमधील

मूलगामी अक्ष म्हणून ओळखले जाणारे अह असे काहीतरी परिभाषित करेल, म्हणून आपण दोन दिलेल्या वर्तुळांच्या छेदनबिंदूचा कोन  
परिभाषित करण्यास सुरुवात करूया.

समजा आपल्याला दोन वर्तुळांचे समीकरण दिले आहे आणि आपण असे म्हणूया की दोन वर्तुळे एकमेकांना छेदत आहेत म्हणून स्पष्टपणे  
छेदनबिंदूचा कोन फक्त दोन वर्तुळांसाठी परिभाषित केला जातो जे एकमेकांना छेदतात जर दोन वर्तुळे एकमेकांना छेदत नसतील तर त्या  
बाबतीत छेदनबिंदूचा कोन परिभाषित केलेला नाही, म्हणून आपण असे म्हणू की ही दोन वर्तुळे आहेत जी एकमेकांना छेदतात म्हणून हे  
आहे पहिले वर्तुळ  $s$  एक हे दुसरे वर्तुळ  $s$  दोन आहे तर आपण असे म्हणूया की या दोन वर्तुळांची केंद्रे  $o$  एक आणि  $o$  दोन आहेत  
पहिल्या वर्तुळाचे समीकरण म्हणजे  $x$  चौरस अधिक  $y$  वर्ग अधिक दोन  $g$  एक  $x$  अधिक दोन  $f$  एक  $y$  अधिक  $c$  एक शून्य  
म्हणजे हे  $s$  एक आहे आणि दुस-या वर्तुळाचे समीकरण  $s$  दोन आहे  $x$  चौरस अधिक  $y$  वर्ग अधिक दोन  $g$  दोन  $x$  अधिक दोन  $f$   
दोन  $y$  अधिक  $c$  दोन समान शून्य

त्यामुळे ही दोन वर्तुळे एकमेकांना छेदतात या दोन बिंदूवर आता आपण पहिल्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढू या म्हणजे छेदनबिंदूच्या या  
बिंदूवर एक स्पर्शिका म्हणजे स्पर्शिका असे काहीतरी दिसेल

त्यामुळे मूलतः हे 90 अंश असणार आहे त्याचप्रमाणे दुसऱ्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढू.

छेदनबिंदूच्या त्याच बिंदूवर ती स्पर्शिका येथे लाल रंगात काढली आहे जेणेकरून ते असे काहीतरी दिसू शकेल म्हणून या छेदनबिंदूच्या या  
सामान्य बिंदूवरील दुसऱ्या वर्तुळाची ही सरळ रेषा स्पर्शिका आहे मी त्याला  $t$  दोन आणि स्पर्शिका पहिल्याला असे म्हणून व्या वर वर्तुळ  
छेदनबिंदूचा समान बिंदू मी त्याला  $t$  one ने कॉल करीन आणि नंतर हा कोन या दोन स्पर्शिकेतील  $p$  theta मध्ये राहू द्या म्हणजे हा  
कोन दोन स्पर्शिकेतील दोन वर्तुळांमधला कोन छेदनबिंदूच्या या बिंदूवर असेल तर हा कोन आहे ज्याला हा कोन म्हणतात दोन  
वर्तुळांमधील छेदनबिंदू

त्यामुळे आता दोन वर्तुळांचे समीकरण पाहता आपल्याला थीटा छेदनबिंदूचा हा कोन शोधता आला पाहिजे, म्हणून आपण हा छेदनबिंदू  $a$   
ने दर्शवू आणि एक  $o$  दोन देखील सरळ रेषेने जोडू.

आता आपल्याकडे त्रिकोण आहे  $o$  one  $ao$  1  $ao$  2 तर हा त्रिकोण आहे जो आपल्याकडे आहे

त्यामुळे ही  $o$  1  $a$  ची लांबी  $r$  1 च्या बरोबर आहे जी पहिल्या वर्तुळाची त्रिज्या आहे  $s$  1 विहीर  $r$  1 अभ्यासक्रम  $g$  1 वर्ग  
अधिक  $f$  1 वर्ग वजा  $c$  1 च्या वर्गमूळाच्या बरोबरीचा आहे जिथे आपल्याला  $g$  1  $f$  1 आणि  $c$  1 ची मूल्ये आधीच माहित आहेत  
कारण पहिल्या वर्तुळाचे समीकरण आपल्याला दिलेले आहे त्याचप्रमाणे आपण ही लांबी  $o2a$  शोधू शकतो.

जी प्रत्यक्षात दुसऱ्या सीआयआरची त्रिज्या आहे  $c1e$  आणि ते पुन्हा सापडू शकते कारण आपल्याला दुसऱ्या वर्तुळाचे समीकरण आधीच  
माहित असल्याने आपल्याला  $g$  दोन  $f$  दोन आणि  $c$  दोन ची मूल्ये कळू शकतात म्हणून  $r$  दोन हे फक्त  $g$  दोन वर्गाचे वर्गमूळ अधिक  
 $f$  दोन वर्ग वजा असेल  $c$  दोन आणि नंतर अर्थातच आपल्याला केंद्राचे निर्देशांक आधीच माहित असल्यामुळे

पहिल्या केंद्राचा समन्वय पहिल्या वर्तुळाचा केंद्र वजा  $g$  एक स्वल्पविराम वजा  $f$  वन आणि नंतर या बिंदू  $o$  दोन चे समन्वय जे केंद्र आहे  
दुसरे वर्तुळ वजा  $g$  दोन स्वल्पविराम वजा  $f$  दोन आणि नंतर त्यांच्यामधील अंतर जे एक  $o$  दोन इतके आहे दोन केंद्रांमधील अंतर  $g$   
एक वजा  $g$  दोन पूर्ण वर्ग अधिक  $f$  एक वजा  $f$  दोन पूर्ण वर्गाच्या वर्गमूळाद्वारे दिले जाते तर आता आपल्याकडे एक त्रिकोण एक  $o2$   
आहे आणि आपल्याला त्याच्या तीन बाजूंची लांबी नक्की माहित आहे आणि म्हणून आता या त्रिकोणाचे तीन कोन शोधणे देखील शक्य आहे  
परंतु नंतर आपल्याला हा कोन शोधण्यास सांगितले जाते.

$theta$   $wha$   $t$  आपल्याला हे देखील समजले

आहे की  $t2$  दुसऱ्या वर्तुळाची स्पर्शिका असल्यामुळे हा कोन देखील 90 अंश आहे म्हणून आता आपण या बिंदूकडे पाहिल्यास  $o$  आपण  
या बिंदूकडे पाहतो  $o$  म्हणून आपल्याकडे प्रथम हा कोन आहे जो 90 आहे नंतर आपल्याकडे थीटा आहे आणि मग आपल्याकडे हा कोन  
आहे जो 90 उजवा आहे आणि मग शेवटी आपल्याकडे हा कोन  $o1$   $a$   $o2$  आहे कारण या सर्व कोनांची बेरीज 360 असली पाहिजे  
म्हणजे आपल्याकडे आहे तो म्हणजे पहिला कोन 90 अंश आहे

त्यामुळे तो कोन आहे या  $o$  1  $a$  आणि या स्पर्शिका  $t$  1 मधील 90 अंश आहे

त्यामुळे  $pi$  द्वारे 2 अधिक आणि नंतर आपल्याकडे दोन वर्तुळांच्या छेदनबिंदूचा कोन आहे जो हा कोन थीटा अधिक आहे नंतर पुन्हा  
आपल्याकडे सामान्य  $o2$   $a$  दरम्यान 90 अंश आहे तर  $o$  दोन  $a$  आणि  $t$  दोन मधला कोन नव्वद अंश आहे म्हणून आपल्याकडे  
पुन्हा  $pi$  बाय दोन आणि नंतर अधिक कोन  $o$  दोन  $ao$  एक तर कोन  $o$  दोन  $ao$  एक म्हणजे या सर्वांची बेरीज तीनशे साठ अंश  
इतकी असली पाहिजे.

दोन  $pi$  आणि म्हणून तिथून आपण तो कोन  $o$  म्हणू शकतो दोन  $ao$  एक पाई वजा थीटा च्या बरोबरीचे असणे आवश्यक आहे आपण  
येथे  $pi$  उणे थीटा लिहू आता आपण या त्रिकोणाच्या या कोन कोन  $o2$   $ao1$  वर कोसाइन नियम लागू करू

त्यामुळे या कोनाच्या कोसाइन नियमानुसार  $o2$   $ao$  एक समान आहे दोन बाजूंच्या वर्गाची बेरीज ज्या  $ah$  दोन बाजू  $ah$  या कोनाला  
लागून आहेत किंवा

त्यामुळे 2 बाजू मुळात या प्रकरणात  $r$  2 चौरस आणि  $r$  1 चौरस आहेत

त्यामुळे  $r$  1 चौरस अधिक  $r$  2 चौरस वजा चौरस या कोनाच्या विरुद्ध असणारी बाजू जी या कोनाच्या विरुद्ध आहे

त्यामुळे ती वजा कमी होईल हे दोन केंद्रांमधील अंतर आहे ज्याचा चौरस

या कोनाला लागून असलेल्या बाजूंच्या लांबीच्या गुणाकाराच्या दोन पटीने भागला जातो

त्यामुळे दोन पटीने भागला जातो  $r \text{ one } r$  दोन

त्यामुळे अर्थातच आता इथून  $ah$  ते पुढे घेऊन आता आपल्याकडे  $r \text{ one } r$  दोन आणि  $o \text{ one } o$  दोन साठी  $ah$  च्या संदर्भात अभिव्यक्ती आहेत कारण आपल्याला  $g \text{ one } g \text{ two}$  आणि  $f \text{ one } f$  चे मूल्य आधीच माहित आहे.

दोन आणि क एक क दोन च्या समीकरणापासून आपल्याला दोन वर्तुळे दिलेली आहेत म्हणून आपण या कोनाचा कोसाइन नक्की शोधू शकलो पाहिजे परंतु आपल्याला आधीच माहित आहे की कोन  $o$  दोन  $ao$  एक हा कोनाचा  $pi$  उणे थीटा कोसाइन आहे  $o$  दोन  $ao$  एक हा  $pi$  उणे थीटाचा कोसाइन आहे

जो आहे इकल टू वजा  $\cos \theta$  पण आम्हाला हे देखील माहित आहे की हे मागील स्लाइडच्या बरोबरीचे आहे आम्ही फक्त  $r \text{ 1 } r \text{ 2}$  आणि  $o \text{ 1 } o \text{ 2}$  साठी अभिव्यक्ती बदलू

त्यामुळे या 3 अभिव्यक्ती येथे आणि तेथे बदलल्या जातील.

कोसाइन थीटाचा हा कोसाइन वजा जो कोसाइन  $o \text{ 2 } ao \text{ 1}$  चा कोसाइन असेल तर  $r \text{ 1}$  वर्ग असेल  $g \text{ 1}$  वर्ग अधिक  $f$  एक वर्ग वजा  $c$  एक अधिक  $r$  दोन वर्ग असेल  $g$  दोन वर्ग अधिक  $f$  दोन वर्ग वजा  $c$  दोन एक  $o$  दोन पूर्ण वर्गाचे वजा म्हणजे एक  $o$  दोन पूर्ण वर्ग असेल  $g$  एक चौरस अधिक  $g$  दोन वर्ग वजा दोन  $g$  एक  $g$  दोन नंतर अधिक  $f$  एक वर्ग अधिक  $f$  दोन वर्ग वजा दोन  $f$  एक  $f$  दोन म्हणून हा अंश आहे आणि भाजक आपल्याकडे दोन गुणिले  $r$  एक  $r$  दोन आहे म्हणून तो 2 पट चौरस होईल  $g \text{ 1}$  स्केअर अधिक  $f \text{ 1}$  स्केअर वजा  $c$  चे 1 वेळा  $g \text{ 2}$  स्केअर अधिक  $f \text{ 2}$  स्केअर वजा  $c \text{ 2}$  चे स्केअर रूट आणि हे मूलतः

आपल्याकडे जे आहे ते  $\cos$  आहे म्हणून हे  $\cos \theta$  चे वजा आहे म्हणून  $\cos \theta$  जिथे  $\theta$  आहे दोन वर्तुळांमधील छेदनबिंदूचा कोन म्हणून  $\cos \theta$  समान असेल  $c \text{ 1}$  अधिक  $c \text{ 2}$  वजा 2 पट  $g \text{ 1 } g \text{ 2}$  वजा दोन पट  $f \text{ one } f$  दोन भागिले  $g$  एक वर्गाच्या दोन पट वर्गमूळ अधिक  $fn$  वर्ग वजा  $c \text{ 1}$  पट वर्ग  $g \text{ 2}$  स्केअर अधिक  $f \text{ 2}$  स्केअर वजा  $c \text{ 2}$  चे रूट आणि आम्हाला आधीच माहित आहे की थीटा पासून  $pi$  उणे थीटा उह 0 आणि  $pi$  दरम्यान आहे

त्यामुळे हे स्पष्ट आहे की थीटा देखील आत मध्ये असणार आहे

त्यामुळे थीटा श्रेणीमध्ये आहे रेंज 0 ते  $pi$  या रेषेत जात आहे आणि

त्यामुळे  $\theta$  चे मूल्य काहीही नसेल पण

त्यामुळे  $\theta$  हे उजव्या बाजूच्या  $\cos$  व्युत्क्रममाशियाय दुसरे काहीही नसेल

त्यामुळे  $\theta$  हे  $\cos$  inverse of  $\cos$  च्या समान असेल

त्यामुळे  $\cos$  inverse चा वितर्क ही अभिव्यक्ती असेल आता आपण दोन कोणत्या स्थितीत आहे ते पाहू वर्तुळे ऑर्थोगोनल असतील म्हणून जेव्हा आपण म्हणतो की दोन वर्तुळे ऑर्थोगोनल आहेत म्हणून दोन वर्तुळे ऑर्थोगोनल आहेत असे म्हटले जाते आणि जर त्यांच्यामधील छेदनबिंदूचा कोन 2 किंवा 90 अंशांनी  $pi$  असेल तर आता आपण पाहू या की कोणत्या स्थितीत किंवा कोणत्या स्थितीत आहे दोन दिलेली वर्तुळे एकमेकांना ऑर्थोगोनल आहेत या स्थितीत समाधानी असणे आवश्यक आहे जे येथून फारसे अवघड नसावे कारण दोन जर दोन वर्तुळे ऑर्थोगोनल असतील तर ही थीटा  $pi$  बाय दोनच्या समान असणे आवश्यक आहे परंतु  $pi$  ची  $\cos$  बाय दोन आहे शून्य हे स्पष्ट आहे की दोन वर्तुळे ऑर्थोगोनल असण्यासाठी ही उजवी बाजू शून्य असणे आवश्यक आहे, म्हणून अट अशी आहे की दोन वर्तुळे  $s$  एक आणि  $s$  दोन ज्यांची समीकरणे येथे दिली आहेत म्हणून दोन वर्तुळे  $s$  एक  $s$  दोन ऑर्थोगोनल आहेत जर आणि फक्त जर ही अभिव्यक्ती शून्य आहे ज्याचा मुळात अर्थ असा आहे की दोन  $g$  एक  $g$  दोन अधिक दोन  $f$  एक  $f$  दोन समान  $c$  एक अधिक  $c$  दोन, म्हणून ही संकल्पना थोडी अधिक स्पष्ट करण्यासाठी आपण दोन प्रश्न घेऊ या.

$s$  पहिला प्रश्न असा आहे की वर्तुळ  $s$  हे बिंदू शून्य एक मधून जाते आणि या वर्तुळाच्या या दोन वर्तुळांना ऑर्थोगोनल आहे, म्हणून आपण असे म्हणू की वर्तुळ  $s$  मध्ये हे समीकरण आहे आणि ते शून्य एक बिंदूमधून जात असल्याने हे समीकरण आवश्यक आहे.

$x$  बरोबर शून्य आणि  $y$  समान एकावर समाधानी राहा म्हणून आपल्याला एक अधिक दोन  $f$  अधिक  $c$  समान शून्य मिळते तसेच हे वर्तुळ  $s$  दोन्ही वर्तुळांसाठी ऑर्थोगोनल आहे म्हणून ते या वर्तुळासाठी ऑर्थोगोनल असल्यामुळे आपण ऑर्थोगोनॅलिटीसाठी अट वापरू शकतो.

ही स्थिती वापरू शकतो म्हणून हे समीकरण  $x$  चौरस अधिक  $y$  चौरस वजा दोन  $x$  वजा पंधरा म्हणजे शून्य असे लिहिले जाऊ शकते आणि दुसरे वर्तुळ  $x$  चौरस अधिक  $y$  चौरस वजा एक शून्य आहे म्हणून  $ah$  म्हणून येथे असे म्हणूया की आपण जर आपण जर म्हणून आपण येथे समीकरण  $x$  वर्ग अधिक  $y$  वर्ग अधिक  $2g \text{ 1 } x$  अधिक  $2f \text{ 1 } y$  अधिक  $c$  एक शून्याच्या बरोबरीचे असेल तर  $g$  एक वजा एक  $f$  एक शून्य  $c$  एक शून्य  $c$  एक वजा पंधरा असेल त्याचप्रमाणे या दुसऱ्या वर्तुळासाठी आपण जर आपण याचा विचार केला तर  $x$  चौरस अधिक  $y$  वर्ग अधिक दोन  $g$  दोन  $x$  अधिक दोन  $f$  दोन  $y$  अधिक  $c$  दोन समान शून्य तर स्पष्टपणे  $g$  दोन आणि  $f$  दोन हे दोन्ही शून्य आहेत आणि  $c$  दोन वजा एक आहे कारण हे वर्तुळ आपल्याकडील पहिल्या वर्तुळासाठी ऑर्थोगोनल आहे हे वर्तुळ  $s$  या पहिल्या वर्तुळासाठी ऑर्थोगोनल असल्यामुळे

त्याने ऑर्थोगोनॅलिटीचे समीकरण पूर्ण केले पाहिजे जे दोन पट  $g$  गुणा  $g$  एक जे वजा एक अधिक दोन पट  $f$  गुणिले  $f \text{ 1}$  जे 0 आहे ते  $c$  अधिक  $c \text{ 1}$  च्या समान असले पाहिजे जे -15 आहे तर हे मूलतः  $2g$  अधिक  $c$  समान 15 आहे.

म्हणून हे पहिले समीकरण होते हे दुसरे समीकरण आहे  $ah$  आहे त्याचप्रमाणे कारण वर्तुळ देखील दुसऱ्या वर्तुळासाठी ऑर्थोगोनल आहे आमच्याकडे समान प्रकारचे समीकरण दोन  $g$  गुणा  $g$  दोन आहे जे शून्य आहे अधिक दोन  $f$  गुणिले  $f$  दोन जे शून्य समान  $c$  अधिक  $c$  दोन हे तिसरे समीकरण आहे या तिसऱ्या समीकरणातून आपल्याला स्पष्टपणे  $c$  समान एक मिळेल आणि जर आपण ती माहिती या पहिल्या समीकरणात वापरली तर आपल्याला आता  $f$  वजा एक होईल  $c \text{ equ}$  असल्याने  $a \text{ 1}$  ते एक समान  $c$  चा वापर केला तर  $c$  ची  $ah$  माहिती एक च्या बरोबरी आहे यात दुसरे समीकरण आहे  $g$  बरोबर सात तर आपल्याला या वर्तुळ  $s$  चे सर्व पॅरामीटर्स मिळाले आहेत आणि स्पष्टपणे या वर्तुळाचे केंद्र  $s$  आहे.

केंद्र उणे  $g$  स्वल्पविराम उणे  $f$  आहे जे उणे सात आहे कारण  $g$  सात आहे आणि उणे  $f$  एक असेल तर केंद्र उणे सात स्वल्पविराम आहे म्हणजे पर्याय  $c$  बरोबर आहे आणि पर्याय  $d$  चूक आहे आणि त्रिज्या वर्गमूळ बरोबर आहे  $g$  चौरस अधिक  $f$  वर्ग वजा  $c$  चा सात

निघेल

त्यामुळे पर्याय  $b$  बरोबर आहे एक पर्याय  $a$  चुकीचा आहे म्हणून आपण दुसऱ्या समस्येचा विचार करूया म्हणून येथे असे दिले आहे की वर्तुळ स्वल्पविराम  $b$  बिंदूमधून जाते आणि हे वर्तुळ म्हणू देते  $s$  द्वारे दर्शविले जाते आणि ते दुसरे वर्तुळ कापते  $x$  चौरस अधिक  $y$  वर्ग समान  $k$  चौरस ऑर्थोगोनीली नंतर वर्तुळाच्या केंद्राचे स्थान  $s$  हे या चार पर्यायांपैकी एक आहे जे आपल्याला शोधायचे आहे म्हणून आपण केंद्र असे म्हणू या मंडळाचे  $s$   $b$  चला  $sb$  वर्तुळाच्या केंद्राचे समन्वय

$p$  आणि  $q$  म्हणू या मग या वर्तुळाचे समीकरण  $x$  चौरस अधिक  $y$  चौरस वजा  $2px$  वजा दोन  $qy$  अधिक  $c$  शून्य असेल आता असे म्हटले जाते की वर्तुळ  $s$  हा स्वल्पविराम  $b$  या बिंदूतून जातो

त्यामुळे याचा अर्थ असा आहे की हे समीकरण  $x$  समान  $a$  आणि  $y$  समान  $b$  वर समाधानी असले पाहिजे म्हणून एक वर्ग अधिक  $b$  वर्ग वजा दोन  $ap$  वजा दोन  $bq$  अधिक  $c$  हे शून्य आहे प्रथम समीकरण जे आपल्याला मिळते आणि नंतर असे देखील म्हटले जाते की हे विशिष्ट वर्तुळ  $s$  हे दुसऱ्या वर्तुळासाठी ऑर्थोगोनल आहे असे समजू या ज्याचे समीकरण  $x$  चौरस अधिक  $y$  वर्ग वजा  $k$  वर्ग शून्य आहे म्हणून आपण ऑर्थोगोनॅलिटीची स्थिती वापरतो मग आपल्याला काय मिळते 2 गुणिले  $g$  1 गुणिले  $g$  2 आहे.

त्यामुळे या पहिल्या वर्तुळासाठी  $g$  1 चा  $g$  वजा  $p$  आहे म्हणजे दोन पट  $g$  एक गुणिले  $g$  दोन पण इथे  $g$  दोन शून्य आणि नंतर अधिक दोन पट  $f$  एक म्हणजे  $f$  एक उणे  $q$  गुणिले  $f$  दोन म्हणजे शून्य समान  $c$  एक अधिक  $c$  दोन म्हणजे  $c$  एक  $c$  आणि  $c$  दोन वजा  $k$  वर्ग आहे

त्यामुळे ही दोन वर्तुळे ऑर्थोगोनल असल्यामुळे हे समीकरण देखील समाधानी असले पाहिजे म्हणून हे समीकरण मुळात आपण मागील एका स्लाइडमध्ये दोन वर्तुळांमधील ऑर्थोगोनॅलिटीची अट म्हणून दाखवले होते त्यावरून आले आहे.

समीकरण हे स्पष्ट आहे की  $c$  हे  $k$  वर्गाचे समान असणे आवश्यक आहे आणि म्हणून वर्तुळ  $s$  चे समीकरण आहे म्हणून जर आपण ही वस्तुस्थिती समीकरणात वापरली तर आपल्याला काय मिळते ते

म्हणजे वर्तुळ  $s$  च्या मध्यभागी  $p$  आणि  $q$  चे निर्देशांक पूर्ण करणे आवश्यक आहे.

समीकरण  $a$  वर्ग अधिक  $b$  वर्ग वजा दोन  $ap$  वजा दोन  $bq$  अधिक  $k$  वर्ग शून्य किंवा दुसऱ्या शब्दांत, तर याचा मुळात अर्थ असा आहे की वर्तुळ  $s$  च्या मध्यभागी  $p$  आणि  $q$  समन्वय नेहमी हे समीकरण पूर्ण करतात आणि म्हणून स्थान

वर्तुळ  $s$  च्या मध्यभागी एक चौरस अधिक  $b$  चौरस आहे म्हणून आपण असे म्हणूया की आपण म्हणजे हा एक चौरस अधिक  $b$  वर्ग वजा दोन गुणाकार केंद्राच्या  $x$  समन्वयाच्या गुणाकार असेल तर तो  $x$  उणे दोन  $b$   $ti$  असू द्या  $mes$  केंद्राचा  $y$  समन्वय अधिक  $k$  वर्ग शून्य आहे

त्यामुळे केंद्राचे स्थान हे मूलतः हे समीकरण आहे जे प्रत्यक्षात एक सरळ रेषेचे समीकरण आहे कारण ते  $x$  आणि  $y$  दोन्हीमध्ये रेखीय आहे आणि हे दुसरे काहीही नाही तर पहिला पर्याय आहे जो पर्याय  $a$  आहे चला तर मग आपण एका नवीन विषयाकडे वळूया जो दोन वर्तुळांचा मूलगामी अक्ष म्हणून ओळखला जाणारा परिभाषित करत आहे, तर समजा आपल्याला दोन वर्तुळे दिली आहेत तर आपण हे वर्तुळ  $s$  एक आहे असे म्हणू या आणि नंतर येथे दुसरे वर्तुळ आहे.

$s$  दोन आता त्या सर्व बिंदूंचा विचार करा अशा प्रकारे आपण फक्त त्या बिंदूंचा  $p$  विचार करू जसे की या  $p$  पासून दोन्ही वर्तुळांपर्यंतच्या स्पर्शिकेची लांबी समान असेल तर आपण असे म्हणूया की ही दोन वर्तुळे आहेत ज्यांचे केंद्र एक आणि  $o$  आहे.

दोन आणि  $p$  हा असा बिंदू आहे की या बिंदू  $p$  पासून या पहिल्या वर्तुळ  $s$  one पर्यंत

स्पर्शिकेच्या  $pa$  ची लांबी  $p$  पासून दुसऱ्या वर्तुळ  $s$  दोन पर्यंतच्या स्पर्शिकेच्या लांबीएवढी आहे म्हणून फक्त त्या बिंदूंचा विचार करू ज्यासाठी  $pa$  आणि  $pb$  आहेत आहेत या प्रकरणात समान आहे, किमान दिसण्यामध्ये ते  $p$  आणि  $pb$  समान दिसत नाही, म्हणून जर ते समान नसतील तर  $p$  हा  $p$  हा एक मुद्दा मानला जाणार नाही ज्यामध्ये आपल्याला स्वारस्य आहे म्हणून स्थान म्हणजे फक्त नाही एक अद्वितीय बिंदू ज्यामध्ये आहे समान अंतर आहे ज्याच्या दोन्ही वर्तुळांच्या स्पर्शिकेची लांबी समान आहे तेथे अमर्यादपणे अनेक बिंदू आहेत आणि या सर्व बिंदूंचे स्थान आपण लवकरच पाहणार आहोत ही एक सरळ रेषा आहे ज्याला प्रत्यक्षात यापैकी मूलगामी अक्ष म्हणतात.

दोन दिलेली वर्तुळे आहेत

त्यामुळे या मूलगामी अक्षाचे समीकरण कसे काढायचे ते पाहू या जर आपल्याला दोन दिलेल्या वर्तुळांची समीकरणे दिली तर समजा आपल्याकडे दिलेली दोन वर्तुळे  $s$  एक आणि  $s$  दोन आहेत ज्यांची केंद्रे आहेत आणि  $ao$  दोन तर आपण फक्त आहोत आपण नेहमी त्या अह बिंदूंचा विचार करत असतो फक्त त्या बिंदूंचा विचार

करून ज्यांच्यासाठी या दोन्ही वर्तुळांच्या स्पर्शिकेची लांबी समान असते, उदाहरणार्थ जर बिंदू  $p$  हा मूलगामी अक्षावर असेल तर  $th$  ची लांबी  $p$  पासून पहिल्या वर्तुळापर्यंतची स्पर्शिका  $pa$  ची लांबी  $p$  पासून दुसऱ्या वर्तुळापर्यंतच्या स्पर्शिकेच्या लांबीइतकी असली पाहिजे

म्हणून  $pb$  आणि  $pa$  समान असणे आवश्यक आहे म्हणून असे घडण्यासाठी आपण म्हणू की आपल्याला दोन वर्तुळांचे समीकरण खालीलप्रमाणे असावे म्हणून आपल्याला दोन वर्तुळांचे समीकरण दिले आहे आणि आपल्याला मूलगामी अक्षाचे समीकरण शोधावे लागेल आता समजा की दोन वर्तुळांच्या मध्यभागी  $xy$  सह समन्वयक असलेला एक बिंदू  $p$  आहे अर्थातच वजा आहे  $g$  एक वजा  $f$  एक  $n$  वजा  $g$  दोन वजा  $f$  दोन आता हे नव्वद अंश असणे आवश्यक आहे

त्यामुळे लांबी  $pa$  किंवा चौरस लांबी  $pa$  चौरस पायथागोरस प्रमेय वापरून एक  $p$  पूर्ण चौरस आहे कारण हा त्रिकोण  $o$  एक  $ap$  एक उजवा आहे कोन त्रिकोण आपल्याकडे  $pa$  चौरस आहे तो एक  $p$  पूर्ण चौरस वजा एक संपूर्ण चौरस आहे आणि हे पुढे आकडेमोड केल्यास आपण मागील एका व्याख्यानात पाहिल्याप्रमाणे या आह रेषाखंड  $pa$  चे वर्ग अंतर समान होईल 1 ते  $x$  चौरस अधिक  $y$  वर्ग अधिक दोन  $g$  एक  $x$  अधिक दोन  $f$  एक  $y$  अधिक  $c$  एक जेथे  $x$  आणि  $y$  हे या बिंदू  $p$  चे समन्वयक आहेत म्हणून आपण  $x$  आणि  $y$  हे या बिंदू  $p$  चे समन्वयक म्हणून घेतले आहेत.

या चौरसाची लांबी  $pa$  चौरस आणि  $pa$  चौरस जर तुम्हाला आठवत असेल तर

पहिल्या वर्तुळाच्या संदर्भात या बिंदू  $p$  ची शक्ती म्हणतात त्याचप्रमाणे दुसऱ्या वर्तुळाच्या संदर्भात या बिंदू  $p$  ची शक्ती  $pb$  चौरस असेल

जी देखील समान आहे  $x$  चौरस अधिक  $y$  चौरस अधिक ते  $g$  दोन  $x$  अधिक दोन  $f$  दोन  $y$  अधिक  $c$  दोन आता उह साठी  $p$  आणि  $pb$  समान आहेत ते खालीलप्रमाणे  $x$  आणि  $y$  हे निर्देशांक असे असले पाहिजेत की ही अभिव्यक्ती आणि ही अभिव्यक्ती समान आहे हे दोन समान असले पाहिजेत आणि येथून आपल्याला समजले की या बिंदूच्या  $p$  च्या  $x$  आणि  $y$  समन्वयाने 2 मध्ये  $g$  1 वजा  $g$  2 मध्ये  $x$  अधिक 2 मध्ये  $f$  एक वजा  $f$  दोन मध्ये  $y$  अधिक  $c$  एक वजा  $c$  दोन समान समीकरण पूर्ण केले पाहिजे शून्य म्हणून आपण पाहतो की असे सर्व बिंदू ज्यांची शक्ती  $respe$  सह  $ct$  ते दोन दोन्ही वर्तुळे समान आहेत अशा सर्व बिंदूंच्या समन्वयाने हे समीकरण पूर्ण केले पाहिजे जे सरळ रेषेच्या समीकरणाशिवाय दुसरे काहीही नाही आणि या सरळ रेषेला या दोन वर्तुळांचा मूलगामी अक्ष म्हणतात

त्यामुळे आपल्याला असे अनेक बिंदू मिळतील.

जसे  $p$  ला येथे आणखी एक बिंदू मिळेल जसे की ही लांबी आणि ही लांबी समान आहे त्याचप्रमाणे येथे आणखी एक बिंदू असू शकतो जसे की स्पर्शिकेच्या या भागाची लांबी पहिल्या वर्तुळापर्यंत आणि नंतर ही लांबी जो स्पर्शिकेचा भाग आहे दुस-या वर्तुळाला म्हणजे ही आणि ही लांबी सुद्धा समान असेल

त्यामुळे असे असंख्य बिंदू असतील आणि जर तुम्ही सर्व बिंदू जोडले तर ही सरळ रेषा आपल्याला मिळेल ज्याचे समीकरण हे आहे आणि या सरळ रेषेला म्हणतात या दोन वर्तुळांचा मूलगामी अक्ष हे पाहणे फारसे अवघड नाही की जर दोन वर्तुळे एकमेकांना छेदत असतील तर कॉमचे समीकरण आपण आधीच पाहिले आहे.

$mon\ horde$  म्हणून आम्ही पाहिले की शेवटच्या लेखरमध्ये किंवा कदाचित त्याआधीच्या व्याख्यानात सामान्य जीवा हे समीकरण बिंदू आहे आणि छेदनबिंदूच्या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या सरळ रेषेला जोडते आणि आम्ही पाहिले की कॉमन कॉर्डचे समीकरण आहे.

काहीही नाही पण ही अशी परिस्थिती आहे जिथे दोन वर्तुळे एकमेकांना छेदत आहेत म्हणून मागील लेखरसंपैकी एका लेखरमध्ये आपण आधीपासून सामान्य गाभ्याचे समीकरण हे विशिष्ट समीकरण असल्याचे पाहिले आहे परंतु नंतर हे मूलगामी अक्षाच्या समीकरणाशिवाय दुसरे काहीही नाही

म्हणून जेव्हा दोन वर्तुळ मूलगामी अक्षांना छेदतात तेव्हा ती सामान्य जीवा नसून आपल्याला ती दोन्ही दिशांनी पुढे वाढवायची असते, दुसरी परिस्थिती अशी असू शकते जेव्हा दोन वर्तुळे एका बिंदूवर एकमेकांना स्पर्श करतात आणि अशा परिस्थितीत कोणी दर्शवू शकतो की मूलगामी अक्ष आहे या दोन वर्तुळांमधील आडवा सामाईक स्पर्शिकेशिवाय काहीही नाही ज्याचे समीकरण त्या बाबतीत असेल ते या समीकरणासारखेच

असेल जर आपण परत गेलो तर मूलगामी अक्षाचे हे समीकरण मग ते फारसे नाही म्हणून मूलगामी अक्षाचे समीकरण हे समीकरण होते म्हणून उतार हा या सरळ रेषेचा उतार आहे मूलगामी अक्षाच्या उतारासाठी जी सरळ रेषा आहे जी एक वजा  $g$  चे वजा आहे दोन बाय  $f$  एक वजा  $f$  मूलगामी अक्षाचा दोन उतार दोन वर्तुळांपैकी

एक आणि  $o$  दोन केंद्रांना जोडणाऱ्या रेषेचा उतार

$f$  दोन वजा  $f$  एक बाय  $g$  दोन वजा  $g$  एक आता या दोन उतारांचा गुणाकार घेतला तर आपण हे पहा की गुणाकार वजा एक आहे ते मूलतः आम्हाला सांगते की मूलगामी अक्ष हा दोन वर्तुळांच्या केंद्रांना जोडणाऱ्या रेषेला नेहमी लंब असतो कारण आता आम्हाला माहित आहे की कोणत्याही दोन वर्तुळांमधील मूलगामी अक्षाचा अर्थ आता परिभाषित केला जाईल.

कोणत्याही तीन वर्तुळांचे मूलगामी केंद्र म्हणून ओळखले जाते, म्हणून समजा आपल्याला अशी तीन वर्तुळे दिली आहेत, तर आपण असे म्हणू की केंद्रांचे समीकरण एक  $o$  दोन आणि  $o$  तीन वर आहे आणि आपण असे म्हणूया की समीकरणाचे समीकरण पहिले वर्तुळ हे  $s$  एक शून्य बरोबर आहे म्हणून ते मुळात पहिल्या वर्तुळाचे समीकरण  $x$  चौरस अधिक  $y$  चौरस अधिक दोन  $g$  एक  $x$  अधिक दोन  $f$  वन  $y$  अधिक  $c$  एक शून्य समान असेल त्याचप्रमाणे आपल्याकडे इतर दोनसाठी समान समीकरणे असतील वर्तुळ आणि तिसऱ्या वर्तुळासाठी म्हणून हे  $g$  तीन म्हणजे  $x$  चौरस अधिक  $y$  चौरस अधिक दोन  $g$  तीन  $x$  अधिक दोन  $f$  तीन  $y$  अधिक  $c$  तीन समान शून्य म्हणून आपण असे म्हणूया की ही तीन समीकरणे आपल्याला दिली आहेत आणि आपल्याला विचारले जाईल मूलतः तीन वर्तुळांच्या मूलगामी केंद्राचा अर्थ काय आहे ते परिभाषित करेल म्हणून आम्हाला आधीच माहित आहे की पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्तुळातील मूलगामी प्रवेशाचे समीकरण ही एक सरळ रेषा आहे म्हणून ही सरळ रेषा तिसऱ्या वर्तुळाच्या मध्यभागी जाण्याची गरज नाही.

हे फक्त हे फक्त एक उदाहरण आहे म्हणून ते तिसऱ्या वर्तुळाच्या मध्यभागी जाण्याची गरज नाही म्हणून हा पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्तुळातील मूलगामी अक्ष आहे ज्याचे समीकरण मुळात  $s$  एक समान  $s$  दोन किंवा  $s$  वर आहे  $e$  उणे  $s$  दोन बरोबरीचे शून्य त्यामुळे येथून  $s$  1 उणे  $s$  2 बरोबर 0

असे समीकरण असेल

त्यामुळे हे समीकरण आपण मागील स्लाइडमध्ये पाहिलेले असेल असे असेल

त्यामुळे  $s$  एक आणि  $s$  दोन मधील मूलगामी अक्ष असेल समीकरण 2 वेळा  $g$  1 वजा  $d$  2  $x$  अधिक 2 वेळा  $f$  1 वजा  $f$  2  $y$  अधिक  $c$  एक वजा  $c$  दोन समान शून्य आणि त्याचप्रमाणे पहिल्या आणि तिसऱ्या वर्तुळात  $s$  एक आणि  $s$  तीन दरम्यान मूलगामी अक्ष असेल तर चला ते येथे या हिरव्या रेषेने दाखवले आहे, म्हणजे पहिल्या आणि तिसऱ्या वर्तुळातील हा मूलगामी अक्ष आहे आणि या मूलगामी अक्षाचे समीकरण मुळात  $s$  एक वजा  $s$  तीन समान शून्य असेल जे दोन गुणा  $g$  1 वजा असेल  $g$  3 वेळा  $x$  अधिक 2 वेळा  $f$  1 वजा  $f$  3 पट  $y$  अधिक  $c$  1 वजा  $c$  तीन बरोबरीचे शून्य आपण त्याला  $c$  म्हणतो पुढीलमध्ये आपण दर्शवू की दुसऱ्या आणि तिसऱ्या वर्तुळातील मूलगामी अक्ष प्रत्यक्षात जाईल व्या च्या मूलगामी अक्षाच्या छेदनबिंदूच्या या बिंदूद्वारे  $e$  आपण आधीच पाहिलेले दोन मूलगामी अक्ष असे काहीतरी असतील म्हणून मी लाल रंगात जे काढले आहे ते दुस-या आणि तिसऱ्या वर्तुळातील मूलगामी अक्ष आहे त्यामुळे खरेतर वर्तुळाच्या तीन जोड्यांमधील तीन मूलगामी अक्ष किंवा तिन्ही आहेत.

हे एका बिंदूवर समवर्ती आहेत ज्याला आपण  $c$  ने दर्शविले आहे आणि या  $c$  ला नंतर या तीन वर्तुळांचे मूलगामी केंद्र म्हटले जाते परंतु

आपण प्रथम हे दर्शवले पाहिजे की द्वितीय आणि तृतीय वर्तुळातील मूलगामी अक्ष खरोखरच छेदनबिंदूमधून जाईल.

निव्व्या आणि हिरव्या रंगातील पहिल्या दोन मूलगामी अक्षांपैकी

$s$  one आणि  $s$  दोन मधील मूलगामी अक्षांचे समीकरण जे आपण निव्व्या रेषेत काढले होते त्याचप्रमाणे  $s$  one आणि  $s$  3 मधील मूलगामी अक्षांचे समीकरण आहे आणि मूलगामी अक्षांचे समीकरण आहे.

दुसरे आणि तिसरे वर्तुळ यांच्यातील मूलगामी अक्षांचे समीकरण आहे म्हणून ही तीन भिन्न वर्तुळांच्या जोड्यांसाठी तीन मूलगामी अक्षांची समीकरणे आहेत

आता आपण पाहिले की हे दोन मूलांक 1 अक्ष एका बिंदूवर छेदत होते  $c$  आता सरळ रेषांवरील व्याख्यानांमधून आपल्याला हे समीकरण आधीच माहित आहे म्हणून समजा आपल्याकडे दोन सरळ रेषा असतील तर 1 एक शून्य  $n_1$  दोन समान शून्य तर ही दोन सरळ रेषा समीकरणे आहेत जी  $c$  बिंदूला छेदतो मग आपल्याला कळते की

या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या सरळ रेषांचे कुटुंब  $c$  या सामान्य समीकरणाने दिलेले आहे 1 एक अधिक लॅम्बडा गुणिले 1 दोन समान शून्य जेथे लॅम्बडा आहे लॅम्बडा ही कोणतीही वास्तविक संख्या असू शकते आपण भिन्न मूल्ये निवडतो  $\lambda$  ला वेगवेगळ्या सरळ रेषा मिळतील परंतु नंतर या सर्व सरळ रेषा लॅम्बडाच्या वास्तविक मूल्याचे कितीही मूल्य असले तरीही आपण या फॉर्मच्या या सर्व सरळ रेषा या दोन सरळ रेषांच्या छेदनबिंदूमधून जातात म्हणून हे आपल्याला आधीच माहित आहे म्हणून हे लागू करणे आपल्या बाबतीत तर आपण असे म्हणूया की ही पहिली ओळ आहे 1 एक समान शून्य आणि ही आहे ही दुसरी ओळ आहे 12 समान 0 आणि त्या दोन्ही  $\int$  या बिंदूवर  $c$  वर उभे करा मग सरळ रेषांच्या कुटुंबाचे समीकरण स्पष्टपणे स्पष्ट करा म्हणजे कोणतीही सरळ रेषा जी छेदनबिंदू  $c$  या बिंदूतून जाते ती नेहमी या स्वरूपात लिहिली जाऊ शकते 1 एक अधिक लॅम्बडा 1 दोन समान शून्य म्हणजे 1 एक आहे अधिक लॅम्बडा वेळा 1 दोन आहे म्हणून 1 एक अधिक लॅम्बडा 1 दोन शून्य आहे म्हणून कोणत्याही लॅम्बडा साठी कोणत्याही वास्तविक लॅम्बडा हे देखील काही सरळ रेषेचे समीकरण आहे परंतु ही सरळ रेषा जी आपण येथे लिहिली आहे ती छेदनबिंदूच्या बिंदूमधून जाईल

हे आणि हे दोन मूलगामी अक्ष

जे आपण  $c$  ने दर्शविले आहे जर आपण लॅम्बडा उणे 1 च्या बरोबरीने घेतला तर आपल्याला एक विशिष्ट सरळ रेषा मिळेल जी दिलेली आहे ज्याचे समीकरण इतके स्पष्टपणे दिले आहे जरी आपण लॅम्बडा च्या बरोबरीने घेतले तरीही वजा एक म्हणजे आपल्याला एक सरळ रेषा मिळेल जी  $c$  मधून जाईल आणि ती सरळ रेषा दोन पट आहे  $g$  एक वजा  $d$  दोन मध्ये  $x$  अधिक वजा एक पट शून्य आहे आणि जर आपण हे सरळ रेषेचे समीकरण सोपे केले तर आपल्याला  $t$  मिळेल.

$w_0$  इन  $g$  श्री वजा  $g$  दोन मध्ये  $x$  अधिक दोन मध्ये  $f$  तीन वजा  $f$  दोन मध्ये  $y$  अधिक  $c$  तीन वजा  $c$  दोन बरोबर शून्य पण नंतर हे समीकरण म्हणून हे समीकरण म्हणजे एका सरळ रेषेचे समीकरण आहे जे छेदनबिंदू  $c$  च्या त्या बिंदूतून जाते या दोन मूलगामी अक्षांचा

त्यामुळे या दोन मूलगामी अक्षांचा छेदनबिंदू  $c$

पण नंतर ही सरळ रेषा काहीही नसून ती दुसऱ्या आणि तिसऱ्या वर्तुळातील तिसऱ्या मूलगामी अक्षासारखीच आहे

त्यामुळे हे समीकरण या समीकरणासारखेच आहे

त्यामुळे हे वर्तुळ

$s$  दोन आणि  $s$  तीन मधील मूलगामी अक्षांशिवाय दुसरे काहीही नाही आणि आपल्याला आधीच माहित आहे की पहिल्या दोन मूलगामी अक्षांचा छेदनबिंदू या सरळ रेषेवर आहे आणि म्हणून हे स्पष्ट आहे की तिसऱ्या जोडीमधील मूलगामी अक्ष जो  $s$  दोन आहे आणि  $s$  तीन देखील पहिल्या दोन मूलगामी अक्षांच्या छेदनबिंदूमधून जातात मूलतः याचा अर्थ असा आहे की हे तीनही मूलगामी अक्ष एका बिंदूवर  $c$  आणि  $thi$  वर समवर्ती आहेत त्यानंतर  $s$  बिंदूला तीन वर्तुळांचे मूलगामी केंद्र म्हटले जाते,

पुढील व्याख्यानात आपण वर्तुळांच्या कुटुंबाचे समीकरण कसे काढायचे याबद्दल चर्चा करू, उदाहरणार्थ

दोन दिलेल्या वर्तुळांच्या छेदनबिंदूतून जाणाऱ्या सर्व वर्तुळांचे समीकरण किंवा कुटुंब किंवा किंवा सर्व वर्तुळांचे समीकरण जे दिलेल्या

वर्तुळांच्या छेदनबिंदू आणि दिलेल्या सरळ रेषेतून जातात

त्यामुळे आपण हे पुढील व्याख्यानात पाहू.

धन्यवाद