

આઠ વર્તુળો પર વ્યાખ્યાન આપવા માટે આપનું સ્વાગત છે

તેથી છેલ્લા લેક્ચરમાં આપણે આપેલા કોઈપણ બે વર્તુળોના સામાન્ય સ્પર્શકોના સમીકરણ માટેના સમીકરણો મેળવ્યા હતા તેથી આ ચોક્કસ વ્યાખ્યાનમાં આપણે તે વિષય પર કેટલીક સમસ્યાઓ હલ કરીશું

અને પછી આપણે ઝડપથી ઉકેલીશું.

એક નવા વિષય પર આગળ વધો જે મૂળભૂત રીતે કંઈક વ્યાખ્યાયિત કરે છે જે કોઈપણ બે આપેલ વર્તુળો વચ્ચે આંતરછેદના કોણ તરીકે ઓળખાય છે તે

બે છેદતા નમૂનાઓના સામાન્ય ટોળાનું સમીકરણ પણ મેળવશે

તેથી યાલો આ વિષય પર કેટલીક સમસ્યાઓ સાથે ઝડપથી પ્રારંભ કરીએ.

આપણે છેલ્લા લેક્ચરમાં ચર્ચા કરી

તેથી યાલો આ પ્રશ્ન પહેલા જોઈએ જ્યાં તે બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ શોધવા માટે કહેવામાં આવે છે કે જેના પર વર્તુળો છે

તેથી અમને બે વર્તુળો આપવામાં આવ્યા છે આ પ્રથમ વર્તુળનું સમીકરણ છે

તેથી  $x$  ચોરસ વત્તા  $y$  ચોરસ માફ  $x$  ચોરસ વત્તા  $y$  ચોરસ ઓછા ચાર  $x$  ઓછા બે  $y$  વત્તા ચાર બરાબર શૂન્ય

તેથી આ પહેલું વર્તુળ છે અને બીજું વર્તુળ સમીકરણ  $x$  ચોરસ વત્તા  $y$  ચોરસ માઈનસ દ્વારા આપવામાં આવ્યું છે બાર  $x$  ઓછા

આઠ વાય વત્તા છત્રીસ બરાબર શૂન્ય

તેથી અમને આ બે વર્તુળો એકબીજાને સ્પર્શે છે તે બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ શોધવા માટે કહેવામાં આવે છે અને આ બે વર્તુળોના

ટ્રાંસવર્સ સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ પણ શોધે છે

તેથી સમસ્યાનું નિવેદન ખૂબ સ્પષ્ટ છે બે વર્તુળો છે અને એવું કહેવાય છે કે તેઓ એકબીજાને સ્પર્શે છે અને તે કિસ્સામાં અમને તેઓ

એકબીજાને સ્પર્શે છે તે બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ શોધવાનું કહેવામાં આવે છે અને પછી આગળ અમને આ બે વચ્ચેના ત્રાંસી સામાન્ય

સ્પર્શકનું સમીકરણ શોધવાનું કહેવામાં આવે છે.

વર્તુળો આને સમજાવવા માટે આહ આને ભૌમિતિક રીતે કરવાનો પ્રયાસ કરીએ

તેથી આને  $y$  અક્ષ રહેવા દો અને આ  $x$  અક્ષ રહેવા દો આ મૂળ છે

તેથી પ્રથમ વર્તુળ જે આ વર્તુળ છે આમાં સ્પષ્ટપણે આહ કેન્દ્ર છે જે બે અલ્પવિરામ પર છે એક કારણ કે આહ આ ચોક્કસ શબ્દ વત્તા

બે  $gx$  છે અને આ વત્તા બે  $fy$  છે

તેથી  $g$  એ માઈનસ બે  $f$  છે માઈનસ એક અને આપણે જાણીએ છીએ તે કેન્દ્ર માઈનસ  $g$  માઈનસ  $f$  પર છે જે બે અલ્પવિરામ

એક છે

તેથી આપણે આ વર્તુળને  $c$  વન વડે દર્શાવીશું અને ત્રિજ્યા અલબત્ત  $g$  ચોરસ વત્તા  $f$  ચોરસ ઓછા  $c$  ના  $g$  ચોરસ વર્ગમૂળની

બરાબર છે

તેથી આ માટે આપણે જાણીએ છીએ કે  $g$  ઓછા  $2f$  છે ઓછા એક  $c$  છે

તેથી આ માઈનસ બે સ્કવેર હશે જે બે સ્કવેર વત્તા એક સ્કવેર માઈનસ ફોર જેટલો જ છે આ એક થશે એટલે કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા જોતાં

આપણે પહેલું વર્તુળ બનાવી શકીએ છીએ જેથી કેન્દ્ર અહીં પર છે અને ત્રિજ્યા એક છે અને

તેથી ત્રિજ્યા એક છે વર્તુળ કંઈક આના જેવું દેખાશે તે જ રીતે આપણે બતાવી શકીએ કે બીજા વર્તુળ માટે કેન્દ્ર છ અલ્પવિરામ ચાર

હશે અને ત્રિજ્યા ચાર હશે

તેથી આ બીજા વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને ત્રિજ્યા ચાર એક છે આ બીજી બાજુએ પણ વર્તુળ કંઈક આવું જ હશે જે હું દોરતો નથી તો

ઓછામાં ઓછું ભૌમિતિક રીતે એવું લાગે છે કે તેઓ એકબીજાને છેદે છે એવું લાગે છે કે તેઓ આ બિંદુએ એકબીજાને સ્પર્શી રહ્યા છે

પરંતુ તે ચકાસવું પણ બહુ મુશ્કેલ નથી.

તેથી જો વર્તુળો જો બે વર્તુળો એકબીજાને સ્પર્શતા હોય તો તે સાચું હોવું જોઈએ કે કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાના સરવાળા

જેટલું હોવું જોઈએ,

તેથી આ બે કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર છ ઓછા બે સંપૂર્ણના વર્ગમૂળ જેટલું છે.

ચોરસ વત્તા ચાર ઓછા એક આખો ચોરસ જે પાંચ થાય છે અને જો તમને યાદ હોય કે પહેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા એક હતી અને બીજા

વર્તુળ માટે ચાર હતી

તેથી જ્યારે આપણે તેમને ઉમેરીએ છીએ ત્યારે આપણે તેમને ઉમેરીએ છીએ ત્યારે આપણે ત્રિજ્યામાંથી કેટલીક પાંચ થાય છે જે

વર્તુળોના બે કેન્દ્રો વચ્ચેના અંતરની બરાબર છે જેનો અર્થ છે કે આ બે વર્તુળો બરાબર એક બિંદુને સ્પર્શે છે

તેથી યાલો આ બે કેન્દ્રોને જોડતી રેખા છે

તેથી અમને આ બિંદુનું સંકલન શોધવાનું કહેવામાં આવ્યું કે જ્યાં આ બે વર્તુળો એકબીજાને સ્પર્શે છે અને તે બહુ મુશ્કેલ નથી કારણ કે

ધારો કે આપણે કહીએ કે આ ચોક્કસ બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ જ્યાં છેદે છે તે  $xy$  છે તો તે સ્પષ્ટ છે કે આ  $x$  અને  $y$   $s$  જ જોઈએ આ

બંને સમીકરણોને સંતોષી કારણ કે આ બિંદુ બંને વર્તુળો પર આવેલું છે અને તે બંને સમીકરણોને સંતોષવા માટે હોવાથી તે

સમીકરણોના તફાવતને પણ સંતોષવા જ જોઈએ

તેથી મારો કહેવાનો અર્થ એ છે કે આ બે વર્તુળોના સંપર્ક બિંદુના સંકલનને કારણે  $x$  અને  $y$  એ બે સમીકરણોને સંતોષવા જ જોઈએ

બે વર્તુળોના સમીકરણો જે નીચે મુજબ છે અને

તેથી જો આપણે તેને બાદ કરીએ તો આપણને શું મળે છે

તેથી આ બિંદુ  $x$  અલ્પવિરામ  $y$  એ પણ આ સમીકરણને સંતોષવું જોઈએ અથવા આપણે ચાર  $x$  વત્તા ત્રણ  $y$  ને સરળ બનાવી

શકીએ.

સોળ બરાબર છે આ હકીકતમાં આ સમીકરણ છે

તેથી તે આ સમીકરણ દ્વારા સંતુષ્ટ હોવું જોઈએ આ બિંદુથી સંતુષ્ટ થવું જોઈએ હવે આપણે જાણીએ છીએ કે કેન્દ્રોને જોડતી આ ચોક્કસ રેખાનું સમીકરણ જાણીતું છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે આ બિંદુ  $xy$  પણ આના પર રહે છે રેખા રેખા કેન્દ્રોને જોડતી હોય છે અને

તેથી તે સાચું હોવું જોઈએ કે

તેથી આ રેખાનો ઢોળાવ 4 ઓછા 1 ભાગ્યા 6 ઓછા 2 જે 3 બાય 4 છે જે  $y$  ઓછા એક  $s$  ની બરાબર હોવો જોઈએ.

o આ રેખાનો ઢોળાવ આ રેખાખંડના ઢોળાવ જેવો જ હોવો જોઈએ કારણ કે અનિવાર્યપણે તેઓ સમાન રેખા  $y$  માઈનસ વનના ભાગ્યા  $x$  ઓછા બેના સેગમેન્ટ્સ છે

તેથી કોઓર્ડિનેટ્સ  $x$  અને  $y$  એ બીજા સમીકરણને પણ સંતોષવા જોઈએ અને આહ આ સમીકરણ આપણે તેને નીચે લખી શકીએ છીએ ત્રણ  $x$  ઓછા છ બરાબર ચાર બાય વાય ઓછા ચાર જે જરૂરી છે કે આપણી પાસે ત્રણ  $x$  બરાબર ચાર  $y$  વત્તા બે છે અને પછી આપણે ફક્ત આ બે સમીકરણોને હલ કરવાની જરૂર છે

તેથી આ બે સમીકરણોને હલ કરીને અહીં આ ચોક્કસ બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ મળશે અને તે બહુ મુશ્કેલ નથી

તેથી અમે શું કરી શકીએ છીએ તમે આ સમીકરણને ચાર વડે ગુણાકાર કરી શકો છો અમે મેળવીએ છીએ અમે આ સમીકરણને ત્રણ વડે ગુણીએ છીએ અમને નવ  $x$  એટલે બાર  $y$  વત્તા છ મળે છે અને પછી અમે આ ઉમેરીશું બે સમીકરણો આપણને પચીસ  $x$  સિત્તેર મળે છે જેનો અર્થ થાય છે  $x$  પચીસ પર સિત્તેર બરાબર છે અથવા જે ચૌદ બાય પાંચ સમાન છે અને પછી  $y$  સંકલન ખૂબ જ સરળ છે કારણ કે આપણે અહીં આ  $x$  મૂલ્યનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ અને આપણે  $y$  કોઓર્ડિનેટ મેળવી શકીએ

તેથી  $y$  કોઓર્ડિનેટ 3  $y$  હશે અહીંથી 16 ઓછા 4  $x$  હશે જેથી તે 16 ઓછા 4 ગુણ્યા 14 બાય 5 જે 56 બાય 5 થાય એટલે 3 $y$  બરાબર થશે 24 બાય 5.

તેથી  $y$  આઠ બાય પાંચ હશે

તેથી સંપર્ક બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ હવે જ્યાં  $c1$  અને  $c2$  એકબીજાને સ્પર્શે છે તે બિંદુ ચૌદ બાય પાંચ અલ્પવિરામ આઠ બાય પાંચ છે તેથી તેઓ જ્યાં એકબીજાને સ્પર્શે છે તે બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ છે ચૌદ બાય પાંચ અલ્પવિરામ આઠ બાય પાંચ

તેથી પરંતુ તે પ્રશ્નનો માત્ર એક ભાગ ઉકેલે છે કારણ કે તે અમને પણ કહેવામાં આવ્યું હતું કે

અમને ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટનું સમીકરણ શોધવાનું પણ કહેવામાં આવ્યું હતું

તેથી ચાલો હું દોરું જેથી ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટ મૂળભૂત રીતે આહ છે આના જેવી સ્પર્શક જે બંને વર્તુળોની સ્પર્શક છે

તેથી સમાન સ્પર્શક આ પ્રથમ વર્તુળ તેમજ બીજા વર્તુળ માટે સ્પર્શક છે

તેથી દેખીતી રીતે તે વર્તુળના બે કેન્દ્રોને જોડતી આ રેખાને લંબરૂપ હોવી જોઈએ

જેથી તે કંઈક બનો આની જેમ  $ng$

તેથી તે કાળા રંગમાં દોરેલી આ સીધી રેખાને લંબરૂપ હશે

અને તે સંપર્કના આ બિંદુમાંથી પણ પસાર થશે તે કોઓર્ડિનેટ્સ અમે હમણાં જ શોધી કાઢ્યા છે

તેથી આ લીલી રેખા મૂળભૂત રીતે ત્રાંસી સામાન્ય સ્પર્શક છે અને આપણે જે સમીકરણ કરીએ છીએ તે શોધવા માટે વધારે કંઈ કરવાની જરૂર નથી કારણ કે જો આપણે પાછળ જઈએ તો આ વર્તુળના કેન્દ્રોને જોડતી રેખાનું સમીકરણ હવે અને જો તમે જોશો તો આ રેખા ઢોળાવનો ઢોળાવ ત્રણ બાય ચાર જેટલો છે જે આપણી પાસે પહેલેથી જ હતો.

હવે અહીં ગણતરી

કરીએ છીએ કે કેન્દ્રોને જોડતી આ રેખાની લંબ રેખાનો ઢાળ માઈનસ ચાર બાય ત્રણ હશે કારણ કે આપણે જાણીએ છીએ કે બે લંબ રેખાઓના ઢોળાવનું ઉત્પાદન માઈનસ એક છે

તેથી આપણે જાણીએ છીએ કે આનો ઢોળાવ હોવો જોઈએ.

માઈનસ ચાર બાય ત્રણ માં અને રસપ્રદ વાત એ છે કે જો આપણે આ સમીકરણને અહીં જોઈએ તો આ પણ અમુક સીધી રેખાનું સમીકરણ છે કારણ કે તે  $x$  અને  $y$  માં એક ડિગ્રી એક સમીકરણ છે

તેથી આ  $a$  રજૂ કરે છે સીધી રેખા સીધી રેખાનો ઢાળ પણ માઈનસ ચાર બાય ત્રણ છે અને આપણે પહેલાથી જ જાણીએ છીએ કે સંપર્કનો આ બિંદુ આ સમીકરણને સંતોષે છે સંપર્ક બિંદુ પણ સ્પર્શક પર છે અને

તેથી તે સ્પષ્ટ છે કે આ આહનું સમીકરણ આ લીલી સ્પર્શક અથવા ત્રાંસી સામાન્ય સ્પર્શક એ આ સીધી રેખા સમીકરણ સિવાય બીજું કંઈ નથી કારણ કે આ સીધી રેખા સમીકરણનો ઢાળ પણ માઈનસ 4 બાય 3 વત્તા આ બિંદુ  $xy$  જે સ્પર્શક પર છે તે આ બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સને સંતોષે છે તે આ સમીકરણને સંતોષે છે

તેથી સમીકરણ

બંને વર્તુળોની ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટની ચાર  $x$  વત્તા ત્રણ  $y$  બરાબર સોળ છે જેથી કરીને પ્રથમ સમસ્યાનો ઉકેલ પૂરો થાય અને અહીં તમે વિચારી રહ્યા હશો કે કેમ કે આ સમસ્યામાં આપણે જે જોયું તે રસપ્રદ રીતે ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટનું સમીકરણ હતું.

આમાં આ દૃશ્યમાં જ્યાં બે વર્તુળો એકબીજાને સ્પર્શે છે તે સમકક્ષના તફાવત સિવાય બીજું કંઈ નથી બે વર્તુળોની બાબતો પરંતુ શું તે સામાન્ય રીતે સાચું છે અથવા કદાચ આ સંખ્યાઓ સાથેના આ વિશિષ્ટ ઉદાહરણ માટે તે માત્ર નસીબ દ્વારા જ હતું

તેથી તે તારણ આપે છે કે આ સામાન્ય રીતે સાચું છે

તેથી હું તે પરિણામને ઝડપથી રજૂ કરું છું

તેથી ચાલો કહીએ કે અમારી પાસે છે અહીં બે વર્તુળો જે આ બિંદુને સ્પર્શે છે અને ચાલો કહીએ કે આ આ બે વર્તુળોના કેન્દ્રો છે અને તેઓ આ બિંદુએ સ્પર્શે છે ચાલો આપણે કહીએ કે તેથીનું સમીકરણ આ પ્રથમ વર્તુળ છે

તેથી પ્રથમ

તેથી વર્તુળનું સમીકરણ તે પ્રથમ વર્તુળને  $s$  એક દ્વારા રજૂ કરે છે

તેથી આ પ્રથમ વર્તુળનું સમીકરણ છે માફ કરશો

તેથી હું અહીં કંઈક બીજું વાપરીશ હું કેન્દ્રો માટે  $o$  એક અને  $o$  બે કહીશ કારણ કે હું સમીકરણમાં  $c$  one અને  $c$  બે નો ઉપયોગ કરીશ આ બે વર્તુળો એટલે કેન્દ્રો એક અને ઓ બે છે

તેથી આ પહેલું વર્તુળ  $s$  એક આ બીજું વર્તુળ  $s$  બે છે આ પહેલા વર્તુળનું સમીકરણ છે અને આ બીજા વર્તુળનું સમીકરણ છે તો હવે અમને શું પૂછવામાં આવે છે શોધવાનું છે ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટનું સમીકરણ બહાર કાઢો જે મેં લીલા રંગમાં દોર્યું છે

તેથી દેખીતી રીતે આ બે વર્તુળોના કેન્દ્રો માઈનસ  $g$  એક અલ્પવિરામ ઓછા  $f$  એક કેન્દ્ર એક સાથે પ્રથમ વર્તુળ માટે અને બીજા વર્તુળ માટે કેન્દ્ર  $o$  બે માઈનસ  $g$  છે બે ઓછા  $f$  બે અને આ બે કેન્દ્રોને જોડતી સીધી રેખા છે આ સંપર્ક બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સને  $x$  અલ્પવિરામ  $y$  થવા દો પછી તે સ્પષ્ટ છે કે આ  $x$  અલ્પવિરામ  $y$  હવે આ બંને સમીકરણોને સંતોષે છે કારણ કે તે આ બંને

સમીકરણોને સંતુષ્ટ કરે છે તે પણ સંતુષ્ટ થવું જોઈએ આ સમીકરણોનો તફાવત

તેથી જો હું તફાવત લઉં તો મને જે મળે છે તે છે  $2$  માં  $g$   $1$  ઓછા  $g$  બે માં  $x$  વત્તા બે માં  $f$  એક ઓછા  $f$  બે માં  $y$  વત્તા  $c$  એક ઓછા  $c$  બે બરાબર શૂન્ય

તેથી સંપર્કના આ બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ  $x$  અલ્પવિરામ  $y$  આ સમીકરણને સંતોષે છે જે વાસ્તવમાં આ એક સીધી રેખા સમીકરણ છે આ મૂળભૂત રીતે કેટલીક સીધી રેખાનું સમીકરણ છે અમે બતાવીશું કે આ સમીકરણ ટ્રાન્સના સમીકરણ સિવાય બીજું કંઈ નથી શ્લોક સામાન્ય સ્પર્શક

તેથી એક વસ્તુ જે આપણે જાણીએ છીએ કે સંપર્ક  $xy$  નો આ બિંદુ ટ્રાંસવર્સ સામાન્ય સ્પર્શક પર રહેલો છે અને આ  $xy$  આ સમીકરણને સંતોષે છે પરંતુ જે તપાસવાની જરૂર છે તે છે કે શું આ સમીકરણનો ઢોળાવ જો આ સમીકરણ હોવું જરૂરી છે આ સ્પર્શકનો આ સમીકરણનો ઢોળાવ આ સ્પર્શકના ઢોળાવ જેટલો હોવો જોઈએ હવે બે કેન્દ્રોને જોડતી રેખાનો ઢોળાવ  $f$  એક ઓછા  $f$  બે બાય  $g$  એક ઓછા  $g$  બે જેટલો છે કારણ કે આના કોઓર્ડિનેટ્સમાંથી નીચે મુજબ છે.

બે કેન્દ્રો

તેથી આ હવે બે વર્તુળોના કેન્દ્રોને જોડતી રેખાનો ઢોળાવ છે

કારણ કે સ્પર્શક  $90$  અંશ પર છે, આ ઢોળાવ સાથેના સ્પર્શકના ઢોળાવનું ઉત્પાદન માઈનસ એક હોવું જોઈએ અને

તેથી ઢાળ સ્પર્શકનો માઈનસ  $g$  એક ઓછા  $g$  બે બાય  $f$  એક ઓછા  $f$  બે હવે જો આપણે પાછા જઈએ અને આ રેખા સમીકરણ અહીં જોઈએ તો તે સ્પષ્ટ છે કે આ રેખાનો ઢોળાવ પણ માઈનસ  $g$  એક ઓછા  $g$  બે બાય  $f$  એક માઈનસ બરાબર છે.

$f$  બે અને આ બતાવે છે કે સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ એ બીજું કંઈ નથી પરંતુ આ સમીકરણ જે મૂળભૂત રીતે બે વર્તુળોના સમીકરણોનો તફાવત છે

તેથી ચાલો આપણે બે વર્તુળો વચ્ચેના સામાન્ય સ્પર્શકને લગતી બીજી સમસ્યા લઈએ

તેથી આ આગળની સમસ્યામાં તે આપેલ છે.

બે વર્તુળો  $c$  એક અને  $c$  બે એકમ ત્રિજ્યાના દરેક કેન્દ્રો એકબીજાથી  $e$  એકમના અંતરે છે, ચાલો  $p$  એ કેન્દ્ર  $c$  એક અને  $c$  બે સાથે જોડાતા રેખાખંડનો મધ્યબિંદુ છે અને  $c$  એક વર્તુળ છે

તેથી જોડાય છે.

હવે  $c$  ના કેન્દ્રો આ બે વર્તુળોને બાહ્ય રીતે સ્પર્શતું બીજું વર્તુળ છે પણ તે એવી રીતે સ્પર્શે છે કે  $c$  એક અને  $c$  માટે સામાન્ય સ્પર્શક  $p$  માંથી પસાર થાય છે

તેથી આ સામાન્ય સ્પર્શક પણ  $c$  બે અને  $c$  ની સામાન્ય સ્પર્શક છે.

તો આ પ્રશ્નમાં શું કહેવામાં આવ્યું છે કે આપણી પાસે એકમ ત્રિજ્યા  $c$  એક અને  $c$  બે ના બે વર્તુળો છે જેમ કે અહીં દોરવામાં આવ્યું છે ચાલો કહીએ કે એક અને  $o$  બે કેન્દ્રો છે અને બે કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર  $e$  એકમ છે મધ્યબિંદુ  $de$  છે આ રેખાખંડનો નોંધાયેલ મધ્યબિંદુ એક  $o$  બે બિંદુ  $p$  દ્વારા સૂચવવામાં આવે છે અને પછી એવું કહેવાય છે કે બીજું વર્તુળ  $c$  છે જે આ વર્તુળ  $c$  એક અને  $c$  બે બંનેને સ્પર્શે છે

તેથી આને વર્તુળ  $c$  રહેવા દો અને તે આ બિંદુએ  $c$  એકને સ્પર્શે છે અને આ બિંદુએ  $c$  બે અને ચાલો કહીએ કે ચાલો કહીએ કે આ આ મોટા વર્તુળ  $u$  વર્તુળ  $c$  નું કેન્દ્ર  $o$  છે

તેથી જો આપણે આ કેન્દ્રોને સીધી રેખાથી જોડીએ તો આ સીધી રેખા દેખીતી રીતે સંપર્કના આ બિંદુમાંથી પસાર થશે અથવા બિંદુ જ્યાં આ બે વર્તુળો સ્પર્શ કરે છે તે જ રીતે એક અને ઓ ને જોડતી સીધી રેખા પણ આ બિંદુ પરથી પસાર થશે જ્યાં બે વર્તુળો  $c$  એક અને  $c$  એકબીજાને સ્પર્શે છે અને પછી એવું કહેવાય છે કે  $c$   $1$  અને  $c$  માટે એક સામાન્ય સ્પર્શક છે જે પસાર થાય છે.

$p$  દ્વારા

તેથી તે અહીં આ સ્પર્શક ન હોઈ શકે કારણ કે દેખીતી રીતે આના જેવી એક સ્પર્શક છે આ  $c$  one અને  $c$  ની સીધી સામાન્ય સ્પર્શક જેવી છે પરંતુ તે દેખીતી રીતે  $p$  માંથી પસાર થતી નથી

તેથી બીજો કિસ્સો એ હોઈ શકે કે આપણી પાસે એક સ્પર્શક છે જેમ કે આ

તેથી આ લાલ રેખા લાલ સીધી રેખા એ  $c$   $1$  અને  $c$  બંને માટે એક સામાન્ય સ્પર્શક છે

તેથી આ  $c$   $1$  અને  $c$  ની સીધી સામાન્ય સ્પર્શક છે જે  $p$  માંથી પસાર થાય છે અને આગળ આ પણ તેની સ્પર્શક છે આ પણ વચ્ચેની સામાન્ય સ્પર્શક છે  $c$  બે અને  $c$

તેથી આ  $c$  છે અને આ  $c$  બે છે અને પ્રશ્નમાં એવું કહેવામાં આવ્યું હતું કે  $c$   $1$  અને  $c$  વચ્ચેનો સમાન સામાન્ય સ્પર્શક જે  $p$  માંથી પસાર થાય છે તે પણ  $c$   $2$  અને  $c$  વચ્ચેનો સામાન્ય સ્પર્શક હોવો જોઈએ જેથી આપણે તે જ છે.

અહીં જોઈ રહ્યા છીએ

તેથી આ લાલ સીધી રેખા  $c$  બે અને  $c$  વચ્ચેની સામાન્ય સ્પર્શક છે આ ખૂણો નેવું અંશ હોવા જોઈએ આ બે ખૂણા નેવું અંશ હોવા

જોઈએ

તેથી વર્તુળ  $c$  ની ત્રિજ્યા દો જે આપણે  $br$  અને આ શોધવાનું છે અહ આ અલબત્ત એક એકમ છે અને અહીં આ ત્રિજ્યા પણ એક એકમ છે

તેથી આપણે જોઈએ છીએ ત્રિકોણ એક  $o$  બે  $o$  બાજુઓની બે બાજુઓ સમાન લંબાઈની છે  $r$  વત્તા એક બરાબર  $r$  વત્તા એક છે તેથી આ બાજુ પણ  $r$  વત્તા વન છે આ બાજુ પણ આર પ્લસ વન છે તો આ એક આઇસોસેલ છે  $es$  ત્રિકોણ

તેથી જો આપણે અને  $p$  એ આ બાજુ  $o$  એક  $o$  બે નું મધ્યબિંદુ હોવાથી જો આપણે  $pno$  ને જોડીએ તો તે સાચું છે તે સ્પષ્ટ છે કે કોણ  $o2$   $po$   $90$  ડિગ્રી હશે હવે આપણે જાણીએ છીએ કે  $p$  એ એક  $o$  બે નું મધ્યબિંદુ છે.

પછી એક  $o$  બે ની લંબાઈ છ એકમ છે તે સ્પષ્ટ છે કે  $o$  બે  $p$  બરાબર ૩ એકમ છે આ સંપર્ક બિંદુને  $s$  દ્વારા સૂચિત કરીએ હવે આપણે જોઈએ છીએ કે આ ત્રિકોણ  $o$  બે  $ps$  એક કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને

તેથી આ લંબાઈ  $ps$  પાયથાગોરસ પ્રમેય નવમાંથી બરાબર હશે જે આ કણોનો વર્ગ છે તે  $ps$  વત્તા એકના વર્ગ બરાબર હશે અને

તેથી  $ps$ નો વર્ગ આઠ છે અને

તેથી  $ps$  પર  $p$  છે અને

તેથી હવે  $ps$  એ આઠ એકમનું વર્ગમૂળ છે આપણે એ પણ જોઈએ છીએ કે આ લાલ લાલ સીધી રેખા એક સ્પર્શક છે કારણ કે  $c$  બે અને  $c$  ત્રિકોણ  $ps$  એ કાટકોણ ત્રિકોણ પણ છે અને આ ત્રિકોણ  $ps$  માં આપણી લંબાઈની એક બાજુ છે  $r$  બીજી બાજુ  $ps$  છે.

આહનું વર્ગમૂળ અને ધ  $refore$   $hypotenuse$   $op$  ફરીથી બરાબર થશે પાયથાગોરસ પ્રમેય દ્વારા

$r$  ચોરસ વત્તા આહનું વર્ગમૂળ હવે ત્રિકોણ પર પાછા જઈએ છીએ માફ કરશો આહ જઈ રહ્યા છીએ પછી કાટકોણ ત્રિકોણ  $opo$  બે જે આ કાટકોણ ત્રિકોણ  $opo$  બે છે તે આપણે જોઈએ છીએ કે  $o$  બે ચોરસ બરાબર છે કારણ કે આ કણ છે  $o$  બે  $p$  ચોરસ વત્તા  $op$  ચોરસ

તેથી હવે  $o$  બે આ  $r$  વત્તા એક છે

તેથી  $o2$  ચોરસ ઘાત વત્તા એક આખો ચોરસ છે જે  $o$  બે  $p$  આખા ચોરસ વત્તા  $op$  આખો ચોરસ  $o$  બે  $p$  બરાબર છે ત્રણ એકમ છે

તેથી ચોરસ નવ વત્તા  $op$  ચોરસ છે અહીંથી  $r$  વર્ગ વત્તા આઠ એટલે કે  $r$  આઠ એકમ છે

તેથી આ વર્તુળ  $c$  ની ત્રિજ્યા આઠ એકમ છે ચાલો આપણે ત્રીજો પ્રશ્ન લઈએ

તેથી આ ત્રીજા પ્રશ્નમાં આપણી પાસે બે વર્તુળો છે ત્રિજ્યાના દરેક પાંચ એકમો અને તેઓ એકબીજાને આ બિંદુએ સ્પર્શ કરે છે એક અલ્પવિરામ બે તેમના ટ્રાંસવર્સ સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ ચાર  $x$  વત્તા ત્રણ  $y$  બરાબર દસ છે અને પ્રશ્ન અમને પૂછે છે  $t$   $o$  બંને વર્તુળોનું સમીકરણ શોધો

તેથી પરિસ્થિતિ આ પ્રમાણે છે આપણી પાસે બે વર્તુળો છે જેની ત્રિજ્યા સમાન છે જે પાંચ એકમ છે અને તેઓ આ બિંદુને સ્પર્શે છે આ બિંદુના કોઓર્ડિનેટ્સ એક અલ્પવિરામ બે છે ચાલો આને જોડતી સીધી રેખા છે .

બે કેન્દ્રો અને ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટ જે આ વાદળી સીધી રેખા છે તેમાં સમીકરણ ચાર  $x$  વત્તા ત્રણ  $y$  બરાબર દસ છે

તેથી તમે ચકાસી શકો છો કે આહ આ બિંદુ એક અલ્પવિરામ બે આ સમીકરણને સંતોષે છે કારણ કે દેખીતી રીતે જ્યાં આ બે વર્તુળો સ્પર્શ કરે છે તે બિંદુ પર રહેવું છે આ બે વર્તુળો વચ્ચે ટ્રાંસવર્સ કોમન ટેન્જેન્ટ છે

તેથી આપણે આ બે વર્તુળોની ત્રિજ્યા પહેલાથી જ જાણીએ છીએ જો આપણે કોઈક રીતે આ બે કેન્દ્રોના કોઓર્ડિનેટ્સ શોધી શકીએ તો આ બે વર્તુળોનું સમીકરણ લખવાનું સરળ બનશે હવે આપણે જાણીએ છીએ કે સ્પર્શક એક ખૂણો બનાવે છે  $90$  અંશ આ સીધી રેખા બે કેન્દ્રોને જોડતી વખતે આ સ્પર્શકનો ઢાળ માઈનસ ચાર બાય ત્રણ છે

તેથી ઢોળાવ માઈનસ ચાર બાય ત્રણ છે આનાથી તે ફોલો  $ws$  કે કેન્દ્રોને જોડતી સીધી રેખાનો ઢોળાવ ત્રણ બાય ચાર હોવો જોઈએ કારણ કે એકબીજાને લંબરૂપ આ બે રેખાઓના ઢોળાવનો ગુણાંક માઈનસ વન હોવો જોઈએ અને આ સ્પર્શકનો ઢોળાવ અહીંથી આપેલ છે આપણે જોઈએ છીએ કે ઢાળ માઈનસ ચાર બાય ત્રણ છે અને આ સ્પર્શકના ઢોળાવનું ઉત્પાદન અને કેન્દ્રો સાથે જોડાતી આ રેખા માઈનસ એક હોવી જોઈએ તે અનુસરે છે કે કેન્દ્રોને જોડતી આ રેખાનો ઢાળ ત્રણ બાય ચાર હોવો જોઈએ અને

તેથી હવે આ આહનું સમીકરણ ચાલો આપણે કહીએ કે અહીં પ્રથમ કેન્દ્રના કોઓર્ડિનેટ્સ એ પ્રથમ વર્તુળનો અલ્પવિરામ  $b$  છે

તેથી તે અનુસરે છે કે આ આ છે આ રેખાખંડનો ઢોળાવ ત્રણ બાય ચાર છે તે અનુસરે છે કે  $b$  ઓછા બે ભાગ્યા ઓછા એક બરાબર છે ત્રણ બાય ચાર

તેથી અહીંથી આપણે કહી શકીએ કે  $b$  બાદબાકી બે એટલે ત્રણ બાય ચાર ગણા ઓછા એક પછી આ લંબાઈ  $o$  વન અને સંપર્ક બિંદુ જે એક અલ્પવિરામ બે છે તે વર્તુળની ત્રિજ્યા સિવાય બીજું કંઈ નથી  $ict$  એ પાંચ એકમો છે અને

તેથી ચોરસ ત્રિજ્યા જે પચીસ છે તે  $b$  ઓછા બે આખા ચોરસ વત્તા ઓછા એક આખા ચોરસની બરાબર હશે પરંતુ  $b$  ઓછા બે આખા ચોરસને આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને ઓછા એક આખા ચોરસની દ્રષ્ટિએ લખી શકાય છે

તેથી આ છે નવ બાય સોળ માં ઓછા એક આખા ચોરસ વત્તા ઓછા એક આખા ચોરસની બરાબર

તેથી જો આપણે આ સમીકરણ ઉકેલીએ તો આપણને એક બાદબાકી આખો ચોરસ બરાબર સોળ મળે છે જે સૂચવે છે કે  $a$  બરાબર એક વત્તા ઓછા ચાર છે

તેથી આપણી પાસે બે મૂલ્યો છે  $x$  કોઓર્ડિનેટ

તેથી વાસ્તવમાં આ બે મૂલ્યો બંને કેન્દ્રોના  $x$  કોઓર્ડિનેટ્સને અનુરૂપ હશે કારણ કે બીજા વર્તુળનું કેન્દ્ર જે બીજું કેન્દ્ર છે તે પણ આ સંપર્ક બિંદુથી પાંચ એકમોના અંતરે છે જેથી

બીજા વર્તુળના કેન્દ્ર પણ આ સમીકરણને સંતોષવું આવશ્યક છે અને

તેથી તે અનુસરે છે કે આ બે વર્તુળોના  $x$  કોઓર્ડિનેટ્સ એ પ્રથમ વર્તુળ માટે  $x$  કોઓર્ડિનેટ્સ વાઈ છે તેથી યાલો આપણે કહીએ કે એક ઓછા ચાર જે ઓછા ત્રણ છે અને બીજા વર્તુળનો  $x$  સંકલન એક વત્તા ચાર હશે જે પાંચ છે અને હવે જો  $x$  સંકલન માઈનસ ત્રણ છે જે  $a$  છે તો તે અનુસરે છે કે  $y$  સંકલન જે છે  $b$  આપણે આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ તેથી  $b$  માઈનસ 2 3 બાય 4 થશે આ અહીં ત્રણ બાય ચારમાં માઈનસ ચાર જે માઈનસ ત્રણ છે અને

તેથી  $b$  આ બિંદુ માટે માઈનસ વન બરાબર હશે

અને આ બિંદુ માટે તે થશે પાંચ હોઈએ એટલે હવે આપણી પાસે આ બે વર્તુળોના કેન્દ્રોના કોઓર્ડિનેટ્સ છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિજ્યા પાંચ એકમ છે અને

તેથી સમીકરણ હવે સરળ છે

તેથી પ્રથમ વર્તુળનું સમીકરણ  $x$  ઓછા ઓછા ત્રણ આખા ચોરસ વત્તા  $y$  ઓછા માઈનસ હશે એક આખો ચોરસ ત્રિજ્યાના ચોરસ જેટલો છે જે પચીસ છે અને તે જ રીતે આપણે બીજા વર્તુળનું સમીકરણ લખી શકીએ છીએ આગળ આપણે બીજી નાની સમસ્યા અથવા સામાન્ય કોર્ડ શોધવાના અન્ય નાના વિષય પર વિચાર કરીએ છીએ

તેથી આગળ આપણે આની ચર્ચા કરીશું.

બે છેદતા વર્તુળોની સામાન્ય તાર શોધવાનો વિષય

તેથી અહીં પરિસ્થિતિ એવી છે કે આપણી પાસે આ રીતે બે છેદતા વર્તુળો છે

તેથી જ્યારે આપણી પાસે બે છેદતા વર્તુળો હોય ત્યારે આપણી પાસે બે બિંદુઓ હોય છે જ્યાં તેઓ એકબીજાને છેદે છે અને જો આપણે આ બે બિંદુઓને એક દ્વારા જોડીએ સીધી રેખા આ રેખાખંડ એ પ્રથમ વર્તુળ તેમજ બીજા વર્તુળ માટે એક તાર છે અને તેથી જ આ તારને આ બે છેદતા વર્તુળોની સામાન્ય તાર કહેવામાં આવે છે હવે ધારો કે આ બે વર્તુળોનું સમીકરણ

તેથી આ  $s$  છે.

એક આ  $s$  બે છે તો યાલો કહીએ કે બે વર્તુળોનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે

તેથી આપણને આ બે વર્તુળોના બે સમીકરણો આપવામાં આવે છે કે આપણે આ સામાન્ય તારનું સમીકરણ કેવી રીતે શોધી શકીએ હવે ધારો કે યાલો કહીએ કે આ બેના કોઓર્ડિનેટ્સ આંતરછેદના આ બે બિંદુઓ

તેથી યાલો કહીએ કે આ બે બિંદુઓના કોઓર્ડિનેટ્સ આ બિંદુ માટે છે તે આ બિંદુ માટે અલ્પવિરામ  $b$  છે યાલો આપણે કહીએ કે તે  $c$  અલ્પવિરામ  $d$  છે

તેથી આ બંને બિંદુઓ  $a$  અલ્પવિરામ  $b$  અને  $c$  અલ્પવિરામ  $d$

તેથી અલ્પવિરામ  $b$  પણ આ બે સમીકરણોને સંતોષશે  $c$  અલ્પવિરામ  $t$  પણ હવે આ બે સમીકરણોને સંતુષ્ટ કરશે કારણ કે

અલ્પવિરામ  $b$  આ બે સમીકરણોને સંતોષે છે તેનો અર્થ એ છે કે અલ્પવિરામ  $b$  એ પણ આ બે સમીકરણોના તફાવતને સંતોષવો આવશ્યક છે

તેથી જ્યારે આપણે આ બે સમીકરણોનો તફાવત લઈએ છીએ ત્યારે આપણને

આ સમીકરણ મળે છે હવે આ સમીકરણ એ અમુક સીધી રેખાનું સમીકરણ છે હવે સ્પષ્ટપણે અલ્પવિરામ  $b$  એ આ સમીકરણને

સંતોષવું આવશ્યક છે કારણ કે અલ્પવિરામ  $b$  આ બંને સમીકરણોને સમાન રીતે  $c$  અલ્પવિરામ  $d$  ને સંતોષે છે જે છે આ બે

વર્તુળોના આંતરછેદના અન્ય બિંદુઓ પણ હવે આ સમીકરણને સંતોષશે કે તેનો અર્થ એ છે કે આ બંને બિંદુઓ અનિવાર્યપણે સીધી રેખા પર આવેલા છે અને કોઈપણ બે બિંદુઓ વચ્ચેનો સીધો રેખા ભાગ અનોખો હોવાથી તે આ સીધી રેખા ખંડને અનુસરે છે.

અથવા આ સામાન્ય કોર્ડમાં સમીકરણ છે જે આ સમીકરણ સિવાય બીજું કંઈ નથી

તેથી આ છેદતા વર્તુળોના સામાન્ય તારનું સમીકરણ છે.

આ સામાન્ય તારની લંબાઈ શોધવી બહુ મુશ્કેલ નથી અને આપણે તેને કેવી રીતે શોધી શકીએ તે ઝડપથી મેળવી શકીએ છીએ અથવા જોઈ શકીએ છીએ

તેથી યાલો કહીએ કે  $o1$  અને  $o2$  આ બે વર્તુળોનું કેન્દ્ર છે

તેથી યાલો કહીએ કે આ સંપર્ક બિંદુ  $p$  છે અથવા આ આંતરછેદનું બિંદુ  $p$  છે અને આંતરછેદનું આ બિંદુ  $q$  છે આ બે કેન્દ્રોને જોડતી સીધી રેખા છે હવે તે દર્શાવવું બહુ મુશ્કેલ નથી કે આ સામાન્ય દોરી અને આ સીધી રેખા હવે કેન્દ્રોને જોડતી દરેકને લંબરૂપ હશે.

અન્ય તેઓ એકબીજાને લંબરૂપ હશે, યાલો આપણે કહીએ કે આ બિંદુ અહીં  $m$  છે, કારણ કે આહ આ રેખા કેન્દ્રમાં જોડાતી આ તાર  $pq$  ને લંબરૂપ છે જે આપણે એ પણ જોઈએ છીએ કે આ ત્રિકોણ એક  $qp$  એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે આ એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે કારણ કે  $o$  એક  $p$  અને એક  $q$  એ આ વર્તુળ  $s$  એકની ત્રિજ્યા સિવાય બીજું કંઈ નથી

અને કારણ કે શ્રેણી ત્રિકોણ અને કારણ કે  $o$  એક  $mp$  નેવું અંશ છે તે અનુસરે છે કે  $m$  આ તાર  $pq$  નો મધ્યબિંદુ છે અને ત્યારથી  $m$  છે આ તાર  $pq$  ના મધ્યબિંદુ બિંદુ તાર  $pq$  ની લંબાઈ  $pm$  ની લંબાઈના બમણા જેટલી હશે હવે  $pm$  શોધવું એ  $pm$  શોધવાનું બહુ મુશ્કેલ નહીં હોય કારણ કે જો આપણે આ ત્રિકોણને  $1pm$  જોઈએ તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે જ્યાં એક  $p$  આખો ચોરસ એ એક  $m$  આખો ચોરસ વત્તા  $pm$  આખો ચોરસ છે અને

તેથી  $pm$  એ હવે એક  $p$  આખા ચોરસનું વર્ગમૂળ બીજું કંઈ નથી પણ પહેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા છે જે આપણે  $r$  એક ચોરસ કહીએ તો આ સમીકરણ પરથી આપણી પાસે  $pm$  બરાબર છે એક  $p$  આખા ચોરસના વર્ગમૂળમાં જે  $r$  એક ચોરસ ઓછા એક  $m$  આખો ચોરસ

છે તો હવે આપણે કેવી રીતે માત્ર એક  $m$  શોધવાની જરૂર છે જો આપણે એક  $m$  શોધીએ તો આપણે  $pn$  શોધી શકીએ પણ  $o$  એક  $m$  શોધવાનું ખૂબ સરળ છે કારણ કે  $o$  એક  $m$  આ કેન્દ્રમાંથી કાટખૂણેનું અંતર અથવા કાટખૂણેની લંબાઈ સિવાય બીજું કંઈ નથી.

અમને બરાબર ખબર છે કારણ કે વર્તુળોના સમીકરણો વધુ જાણીતા છે અમે આ તારનું સમીકરણ પણ જાણીએ છીએ જે આ છે

તેથી પછી આ  $o$  એક  $m$  બીજું કંઈ નથી પરંતુ આ જાણીતા બિંદુથી આ જાણીતી સીધી રેખા  $pq$  સુધીની લંબ લંબાઈ છે

તેથી તે આ સીધી રેખાથી આ બિંદુના આ કાટખૂણે વચ્ચેનું અંતર બીજું કંઈ નથી

જે સરળતાથી શોધી શકાય છે અને તે આપણું એક મીટર છે અને પછી ત્યાંથી, કારણ કે આપણે પહેલાથી જ આ પ્રથમ વર્તુળની ત્રિજ્યા જાણીએ છીએ, પ્રથમ વર્તુળની ત્રિજ્યા હશે.

આ સમીકરણ પરથી જાણીએ છીએ જે અહીં આપણને આપવામાં આવ્યું છે

તેથી આપણે  $pm$  શોધી શકીએ છીએ અને પછી આપણે તેને ફક્ત બે વડે ગુણાકાર કરવો પડશે અને પછી  $pq$  તાર ની લંબાઈ  $p$  ની માત્ર બમણી છે આ સાથે આપણે આ વ્યાખ્યાન સમાપ્ત કરીએ છીએ હવે પછીના લેક્ચરમાં આપણે એક નવો વિષય શરૂ કરીશું અને બે છેદતા વર્તુળો વચ્ચે આંતરછેદનો ખૂણો કેવી રીતે શોધવો તેની ચર્ચા કરીશું, આપણે એવી પરિસ્થિતિઓ શોધીશું કે જેમાં આ આંતરછેદનો કોણ નેવું ડિગ્રી છે.

$s$  અને બે વર્તુળો વચ્ચેના આમૂલ ધરી તરીકે ઓળખાતી વસ્તુને પણ વ્યાખ્યાયિત કરશે આભાર