

सात हलकों पर व्याख्यान में आपका स्वागत है,  
इसलिए पिछले व्याख्यान में हमने पहले मामले के लिए दो दिए गए मंडलियों के लिए प्रत्यक्ष आम स्पर्शरेखा के समीकरण की व्युत्पत्ति समाप्त कर दी थी, जहां मंडल एक-दूसरे को नहीं काट रहे थे और न ही वे एक-दूसरे को छू रहे थे।

वही मामला अब हम दो दिए गए वृत्तों के अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं के समीकरण को प्राप्त करने के साथ फिर से शुरू करते हैं, इसलिए ये दो दिए गए वृत्त हैं जिनमें केंद्र  $c$  एक और  $c$  दो हैं

इसलिए  $c$  एक पहले वृत्त का केंद्र है जिसमें निर्देशांक  $x$  एक  $y$  एक है  $c$  2 निर्देशांक  $x$  2  $y$  2 के साथ दूसरे वृत्त का केंद्र है और माना  $c$  1  $c$  2 दो केंद्रों को मिलाने वाली रेखा है यदि हम याद करते हैं कि अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा एक स्पर्शरेखा है जो दोनों वृत्तों के लिए उभयनिष्ठ है लेकिन यह ऐसी है कि वृत्त स्पर्शरेखा के विपरीत पक्षों पर स्थित होते हैं

इसलिए यह एक है यह अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं में से एक है क्योंकि यदि आप स्पर्शरेखा को देखते हैं तो यह वृत्त स्पर्शरेखा के इस तरफ स्थित है और  $t$  वह दूसरा वृत्त स्पर्शरेखा के दूसरी ओर स्थित है और हम कहते हैं कि यह बिंदु  $p$  है जो अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा के साथ दो केंद्रों को मिलाने वाली सीधी रेखा का प्रतिच्छेदन बिंदु है

और इस बिंदु  $p$  में गामा और डेल्टा के निर्देशांक हैं गामा और डेल्टा इस बिंदु को ए होने दें और हम कहेंगे कि यह बिंदु यहां बिंदु बी है और हम सी एक दो ए और सी दो को बी में मिलाने हैं तो स्पष्ट रूप से यह कोण और यह कोण नब्बे डिग्री है और फिर पहले की तरह यह काफ़ी है स्पष्ट है कि यह कोण और यह कोण बराबर हैं तो आइए देखते हैं दो त्रिभुज  $pac$  एक और दूसरा त्रिभुज  $pbac$  दो है और हम क्या देखेंगे कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे के समान हैं क्योंकि इन दोनों त्रिभुजों के तीनों कोण हैं वही क्योंकि सबसे पहले कोणों में से एक 90 डिग्री है और यह कोण और यह कोण भी बराबर है और

इसलिए तीसरा कोण इसके बराबर होना चाहिए और यह भी बराबर होगा ताकि ये दो त्रिकोण ए फिर से समान अब हम इन दो त्रिभुजों के लिए समानता अनुपात लिख सकते हैं अब यह दूरी  $r$  एक है और यह दूरी  $e$  से  $b$   $r$  दो है

इसलिए समानता अनुपात से हमें जो मिलता है वह यह है कि पीसी एक पीसी से विभाजित दो पीसी एक पीसी से विभाजित दो को  $r$  के बराबर होना चाहिए एक को  $r^2$  से विभाजित किया जाता है और यदि हम इसे इस तथ्य को देखते हुए देखते हैं कि इसका मूल रूप से अर्थ यह है कि दो वृत्तों के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा के साथ सामान्य स्पर्शरेखा का प्रतिच्छेदन बिंदु

इसलिए प्रतिच्छेदन का यह बिंदु दो केंद्रों को मिलाने वाली रेखा को वृत्तों की त्रिज्या के अनुपात में विभाजित करता है,

इसलिए यह समीकरण हमें बताता है और यह विभाजन आंतरिक है, प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा के मामले में विपरीत जहां प्रतिच्छेदन बिंदु इस सीधी रेखा को जोड़ने वाली रेखा को विभाजित कर रहा था।

त्रिज्या के अनुपात में बाहरी रूप से केंद्र

इसलिए यहां विभाजन आंतरिक है अब यहां से शुरू करना बहुत आसान है जैसा हमने पहले किया था इस बिंदु के निर्देशांक को खोजने के लिए यहाँ खंड और वह छात्रों के लिए एक अभ्यास के रूप में छोड़ दिया गया है ताकि कोई यह दिखा सके कि बिंदु  $p$  का  $x$  निर्देशांक गामा  $r$  एक  $x$  दो जोड़  $r$  दो  $x$  एक को  $r$  एक जमा  $r$  दो से विभाजित करके दिया गया है और  $y$  निर्देशांक है  $r$  एक  $y$  दो जोड़  $r$  दो  $y$  एक को  $r$  एक जमा करके  $r$  अब  $ah$  से विभाजित किया गया है, यह दिया गया है कि अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा के इस बिंदु के समन्वय का यह मान दिया गया है, जो दो वृत्तों के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा के साथ है।

$ah$  का समीकरण लिखिए, हम अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा का समीकरण लिख सकते हैं, तो मान लीजिए कि इस अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा का ढलान  $m$  है और हम जानते हैं कि यह इस बिंदु  $p$  से निर्देशांक गामा और डेल्टा गामा और डेल्टा के साथ गुजरता है और इसलिए हम कह सकते हैं कि इस अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा पर किसी भी बिंदु  $xy$  या किसी बिंदु  $x$  अल्पविराम  $y$  के लिए अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा पर किसी भी बिंदु के निर्देशांक  $x$  और  $y$  को इस समीकरण को संतुष्ट करना होगा जो कि  $y$  घटा डेल्टा  $m$  गुणा  $x$  घटा गामा के बराबर है एमएमए तो यह इस अनुप्रस्थ आम स्पर्शरेखा के लिए सीधी रेखा समीकरण है, लेकिन फिर भी हम जानते हैं कि हम सर्कल के त्रिज्या और दो सर्कल के केंद्रों के निर्देशांक के संदर्भ में डेल्टा और गामा व्यक्त करने में सक्षम हैं लेकिन मूल्य का मूल्य  $m$  अभी भी अज्ञात है और यही पता लगाना है जैसे हमने क्या किया आह हाँ जो हमने पिछले व्याख्यान में किया था जो हमने यहां से देखा वह यह है कि ढलान एम ऐसा होना चाहिए कि इसकी न्यूनतम दूरी अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा जो यहाँ यह रेखा है

इसलिए केंद्र से इस सीधी रेखा की न्यूनतम दूरी

$c$  पहले वृत्त में से एक  $r$  एक होना चाहिए और इसी तरह केंद्र से समान सीधी रेखा की न्यूनतम दूरी  $c$  दूसरे वृत्त के दो होना चाहिए आर दो और थोड़ी सी गणना से पता चलेगा कि आह ये दोनों चीजें एक हैं और एक ही हैं

इसलिए हमें फिर से दो समीकरण मिलेंगे, यदि हम पिछले व्याख्यान में स्लाइड में से किसी एक पर वापस जाते हैं तो हम प्राप्त करते हैं  $d$  किसी दिए गए बिंदु  $x$  नाught  $y$  की न्यूनतम दूरी के लिए सूत्र दी गई सीधी रेखा से शून्य है,

इसलिए इस सीधी रेखा का ढलान  $m$  है और यह दिए गए बिंदु अल्फा बीटा से होकर गुजरती है तो उस स्थिति में वर्ग दूरी इस की न्यूनतम दूरी इस सीधी रेखा से बिंदु इस अभिव्यक्ति द्वारा दिया गया है,

इसलिए हम फिर से उस अभिव्यक्ति का उपयोग करेंगे,

इसलिए केवल एक चीज यह है कि हमारे मामले में जिस बिंदु से हमें न्यूनतम दूरी का पता लगाना है, वह पहले सर्कल का केंद्र है और सीधी रेखा है जिसे हमें सीधी रेखा से न्यूनतम दूरी ज्ञात करनी है, वास्तव में अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है जो इस बिंदु  $p$  से गुजरने के लिए जानी जाती है जिसमें गामा अल्पविराम डेल्टा होता है और इस अनुप्रस्थ सामान्य स्पर्शरेखा का ढलान  $m$  होता है और इसलिए यह न्यूनतम दूरी होनी चाहिए एक क्योंकि अन्यथा यह रेखा पहले वृत्त की अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी और इसलिए पिछले व्याख्यान में स्लाइड से आह दाहिने हाथ की ओर से हमें न्यूनतम न्यूनतम दूरी मिलती है,

इसलिए हमें बस  $x$  नाught और  $y$  नाught को  $x$  one और  $y$  one और अल्फा और बीटा को गामा और डेल्टा से बदलना होगा,

इसलिए हमें जो मिलता है वह वर्ग दूरी  $m \times$  एक माइनस गामा है माइनस एम गुना एक्स माइनस गामा माइनस वाई वन माइनस डेल्टा स्क्वायर बटा वन प्लस एम स्क्वायर बराबर आर एक वर्ग और फिर इसी तरह हमें दूसरे सर्कल के लिए भी इसी तरह का समीकरण मिलता है लेकिन फिर जैसा हमने दिखाया था ठीक वैसे ही जैसे हमने दिखाया था पिछला व्याख्यान भी इस मामले के लिए भी हम दिखा सकते हैं कि अन्य समीकरण इस समीकरण के समान ही कुछ भी नहीं है,

इसलिए हमें जो अन्य समीकरण मिल रहा है वह दूसरे सर्कल के लिए आह है जो यह समीकरण है जो  $r$  दो वर्ग के बराबर है लेकिन फिर यह यह दिखाया जा सकता है कि ये दोनों एक और एक ही हैं और

इसलिए केवल एक समीकरण के साथ आगे बढ़ेंगे और जब हम इस समीकरण को हल करेंगे तो हमें फिर से एक द्विघात समीकरण एक समीकरण मिलेगा जो कि  $m$  में द्विघात है जिसका अर्थ है कि दो जड़ें वास्तविक होंगी, दोनों वास्तविक मूल्यवान जड़ें होंगी और इसलिए अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा के लिए दो अलग-अलग समीकरण प्राप्त करेंगे,

इसलिए यदि हम आह तो वही है जो हमने पिछले व्याख्यान में भी प्राप्त किया था,

इसलिए जड़ें  $m$  एक हैं अल्पविराम एम दो दो जड़ें हों, मुझे यह समीकरण तीन समीकरण से उत्पन्न होने वाले द्विघात समीकरण के तीन होने के लिए कहें और फिर सच्चे ट्रांस का समीकरण सामान्य स्पर्शरेखा था,

इसलिए दो समीकरण एक होंगे  $y$  घटा डेल्टा बराबर है  $m$  से एक गुना  $x$  घटा गामा और दूसरा समीकरण होगा  $y$  घटा डेल्टा,  $m$  दो गुना  $x$  घटा गामा के बराबर है और दिलचस्प बात यह भी है कि मैं यहां दूसरी अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा खींचता हूं ताकि दूसरा अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा भी  $p$  से होकर गुजरे और यह स्पष्ट है क्योंकि अगर हम इसे पहले होने दें यदि हम यहां बिंदु  $p$  को देखें जो कि गामा कॉमा डेल्टा है तो क्या यह देखा जा सकता है कि यह इस सीधी रेखा के साथ-साथ इस  $str$  पर स्थित है।

आठ रेखा और

इसलिए बिंदु  $p$  दोनों स्पर्शरेखाओं पर स्थित है,

इसलिए अगला मामला यह है कि जब दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तो बाहरी रूप से कहते हैं कि वे प्रतिच्छेद नहीं करते हैं लेकिन वे एक बिंदु पर एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तो आइए याद करते हैं कि क्या हुआ था पिछले मामले में पिछले मामले में वृत्त न तो स्पर्श कर रहे थे और न ही प्रतिच्छेद कर रहे थे और तब हमारे पास दो सीधी उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाएँ और दो अनुप्रस्थ स्पर्शरेखाएँ थीं और साथ ही यह अनुप्रस्थ समय के प्रतिच्छेदन का बिंदु था

जिसमें वृत्त के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा थी अब क्या होगा यदि हम इस वृत्त को पहले वृत्त की ओर उसी रेखा के साथ ले जाना शुरू करते हैं जो केंद्रों को मिलती है तो यह उम्मीद की जाती है कि उदाहरण के लिए यदि केंद्र  $c_1$  केंद्र  $c_2$  के साथ यह छोटा वृत्त हमें इस बिंदु को यहाँ कहने देता है तो हमारे पास है सर्कल सी दो दूसरा सर्कल इस तरह होना चाहिए और हम कहते हैं कि यह नया बिंदु सी दो प्राइम है

इसलिए उस स्थिति में हम देखते हैं कि अनुप्रस्थ कॉम स्पर्शरेखा पर इस तरह बन जाते हैं और फिर यह प्रतिच्छेदन बिंदु है जो अभी भी जुड़ने वाली रेखा पर है, फिर भी वृत्त के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होगा लेकिन हम यह देखना शुरू करते हैं कि दो अनुप्रस्थ उभयचर स्पर्शरेखा उनके बीच का कोण है जो यह है कोण तो पहले हमारे पास यह कोण था और अब कोण कम हो गया है और जैसे-जैसे हम आगे बढ़ते हैं, हम कहते हैं कि हम क्या उम्मीद करते हैं, जिस क्षण यह छोटा वृत्त पहले वृत्त को छूता है, हम उम्मीद करते हैं कि ये दो स्पर्शरेखाएँ शायद एक ही हो जाएँगी एक एकल अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा तो यह देखने के लिए कि आह वास्तव में वापस जा सकता है यदि हम पहले मामले में वापस जाते हैं और विशेष रूप से जब हम दो अनुप्रस्थ सामान्य स्पर्शरेखाओं के समीकरण को प्राप्त कर रहे थे, तो हमारे पास यह विशेष द्विघात समीकरण था और हमने कहा ढलान के लिए दो समीकरण दो आह मूल आह एम एक और एम दो होंगे लेकिन फिर हम जो देख सकते हैं वह यह है कि यहां से अगर हम इसे अभी प्राप्त करेंगे तो जैसा कि जब दूसरा वृत्त पहले वृत्त को छूता है तो उस स्थिति में हमारे यहाँ दो बराबर जड़ें होंगी

इसलिए इस द्विघात समीकरण के दो बराबर मूल होने वाले हैं, जिसका अर्थ है कि केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होगी ताकि यह स्पष्ट रूप से देखा जा सके जब हम यदि हम बिंदु  $p$  के निर्देशांकों को याद करते हैं तो गामा अल्पविराम डेल्टा था जहाँ गामा और डेल्टा इन दो समीकरणों द्वारा दिए गए थे और यदि हम यदि हम इस विशेष द्विघात समीकरण को खोलते हैं तो थोड़ा सा सरलीकरण हमें यह द्विघात समीकरण देता है

इसलिए हमें जो मिलता है वह है  $m$  वर्ग गुणा  $r - 1$  वर्ग घटा  $x - 1$  घटा गामा पूरा वर्ग जमा  $2m$  गुणा  $x - 1$  घटा गामा गुणा  $y - 1$  घटा डेल्टा जमा  $r - 1$  वर्ग घटा  $y - 1$  घटा डेल्टा वर्ग यह शून्य के बराबर है तो यह द्विघात समीकरण है कि हम यहाँ से प्राप्त करेंगे, हमें बस इसे यहाँ लेना है और फिर बस शर्तों का फेरबदल करना है और यही आपको मिलता है

इसलिए यह बिंदु  $p$  तो अब जब हम उस स्थिति को देखते हैं जिसके तहत यह योग्यता है ड्रैटिक समीकरण के बराबर जड़ें होने वाली हैं, इसलिए इसकी समान जड़ें होंगी यदि और केवल तभी जब विवेचक  $0$  हो और विवेचक  $4$  गुणा  $x - 1$  घटा गामा पूरे वर्ग में  $y - 1$   $y - 1$  घटा डेल्टा संपूर्ण वर्ग घटा  $4$  गुना  $r - 1$  वर्ग घटा  $x$  एक माइनस गामा पूरे वर्ग बार  $r$  एक वर्ग माइनस  $y$  एक माइनस डेल्टा पूरा वर्ग और हमें इसे शून्य होने की आवश्यकता है,

इसलिए यदि

स्पर्शरेखा के चौराहे के बिंदु के निर्देशांक गामा और डेल्टा अनुप्रस्थ सामान्य स्पर्शरेखा इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं तो क्या यह होगा ऐसा होता है कि केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होगी, लेकिन अगर हम इसे और सरल करते हैं क्योंकि पहले वृत्त की त्रिज्या शून्य नहीं है, तो हमें जो मिलेगा वह यह है कि हमें  $r - 1$  वर्ग मिलेगा,

इसलिए यह स्थिति वही है जो  $r - 1$  वर्ग  $x - 1$  घटा गामा पूरा वर्ग जमा  $y - 1$  घटा डेल्टा पूरा वर्ग है लेकिन यह जो कह रहा है वह यह है कि और अगर आपको यह दूरी याद है तो यह दूरी बिंदु के बीच की दूरी के अलावा कुछ भी नहीं है

इसलिए था  $s$  बिंदु  $p$  था

इसलिए यह यहाँ पर बिंदु  $p$  है

इसलिए यह दूरी और कुछ नहीं बल्कि  $p$  और केंद्र  $c$  के बीच की दूरी का एक वर्ग है, इसलिए अनिवार्य रूप से इसका मतलब यह है कि इसमें केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होगी केवल अगर और केवल अगर और केवल अगर पीसी एक आर एक है जिसका अर्थ है कि इन दोनों के चौराहे के बिंदु के बीच की दूरी अब इस मामले में हमारे पास केवल एक स्पर्शरेखा है जब ऐसा तब होता है जब हमारे पास केवल एक आम होता है दो वृत्तों को मिलाने वाली रेखा के साथ उस स्पर्शरेखा के प्रतिच्छेदन बिंदु को स्पर्श करें वह बिंदु ऐसा है कि पहले वृत्त के केंद्र से उस बिंदु की दूरी  $r$  एक है जिसका मूल रूप से अर्थ यह है कि यह बिंदु वास्तव में उस पर है पहला वृत्त यह पहले वृत्त की परिधि पर है इसलिए अनिवार्य रूप से हमने जो दिखाया है वह यह है कि हमारे पास केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होगी, जहां उस सामान्य स्पर्श के प्रतिच्छेदन बिंदु दो वृत्तों के केंद्रों को मिलाने वाली सीधी रेखा के साथ उस विशेष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा का प्रतिच्छेदन बिंदु, ताकि प्रतिच्छेदन बिंदु  $p$  वृत्त की परिधि पर बिल्कुल स्थित हो, इसलिए  $PC$  एक  $r$  एक के बराबर है और यह अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है इसलिए केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होती है जब हमारे पास केवल एक जड़ होती है या मूल रूप से दोनों जड़ें समान होती हैं इसलिए उस स्थिति में हमारे पास केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होती है और उस स्थिति में हमने देखा कि प्रतिच्छेदन बिंदु इसमें से केवल यह एकल अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है जो केंद्र को मिलाने वाली रेखा के साथ है ताकि प्रतिच्छेदन का विशेष बिंदु  $p$  अब वृत्त की परिधि पर स्थित होगा क्योंकि यह एक सामान्य स्पर्शरेखा है यह दोनों वृत्तों के लिए एक सामान्य स्पर्शरेखा है इसका मतलब है कि यह है साथ ही यह रेखा दूसरे वृत्त की स्पर्श रेखा भी है और आगे हम जानते हैं कि यह बिंदु  $p$  दोनों केंद्रों को मिलाने वाली सीधी रेखा पर स्थित है, इसलिए यदि हम बस इस रेखा को और आगे बढ़ाएं जिसका अर्थ है कि यह कोण भी  $90$  डिग्री है, दूसरे सर्कल का केंद्र इस रेखा पर कहीं होना चाहिए, इसलिए हम जानते हैं कि दूसरे सर्कल के केंद्र को इस रेखा पर झूठ बोलना है जो हमारे पास है जो मूल रूप से हम पी के साथ संयुक्त सी एक है और हमने इसे और बढ़ा दिया है और दूसरे सर्कल के दूसरे का भी इस रेखा पर केंद्र होना चाहिए और हम जानते हैं कि यहां वही सीधी रेखा जो पहले सर्कल के लिए स्पर्शरेखा है, वह भी स्पर्शरेखा है दूसरा वृत्त इसलिए दूसरे वृत्त के केंद्र से इस सीधी रेखा की सबसे छोटी या न्यूनतम दूरी दूसरे वृत्त के केंद्र से सीधी रेखा पर लंबवत होनी चाहिए, लेकिन लंब केवल यही रेखा है जो रेखा खंड का यह हिस्सा है जो भी  $p$  से होकर गुजरता है और इसलिए यह स्पष्ट है कि  $p$  वह बिंदु है जो मूल रूप से दूसरे वृत्त की परिधि पर स्थित होना चाहिए, इसलिए हमारे पास इस तरह की स्थिति है और अब हम जानते हैं  $w$  ठीक है कि यह बिंदु  $p$  दोनों वृत्तों पर स्थित है और यह अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा पर भी स्थित है और इसलिए यह स्पष्ट है कि दोनों वृत्त अब हैं क्योंकि यह बिंदु दोनों वृत्तों पर स्थित है, यह स्पष्ट है कि यह बिंदु दोनों के लिए उभयनिष्ठ है वृत्त और इसलिए दोनों वृत्त वास्तव में केवल इस बिंदु पर स्पर्श कर रहे हैं और वे स्पर्श नहीं कर रहे हैं वे प्रतिच्छेद नहीं कर रहे हैं क्योंकि यदि उनके पास अगर कोई चौराहा होता तो ऐसा कुछ होता, इसलिए यदि हमारे पास यह स्थिति है तो हमारे पास कोई नहीं है अनुप्रस्थ सामान्य स्पर्शरेखा इसलिए यह स्थिति मूल रूप से तब होगी जब हमारे यहां मौजूद द्विघात समीकरण की कोई वास्तविक जड़ें नहीं हैं, इसलिए पहला मामला तब था जब इसकी दो वास्तविक जड़ें थीं इसलिए जब इसकी दो वास्तविक जड़ें थीं तो यह पहला मामला था जहां दो वृत्त न तो थे दूसरे परिरटश्य को छूना और न ही काटना वह है जो हम अभी कर रहे थे जहां इस द्विघात समीकरण का सिर्फ एक ही मूल है, इसलिए जब ऐसा होता है तो ये दोनों वृत्त लेस एक ही बिंदु पर एक दूसरे को बिल्कुल स्पर्श कर रहे होंगे और उनके पास केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होगी, फिर आगे यदि वृत्त  $c_2$  का यह वृत्त केंद्र  $c_1$  की ओर बढ़ता है जो इस मामले में ऐसा हो सकता है कि क्या होगा इस विशेष द्विघात समीकरण का  $m$  के लिए कोई वास्तविक समाधान नहीं होगा और इसीलिए इस मामले में भी अब कोई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी, जो कि दूसरी स्थिति है जहाँ एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है, समीकरण को खोजना बहुत आसान है इस विशेष स्पर्शरेखा का इतना होगा कि हमें बस फिर से आह करना होगा इसलिए मूल रूप से हम सिर्फ दो स्पर्शरेखा नहीं रखेंगे, हमारे पास सिर्फ एक स्पर्शरेखा होगी और समीकरण इस एकल अनुप्रस्थ सामान्य स्पर्शरेखा का होगा  $y$  घटा डेल्टा बराबर है  $m$  गुणा  $x$  घटा गामा जहां  $m$ ,  $m$  में उस द्विघात समीकरण के बराबर मूलों का मान है, इसलिए यह केवल यही एकल अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है और निश्चित रूप से कैसे  $w$  ई मान लीजिए अगर हमें दो वृत्त दिए गए हैं, तो हम कहते हैं और यदि हमें केवल उन दो वृत्तों का समीकरण दिया गया है, तो हमें केवल दो वृत्तों का समीकरण दिया गया है और फिर हमें यह पता लगाने के लिए कहा गया है कि क्या यह स्थिति एक हो रही है या क्या यह स्थिति दो है जो हो रही है तो शर्त एक के लिए हमने कहा था कि केंद्र के भीतर दो मंडलियों के बीच की दूरी का पता चलेगा तो ऐसा था इसलिए यह स्थिति एक थी तो यह मामला दो है और यह मामला था एक जहां दो वृत्त न तो स्पर्श कर रहे थे और न ही एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर रहे थे और इस मामले के लिए एक तो मामले के लिए हमने कहा था कि यदि हमें दो वृत्तों का समीकरण दिया जाता है तो समीकरण से हम केंद्र के निर्देशांक पा सकते हैं इन दो वृत्तों के सामान्य समीकरण से दो वृत्तों की त्रिज्या का मान ज्ञात कीजिए और फिर हम क्या कर सकते हैं कि हम दोनों केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं और यदि दो केंद्रों के बीच की दूरी होती है त्रिज्या के योग या त्रिज्या या दो वृत्तों के योग से सख्ती से अधिक होता है यदि ऐसा होता है तो यह स्पष्ट है कि दोनों वृत्त न तो स्पर्श कर रहे हैं और न ही एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर रहे हैं, लेकिन यदि ऐसा होता है तो दो वृत्तों के बीच की दूरी जो मामले में दो यह बिल्कुल आर एक प्लस आर दो

के बराबर है और और मेरा मतलब है कि सर्कल के दो समीकरणों को हम आसानी से केंद्र के निर्देशांक ढूँढ सकते हैं और इसलिए हम आसानी से इस दूरी को ढूँढ सकते हैं ताकि हम इस बाएं हाथ की ओर और निश्चित रूप से पा सकें वृत्तों का समीकरण हम उनकी त्रिज्या जानते हैं, हम त्रिज्या जोड़ सकते हैं और यदि ये दोनों बिल्कुल समान हैं तो हम जानते हैं कि हम दो मामलों में हैं जहाँ हमारे पास केवल एक अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है, लेकिन निश्चित रूप से दो के मामले में हमारे पास अभी भी दो प्रत्यक्ष होंगे सामान्य स्पर्शरेखा और प्रत्यक्ष क्रांटम स्पर्शरेखा में समीकरण ज्ञात करना वही होगा जो एक के मामले में अब हम तीसरा मामला ले सकते हैं जिसकी हमने पहले ही थोड़ी चर्चा की है

इसलिए यह तीसरा मामला है वह जगह है जहाँ वृत्त एक दूसरे को काटते हैं

इसलिए यदि वृत्त एक दूसरे को काटते हैं तो सबसे पहले हम कैसे पता लगाते हैं कि वे वास्तव में एक दूसरे को काट रहे हैं

इसलिए हम फिर से इन दो वृत्तों के दो समीकरण देंगे, हम दूरी  $c$  एक  $c$  पाएंगे दो केंद्रों के बीच की दूरी और हम वृत्तों की त्रिज्या भी ज्ञात करेंगे,

इसलिए यदि  $c$  एक  $c$  दो  $r$  एक जमा  $r$  दो से कम है तो यह स्पष्ट है कि यह न तो स्थिति एक है और न ही स्थिति दो लेकिन तब हमारे पास दो हो सकते हैं संभावनाएं अगर ऐसा होता है तो ऐसा होता है यह एक संभावना है दूसरी संभावना कुछ इस तरह हो सकती है इसलिए सी एक यहां है सी दो यहां है

इसलिए यह छोटा सर्कल है और यह बड़ा सर्कल है बड़ा सर्कल केंद्र सी एक छोटा सर्कल है केंद्र सी दो है या हमारे पास ऐसी स्थिति भी हो सकती है जहां छोटा सर्कल बड़े सर्कल को अंदर से अंदर से छू रहा है तो हम इस मामले को इन अन्य से कैसे अलग कर सकते हैं ऐसे मामले जो हम कह सकते हैं कि यदि वृत्तों के बीच की दूरी  $r$  एक ऋण  $r$  दो के मापांक से अधिक है तो यह मामला होना चाहिए क्योंकि ऐसा क्या होगा कि हम इस तीसरे मामले को कैसे प्राप्त कर सकते हैं बस आप जानते हैं कि आह मूल रूप से इस छोटे वृत्त को इस रेखा के साथ ले जा रहा है,

इसलिए पहले छोटा वृत्त यहाँ कहीं था

इसलिए यह मामला एक था जहाँ वे न तो स्पर्श कर रहे थे और न ही स्पर्श कर रहे थे,

फिर छोटा वृत्त आया और यहाँ पर और इस पर यह मामला दो था यह मामला एक था

इसलिए मामले दो में यह सिर्फ एक बिंदु पर बड़े सर्कल को छू रहा था और फिर यदि आप इस सर्कल को यहां से यहां ले जाते हैं और फिर आगे आगे बढ़ते हैं तो निश्चित रूप से हम तीन मामले में हैं जहां वे छेड़छाड़ कर रहे हैं और फिर यदि हम इसे और आगे ले जाने पर भी हम इस मामले पर पहुंचेंगे

इसलिए अगर हम इसे और भी आगे बढ़ाते हैं तो हम वास्तव में इस मामले में पहुंचेंगे जहां छोटा वृत्त कुछ इस तरह का होता है

इसलिए इस मामले में छोटा वृत्त ले वास्तव में अंदर से नीले रंग में बड़े सर्कल को छू रहा है,

इसलिए यह आंतरिक रूप से छू रहा है लेकिन इस मामले में यदि आप देखते हैं कि यह आर एक है तो यह आर दो है

इसलिए यह मूल रूप से यह मामला है

इसलिए यदि हम इस मामले को लेते हैं तो यह आर है 1 और यह  $r$  2 है या यदि हम इसे अलग से खींच सकते हैं तो यह एक छोटा वृत्त केंद्र है  $c$  एक  $c$  दो तो यह  $r$  एक है और यह  $r$  दो है

इसलिए इन दोनों केंद्रों के बीच की दूरी  $r$  एक घटा  $r$  दो है और हम बस एक मापांक लें क्योंकि निश्चित रूप से यहाँ हम  $r$  एक को  $r$  2 से बड़ा मान रहे हैं, लेकिन यह दूसरा तरीका हो सकता है,

इसलिए हमें मापांक लेना होगा,

इसलिए यदि यह यदि छोटा वृत्त आता है तो आप जानते हैं केंद्र के करीब आता रहता है  $c_2$  तब तक करीब आता रहता है जब तक यह मामला नहीं होता है जब तक यह दूरी पर होता है जब यह मामला होता है तो हमारे पास  $c_1$   $c_2$  बराबर होता है  $r$  एक घटा  $r$  दो यदि दूरी  $c$  एक  $c$  दो अधिक है इससे यदि यह इस मान से अधिक है तो यह स्पष्ट है कि वृत्त ई आंतरिक रूप से स्पर्श नहीं कर रहा है यह छोटा सर्कल है छोटा सर्कल कुछ ऐसा है

इसलिए यह मामला है कि अब हमारे पास यह सर्कल है तो इस मामले में जहां दो केंद्रों के बीच की दूरी सबसे पहले आर एक से कम है प्लस आर दो लेकिन यह आर एक और आर दो के बीच पूर्ण अंतर से अधिक है,

इसलिए उस स्थिति में हमारे पास यह होगा कि दो सर्कल एक दूसरे के साथ छेड़छाड़ करेंगे,

इसलिए यह कुछ ऐसा होगा ताकि वे छेड़छाड़ करेंगे ठीक दो बिंदुओं पर और निश्चित रूप से इस मामले के लिए तो क्या होगा कि कोई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी क्योंकि क्या होगा कि दोनों जड़ें अवास्तविक हो जाएंगी लेकिन हमारे पास अभी भी दो प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाएँ होंगी जिनका समीकरण हो सकता है एक के मामले में उपयोग की जाने वाली विधियों का उपयोग करके फिर से पाया गया और फिर निश्चित रूप से हमारे पास ऐसा मामला है जहां दो मंडल एक दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श करने जा रहे हैं,

इसलिए यदि हम छोटे के केंद्र को स्थानांतरित करते हैं सर्कल  $ah$   $c$  एक के और भी करीब है तो पिछले मामले में तो पहले हमारे पास यह केस 2 था जहां छोटे सर्कल का केंद्र ऐसा था कि केंद्रों के बीच की दूरी  $r$  1 जमा  $r$  2 थी और फिर हमने इस सर्कल को एक केंद्रों को मिलाने वाली एक ही रेखा के साथ थोड़ा करीब

इसलिए वृत्त केंद्र इस बिंदु पर आया और वृत्त तब कुछ इस तरह था यह छोटा वृत्त कुछ इस तरह था और यह केंद्र बन गया

इसलिए यह मामला है यह मामला तीन है यदि हम पहले ही देख चुके हैं कि वे प्रतिच्छेद कर रहे हैं और दो वृत्त दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं और फिर यदि हम इस परिपथ को  $c_2$  की ओर उसी रेखा के साथ  $c_1$  की ओर इस प्रकार आगे बढ़ाते हैं कि वे दूसरे वृत्त को स्पर्श करते हैं पहला सर्कल आंतरिक रूप से तो हमारा मतलब है कि दूसरा सर्कल मूल रूप से केंद्र  $c_2$  इस तरह से है

इसलिए यह केंद्र  $c_2$  इस तरह से है कि यह लाल वृत्त छोटा वृत्त और बड़ा नीला है ई सर्कल इस बिंदु पर बिल्कुल स्पर्श करें

इसलिए यह बिंदु पी है और निश्चित रूप से यह तभी होगा जब सी 1 सी 2 आर एक और आर दो के बीच पूर्ण अंतर के बराबर है क्योंकि यह आर एक है यह केंद्र में आर दो है छोटा वृत्त पहले वृत्त के केंद्र के करीब और करीब आता है जब तक कि यह स्थिति संतुष्ट नहीं हो

जाती है,

इसलिए जिस क्षण यह स्थिति संतुष्ट होती है, हम स्पष्ट रूप से देख सकते हैं कि दूसरा वृत्त पहले बड़े वृत्त को आंतरिक रूप से संपर्क के इस एकल बिंदु पर स्पर्श करता है।

$p$  और उस स्थिति में एक उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होती है, केवल एक उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होती है और यह एक प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होती है,

इसलिए इस मामले में कोई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी, केवल एक होगी केवल एक अद्वितीय प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा होगी स्पर्शरेखा और जिसका समीकरण खोजना बहुत मुश्किल नहीं है,

इसलिए मूल रूप से हमें फिर से प्रत्यक्ष सामान्य स्पर्शरेखा के विश्लेषण का उपयोग करना होगा जो हमने पिछले व्याख्यान में पहले मामले के लिए देखा था यदि आप पहला मामला तो अगर आपको यह स्लाइड याद है तो यह स्लाइड केस एक

के लिए सीधी आम स्पर्शरेखा के ढलान एम को खोजने के लिए थी जहां दो सर्कल न तो प्रतिच्छेद कर रहे थे और न ही वे एक-दूसरे को छू रहे थे, उस स्थिति में हमें एक समीकरण मिला था जो था एम में द्विघात जब हमने कहा कि दो जड़ें होंगी लेकिन इस चौथे मामले में इस चौथे मामले में जब सर्कल के बीच की दूरी त्रिज्या के बीच पूर्ण अंतर है तो वास्तव में क्या होगा कि इस द्विघात समीकरण में केवल एक ही जड़ होगा एक एकल वास्तविक जड़ केवल एक ही वास्तविक जड़ होगी जिसका मूल रूप से अर्थ है कि केवल एक प्रत्यक्ष सामान्य स्पर्शरेखा होगी और जिसका समीकरण आसानी से पता लगाया जा सकता है

इसलिए इस बिंदु के निर्देशांक अल्फा और बीटा होंगे

इसलिए अल्फा का मान ऐसा है तो यह अल्फा का मान है और बीटा केन समान रूप से समान होगा

इसलिए अल्फा  $r_1 \times 2$  घटा  $r_2 \times 1$   $r_1$  घटा  $r_2$  और बीटा  $r$  एक  $y$  होगा दो माइनस  $r$  दो  $y$  एक बटा  $r$  एक माइनस  $r$  दो और फिर एक बार जब हम जानते हैं कि  $ah$  इस बिंदु के  $ah$  निर्देशांक को जानते हैं, तो इस विशेष प्रत्यक्ष सामान्य स्पर्शरेखा का समीकरण होगा  $y$  माइनस बीटा बराबर  $m$  गुणा  $x$  माइनस अल्फा है क्योंकि हम जानते हैं कि यह बिंदु सीधी उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा पर स्थित होगा और  $m$  का मान हो सकता है  $m$  से  $n$  का मान प्राप्त होगा इस द्विघात समीकरण को हल करके  $m$  का मान प्राप्त होगा जिसकी जड़ें समान होंगी

इसलिए दोनों जड़ें वास्तविक होंगी और इस स्थिति के लिए बराबर चार जहाँ दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श कर रहे हैं और निश्चित रूप से इस मामले में कोई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी,

इसलिए अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ टिनियों की संख्या शून्य होगी और फिर आगे छोटे वृत्त के केंद्र के रूप में कहते हैं यह दूसरा वृत्त  $c$  एक के और भी करीब जाता है और निश्चित रूप से अंतिम स्थिति तब होती है जब दूसरे वृत्त का केंद्र उसी रेखा के साथ पहले वृत्त के केंद्र के इतने करीब जाता है कि हम उसी रेखा के साथ होते हैं पहले के मामले

इसलिए हम इस रेखा पर दूसरे सर्कल के केंद्र को सी एक के करीब और करीब ले जा रहे थे

इसलिए हमारे पास यह मामला दो था जब सर्कल एक दूसरे को छू रहे थे और फिर यह मामला तीन था जब वे एक दूसरे को काट रहे थे और तब हमारे पास केस चार था जब दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श कर रहे थे और फिर यदि हम केंद्र को और भी आगे बढ़ाते हैं तो हमारे पास ऐसा कुछ मामला हो सकता है जहाँ  $c$  दो दूसरे सर्कल का केंद्र यहाँ है यह दूसरा सर्कल है लेकिन फिर दो केंद्र इतने करीब हैं कि  $c$  एक  $c$  दो त्रिज्या के बीच के पूर्ण अंतर से कम है,

इसलिए इस मामले में हम देख सकते हैं कि दो वृत्त न तो प्रतिच्छेद करते हैं और न ही वे एक दूसरे को स्पर्श करते हैं और दूसरा वृत्त पूरी तरह से है पहले वृत्त के अंदर तो यह पाँचवाँ मामला है

इसलिए इस पाँचवें मामले में यह स्पष्ट है कि कोई प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी और कोई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं होगी इसलिए आइए कुछ हल करें आम स्पर्शरेखा के समीकरणों को खोजने के अभ्यस्त होने के लिए  $ah$  को समझाएँ

इसलिए इस प्रश्न में हमें

वृत्त  $x$  वर्ग प्लस  $y$  वर्ग के बराबर चार और अन्य वृत्त की सामान्य स्पर्शरेखाओं की संख्या ज्ञात करने के लिए कहा जाता है  $x$  वर्ग जोड़  $y$  वर्ग घटा छह  $x$  माइनस आठ  $y$  चौबीस के बराबर है

इसलिए यह पहला सर्कल केंद्र के निर्देशांक मूल त्रिज्या पर है दूसरे सर्कल के लिए दो यूनिट है केंद्र तीन कॉमा चार पर है और त्रिज्या सात यूनिट है दोनों केंद्रों के बीच की दूरी पाँच यूनिट है और हम देखते हैं कि यह  $r$  एक माइनस  $r$  दो के मापांक के बराबर है जो कि पाँच है इसलिए यह ठीक मामला चार है कि हम कुछ ही मिनट पहले चर्चा कर रहे थे,

इसलिए जब केंद्रों के बीच की दूरी

त्रिज्या के बीच पूर्ण अंतर के बराबर हो तो इसका मूल रूप से अर्थ है कि दो वृत्त एक-दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श कर रहे हैं और

इसलिए केवल एक प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है, कोई अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा नहीं है,

इसलिए उत्तर है केवल एक प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है,

इसलिए आइए हम इसे प्रत्यक्ष उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा के समीकरण का पता लगाने का प्रयास करते हैं,

इसलिए यह समन्वय अक्ष है यह पहला वृत्त है यह वृत्त  $c_2$  है जिसमें केंद्र  $c$  दो और त्रिज्या  $r$  दो बराबर दो हैं दूसरे वृत्त का केंद्र  $c$  एक और त्रिज्या सात है, जिसे मैं अभी यहाँ खींच रहा हूँ, लेकिन स्पष्ट रूप से हम पूरे वृत्त को नहीं खींच सकते क्योंकि इसकी त्रिज्या सात इकाइयाँ है और जैसा कि आप देख सकते हैं कि ये दोनों वृत्त

इस बिंदु  $p$  पर आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं

इसलिए उनके पास केवल एक प्रत्यक्ष आम स्पर्शरेखा है, संपर्क के बिंदु के इस निर्देशांक को हम पहले ही अभिव्यक्ति देख चुके हैं,

इसलिए इसका उपयोग करके हमें आर के बराबर अल्फा मिलेगा एक सात गुना  $x$  दो तो यह  $x^2 + y^2$  है यह  $x + y$  है तो  $x^2 + y^2$  दोनों हैं 0

इसलिए  $x^2$  और  $y^2$  दोनों 0 हैं 7 गुना  $x$  दो घटा  $r$  दो गुना  $x$  एक तो दो गुना तीन बटा  $r$  दो घटा माफ करना  $r$  एक गुना  $x$  दो घटा  $r$  दो गुना  $x$  एक ब  $r$  एक माइनस  $r$  दो तो यह माइनस निकलता है छह बटा पांच और इस बिंदु का  $y$  निर्देशांक होगा  $r$  एक गुना  $y$  दो घटा  $r$  दो गुना  $y$  एक बटा  $r$  एक घटा  $r$  दो घटा आठ बटा पांच अब एक बार जब हम निर्देशांक जानते हैं और हम यह भी जानते हैं तो इसे सीधे होने दें रेखा

इसलिए केंद्र  $c_1$  और  $c_2$  को मिलाने वाली सीधी रेखा जब आगे की ओर बढ़ती है तो इस बिंदु  $p$  से भी मिलती है जो कि दो वृत्तों का संपर्क बिंदु है और

इसलिए और आगे यह स्पर्शरेखा इस सीधी रेखा के साथ 90 डिग्री बनाएगी रेखा और

इसलिए क्या इस सीधी उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा का ढलान खोजना आसान है क्योंकि यह यह रेखा  $c_1$  और  $c_2$  को मिलाने वाली इस रेखा से 90 डिग्री पर है

इसलिए यह  $c_1$   $c_2$  रेखा  $c_1$  से  $c_2$  तक है और फिर यदि आप इसे और आगे बढ़ाते हैं तो यह इस बिंदु  $p$  पर स्पर्शरेखा से मिलेगा अब इस रेखा का ढलान चार गुना तीन है क्योंकि चार शून्य शून्य तीन शून्य से विभाजित है

इसलिए ढलान चार बटा तीन है और

इसलिए इस रेखा का ढलान है क्योंकि हम जानते हैं कि अगर वहाँ एक दो लंबवत रेखाएं फिर ढलानों का उत्पाद शून्य से एक होता है और

इसलिए इस रेखा की ढलान जो इस सी एक सी दो रेखा के लंबवत होती है, उसे घटाकर तीन बटा चार होना चाहिए और फिर समीकरण को लिखना बहुत आसान है क्योंकि यह बस  $y$  माइनस बीटा होगा जो  $x$  माइनस अल्फा से गुणा की गई ढलान के बराबर है,

इसलिए समीकरण  $y$  जमा 8 बटा 5 बराबर माइनस थ्री बटा फोर गुना  $x$  प्लस सिक्स बटा फाइव है,

इसलिए हम इस लेक्चर को समाप्त करते हैं हम अगले व्याख्यान में इस सामान्य स्पर्शरेखा के समीकरण को खोजने के लिए कुछ और समस्याओं को उठाएंगे, धन्यवाद