حلقوں پر چھٹے لیکچر میں خوش آمدید اس لیکچر میں ہم مشترک ٹینجنٹ سے دو دائروں میں اخذ کرنے پر بات کریں گے لیکن اس سے پہلے کہ ہم اسے شروع کریں ہم ایک ایسے عنوان کو ختم کرتے ہیں جس کا احاطہ ہم آخری لیکچر میں نہیں کر سکے تھے، لہذا یہ کسی چیز کی تعریف کے بارے میں ہے جو کسی دائرے کو ڈائریکٹر کے دائرے کے نام سے جانا جاتا ہے
پر ہے اور کچھ رداس اس لئے ایک دائرہ دیا گیا ہے o تو فرض کریں کہ ہمارے پاس ایک دائرہ ہے جس کا کوئی مرکز
تو یہ دائرہ ہمیں دیا گیا ہے اور پھر ہم اس کے بارے میں سوچیں ان تمام پوائنٹس کا لوکس جو اس دائرے کے دو مماس کے چوراہے پر واقع ہے جو کہ 90 ڈگری کو ایک دوسرے کو کاٹتا ہے
تو مثال کے طور پر ہم اس نقطہ پر ایک ٹینجنٹ کہتے ہیں اور پھر ہمیں اس دائرے کے ایک اور مماس پر غور کرنا ہوگا جو اس دائرے کے لیے کھڑا ہوگا. یہ پہلا ٹینجنٹ ہے
تو آئیے ہم کہیں کہ شاید یہاں ہمارے پاس ایک اور ٹینجنٹ ہے
تو ہم اس نارمل پر ایک کھڑا ٹائی لائن بنائیں گے
یہ دونوں ٹینجینٹ 90 ڈگری پر ملتے ہیں t تو یہ دوسرا ٹینجنٹ ہے اور ہم کہتے ہیں کہ
تو ہم ان پوائنٹس آف انٹرسیکشن کے لوکس میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا یہ ان دونوں ٹینجنٹ کا ایک ہی دائرے سے ملنے کا نقطہ ہے لیکن ٹینجنٹ ہونے دیں p ڈگری پر ملنا چاہیے ہر ایک پر کھڑا ہونا چاہیے۔ دوسری صورت میں یہ پوائنٹ 90
تو ایسے تمام پوائنٹس کا لوکس اور ہم چیک کر سکتے ہیں کہ ایسے تمام پوائنٹس کا لوکس دراصل ایک دائرہ بننے جا رہا ہے کیونکہ اگر ہمارے پاس جیسا کوئی نقطہ ہے p اس پوائنٹ
تو واضح طور پر یہ زاویہ 90 ڈگری ہے. کیونکہ یہ پہلا ٹینجنٹ ہے اسی طرح یہ زاویہ بھی 90 ڈگری ہے پلس ہمیں بتایا گیا ہے کہ یہ دونوں ٹینجنٹ 90 ڈگری پر مل رہے ہیں
اگر آپ اس چوکور کو دیکھیں گے oqpsoqps تو ظاہر ہے اگر آپ اس چوکور کو دیکھیں گے
تو اس چوکور کے تین زاویے ہیں نوے درجے ہیں اس لیے قدرتی طور پر چوتھے کو بھی نوے ڈگری ہونا چاہیے اور اس لیے یہ چوکور یا دونوں پہلے دائرے کے رداس کے برابر ہیں جو یہاں ہمیں دیا گیا ہے oq اور os تو مستطیل ہو سکتا ہے یا مربع لیکن پھر ہم دیکھتے ہیں کہ کو ایک مربع ہونا چاہیے oq ps اور اس لیے یہ واضح ہے کہ
کے مربع جڑ کے برابر r تک کا فاصلہ دو گنا p سے اس نقطہ o اور کے برابر ہے۔ لہذا r تو اس کا بنیادی مطلب یہ ہے کہ یہ فاصلہ بھی تاکہ ہم مزید دو مماس بناسکیں جو ایک دوسرے پر کھڑے ہوں اور یہاں تک کہ مثال کے طور پر ہمارے p ہوگا لہذا اس طرح کا کوئی بھی نقطہ پاس مزید دو مماس ہوسکتے ہیں. آئیے ہم اس نقطے پر ٹینجنٹ کو اس طرح کہتے ہیں اور پھر ہمیں ایک اور ٹینجنٹ کی ضرورت ہے جو اس ٹینجنٹ پر کھڑا ہو
تو آئیے ہم یہاں اس پوائنٹ پر ٹینجنٹ کہتے ہیں
اس پوائنٹ کو p تو یہ دونوں ٹینجنٹ 90 ڈگری پر ملتے ہیں اور اگر ہم اسی طرح کا تجزیہ کرتے ہیں. جیسا کہ ہم نے اس پوائنٹ کے لیے کیا کیا کہتے ہیں c
تو اگر ہم اسی طرح کا تجزیہ کرتے ہیں
کا مربع r ہے کے برابر ہو جائے گا 2 گنا oc کے برابر سائڈ کا مربع ہوگا اور دوبارہ یہ فاصلہ r تو ہم یہ بھی دیکھیں گے کہ یہ ایک بار پھر دیئے گئے دائرے کا رداس ہے r جڑ جہاں
تو ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ کوئی بھی ایسا نقطہ جو دو مماس کے چوراہے پر واقع ہے جو نوے ڈگری پر آپس میں جڑے ہوئے ہیں لہذا ایسا دیئے گئے دائرے کے مرکز سے ہے اور اس وجہ سے ایسے تمام پوائنٹس کا لوکس r کوئی نقطہ ایک مقررہ فاصلے پر ہوگا. مربع جڑ کا دو گنا ایک اور دائرہ ہے کیونکہ یہ وہی تھا جو بنیادی طور پر دائرے کی تعریف تھی کیونکہ ہر ایک ایسا نقطہ جو دو مماس کے چوراہے پر ہوتا ہے۔ جو ڈگری پر ایک دوسرے کو کاٹتا ہے لہذا ہر ایک نقطہ دیئے گئے دائرے کے مرکز سے ایک مقررہ فاصلے پر واقع ہوتا ہے اور اس وجہ سے یہ 90 دائرہ جو ہم حاصل کرتے ہیں جو ایسے تمام پوائنٹس کا لوکس ہے دیئے گئے دائرے کو ڈائریکٹر دائرہ کہتے ہیں اور اس طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ڈائریکٹر سرکل کا مرکز دیے گئے دائرے کے مرکز کے برابر ہے لہذا یہ پہلا مشاہدہ ہے کہ ڈائریکٹر دائرے کا مرکز کسی دائرے کے برابر ہے دیئے گئے دائرے کے مرکز میں ایک مشاہدہ ہے اور دوسرا مشاہدہ یہ ہے کہ دائرے کے دائرے کا رداس دیئے گئے دائرے کے رداس کے دو گنا کا مربع جڑ ہے، اس کے ساتھ ہی ہم ڈائرکٹر دائرے پر اس بحث کو ختم کرتے ہیں اگلا ہم جا رہے ہیں. کسی بھی دو دائروں کے مشترکہ ٹینجنٹ کے بارے میں بات کریں لیکن اس سے پہلے کہ ہم ایسا کریں ایک چھوٹا سا نتیجہ ہے جو شاید پچھلے لیکچرز میں سے کسی ایک میں شامل کیا گیا ہو گا لیکن ہم اسے دوبارہ یہاں لاتے ہیں کیونکہ اپنے تجزیے میں ہم اس نتیجہ کو استعمال کریں گے.
تو نتیجہ اس طرح ہے یہ بنیادی طور پر کہتا ہے کہ اگر ہمارے یہاں سیدھی لکیر ہے
ہے اور جو سوال ہم x naught y naught ہے اور جو اس نقطہ الفا بیٹا سے گزرتی ہے اور پھر ہمارے پاس ایک اور نقطہ m تو ڈھلوان سے پوچھا جاتا ہے وہ دینا ہے. مربع فاصلے کا اظہار ٹیسٹ فاصلہ یا سب سے چھوٹا فاصلہ بنیادی طور پر اس نقطے سے سیدھی لکیر تک کھڑا ہوتا ہے جو کہ یہ کھڑا ہوتا ہے اور اس کھڑا کا یہ کواڈ فاصلہ ہوتا ہے اس لیے اس نقطہ سے اس سیدھی لکیر تک اس لائن سیگمنٹ کا مربع فاصلہ اس فارمولے کے ذریعے دیا جاتا ہے. آئیے ہم دو دائروں کے درمیان مشترک ٹینجنٹ کے بارے میں بات کرتے ہیں
تو ہم یہ کہتے ہیں کہ یقیناً یہاں بہت سی صورتیں ہیں
تو آئیے یہاں کوئی بھی دو دائرے کھینچتے ہیں
تو یہ وہ صورت ہے جب دونوں دائرے نہ
دو ہیں پھر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اصل میں چار c ایک c تو ایک دوسرے کو چھو رہے ہوں اور نہ ہی ایک دوسرے کو کاٹ رہے ہوں. یہ مراکز مماس ہیں
تو دو مماس ہیں
تو چار مشترک مماس ہیں
تو ہمارا کیا مطلب ہے مشترک مماس مشترک کا مطلب ہے کہ ایک ہی سیدھی لکیر دونوں کا مماس ہے دائرے مثال کے طور پر ہم اس سیدھی لکیر کو کہتے ہیں
تو یہ سیدھی لکیر جو میں نے کھینچی ہے وہ اس پہلے دائرے دونوں کی مماس ہے لہذا یہ سیدھی لکیر ایک مماس ہے اس نقطہ پر پہلا دائرہ اور وہی سیدھی لکیر اس مقام پر دوسرے دائرے کا ایک مماس ہے اس لیے اس سیدھی لکیر کو ان دونوں دائروں کے لیے مشترک ٹینجنٹ کہا جاتا ہے اس لیے ہم یہاں ایک اور آہ مشترک ٹینجنٹ کو اس طرح کھینچ سکتے ہیں. دو ٹینجنٹ کو ڈائریکٹ مشترک ٹینجنٹ کہا جاتا ہے لیکن ان دو کے علاوہ ہمارے پاس اب بھی دو اور ٹینجنٹ ہوں گے جنہیں ٹرانسورس ٹینجنٹ کہا جاتا ہے اور وہ اس طرح ہیں جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ سرخ لکیر اس مقام پر پہلے دائروں کی ٹینجنٹ ہے اور اسی پر ایک ہی سرخ لکیر اس نقطہ پر اس دوسرے دائرے کی مماس ہے لہذا براہ راست مشترکہ مماس کی صورت میں دونوں دائرے مماس کے ایک طرف ہیں اگر آپ اسے دیکھتے ہیں

تو جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ کوئی سیدھی لکیر سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ایک نصف سیدھی لکیر کے اس طرف ہے مثال کے طور پر
آئیے ہم اس سیدھی لکیر کو لیں اور دوسرا نصف سیدھی لکیر کے دوسری طرف ہے براہ راست مشترکہ مماس کی صورت میں دونوں سی تار
ٹینجنٹ کے ایک طرف ہوتے ہیں ایک سیدھی لائن ٹینجنٹ کے ایک طرف ہوتے ہیں اسی طرح یہ ایسا ٹینجنٹ ہے جس کے لیے دونوں دائرے اس کے
ایک طرف ہوتے ہیں اس قسم کی ٹینجنٹ کو ڈائریکٹ مشترک ٹینجنٹ کہا جاتا ہے لہٰذا یہ سبز براہ راست کاربن ٹینجنٹ میں سے ایک ہے کیونکہ
دونوں دائرے اس سیدھی لکیر پر یا نیچے ہیں اسی طرح یہ دوسرا سبز ٹینجنٹ بھی براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ ہے کیونکہ دونوں دائرے اس سیدھی
لکیر کے اوپر یا ایک طرف ہیں لیکن اس صورت میں سرخ مماس سرخ مماس ظاہری طور پر اس سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے ایک اس
طرف ہے دوسرا یہ حصہ ہے اور سرخ مماس کی صورت میں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ بڑا دائرہ اس طرف ہے اور چھوٹا دائرہ مخالف طرف ہے۔
تو ایسی ٹینجنٹ جس کے لیے دو دائرے ٹینجنٹ کے ایک ہی طرف نہ ہوں اسے ٹرانسورس مشترک ٹینجنٹ کہا جاتا ہے
دائرے لیکن پھر دائرے ٹینجنٹ ٹرانسورس مشترک ٹینجنٹ e تو یہ بھی ایک مشترک ٹینجنٹ ہے کیونکہ یہ سیدھی لکیر دونوں وہں کا ٹینجنٹ ہے۔
کے مخالف سم
ٹرانسورس مشترک ٹینجنٹ ہوگا جو اس طرح ہے um توں پر ہیں اس لیے ایک اور
تو اس پہلی صورت میں مکمل طور پر چار مشترک ٹینجنٹ ہوں گے ان میں سے دو براہ راست اور دوسرے دو ٹرانسورس ہیں لہذا اس لیکچر کے
اگلے حصے میں ہم دیکھیں گے کہ چاروں راس
،توں کے اس براہ راست مشترک اوقات کی مساوات کو کیسے اخذ کیا جاتا ہے اور ان مشترک مماس کے نقطۂ انتفاضہ کے نقاط کو بھی
تو آئیے ہم اس کی مساوات کے اخذ کے ساتھ آغاز کرتے ہیں۔ اس پہلی صورت کے لیے براہِ راست مشترک مماس ہیں لہذا یہ دو دائرے ہونے دیں
دو ہیں اور چلیں y دو x دو کے نقاط c ایک y ایک x ایک کے نقاط ہیں c دو c ایک اور مرکز c مرکز
دو ہو R کے ساتھ c ایک ہو اور دوسرے دائرے کا مرکز r کے ساتھ دائرہ ایک c تو پہلے کا رداس اس کو ہونے دیں۔ مرکز
تو ہم کیسے فرض کریں کہ اگر ہمیں دیا جائے
تو ہم ہیں میرا مطلب یہ نہیں ہے کہ دائرے ہندسی طور پر نہیں ہیں تیار کیا گیا ہے اور ہمیں جو دیا گیا ہے وہ صرف ان دو دائروں کے رداس اور
دائروں کے ان مراکز کے نقاط کو بتاتے ہیں پھر ہم یہ کیسے چیک کرتے ہیں کہ کیس ہے یا نہیں ہم یہ کیسے چیک کریں گے کہ کیس دو ایک
دوسرے کو ملانے والے اور غیر چھونے والے کا ہے۔ دائرے
تو اس کے لیے یہ بہت مشکل نہیں ہے جو ہم سمجھتے ہیں کہ اگر دو مراکز کے درمیان سیدھی لائن کا فاصلہ ہے
تو اگر دو مراکز کے درمیان فاصلہ ہے جو دراصل یہ اظہار ہے اگر دو مراکز کے درمیان یہ فاصلہ ہے رداس کے مجموعے سے زیادہ ہے لہذا
یہ ہم آسانی سے جانچ سکتے ہیں کہ آیا یہ حالت ہوتی ہے
تو جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ آیا یہ حالت ہوتی ہے
تو یہ واضح ہے کہ اگر ہم کہتے ہیں کہ ہم مرکزوں کو ایک سیدھی لائن سے جوڑتے ہیں
دو ہے r تو یہ فاصلہ ایک ہے یہاں سے یہاں تک اور یہ فاصلہ
تو ظاہر ہے کہ اگر دونوں دائرے چھو نہیں رہے ہیں اور ایک دوسرے کو کاٹ رہے ہیں
دو جمع کچھ اور ہو کیونکہ دو دائرے نہ r ایک جمع r تو یہ واضح ہے کہ دونوں مراکز کے درمیان کل فاصلہ ہوگا
تو چھو رہے ہیں اور نہ ہی وہ ایک دوسرے کو کاٹ رہے ہیں
تو ظاہر ہے جب ایسا ہوتا ہے
دو سے زیادہ ہو r ایک جمع r تو یہ درست ہونا چاہئے اور اس کے برعکس بھی اگر فاصلہ
تو وہ اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ وہ ایک دوسرے کو نہیں چھوتے اور نہ ہی وہ ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں
تو آئیے ہم اس پہلی صورت کو لیتے ہیں جہاں ہمارے پاس دو غیر مقطع اور غیر چھونے والے دائرے ہیں لہذا یہ کہتے ہیں کہ یہ دو دائرے ہیں
دو ہونے دیں پہلے اس بڑے y دو nx ایک y ایک x دو کے نقاط کو c ایک اور c دو c لہذا ایک کا مرکز ہے ایک دوسرے کا مرکز ہے
دو ہونا قدرتی طور پر اس مثال کے لیے r کے ساتھ سب سے چھوٹے دائرے کا c ایک ہے اور مرکز br ایک c دائرے کا رداس جس کا مرکز
دو سے بڑا ہے اب ہم اس مشترک مماس پر غور کرتے ہیں r ایک r
دونوں سے اور رابطہ کے نقطہ یا نقطہ جہاں b پر پہلے دائرے a تو آئیے اس براہ راست مشترک مماس کے رابطے کے نقطہ کو ایک نقطہ
رہنے دیں b کا براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ دوسرے دائرے کو چھوتا ہے اس نقطہ کو s .thi
واضح طور پر یہ زاویے 90 ڈگری ہیں اور آئیے دائرے کے دو مراکز کو جوڑنے والی سیدھی لکیر پر غور کریں آئیے اس کو b یہ ہے a تو یہ
پر براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ کو کاٹنے والی ہے جس کے نقاط کو ہم الفا p آگے بڑھاتے ہیں تاکہ واضح طور پر یہ سیدھا ہو۔ لائن کسی نقطہ
الفا کوما بیٹا کے نقاط کو تلاش کرنا ہے اور پھر ہم اس براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ کی p کوما بیٹا سے ظاہر کرتے ہیں لہذا ہمارا پہلا کام اس نقطہ
ایک سے ظاہر l دو ہے اب دائرے کے دو مراکز کے درمیان اس فاصلے کو میں اسے r ایک ہے اور یہ r مساوات تلاش کریں گے۔ اب یہ
دو ہونے دو ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ہم مشاہدہ کرتے ہیں l دو کے درمیان فاصلہ c اور دوسرے دائرے کے مرکز p کرتا ہوں اور اس نقطہ
دو pbc سے ملتا جلتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ ان دو مثلثوں کے تینوں زاویہ pac one ٹو جو کہ یہ مثلث ہے مثلث pbc کہ مثلث
زاویہ کے تین زاویے ایک جیسے ہوتے ہیں کیونکہ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک زاویہ 90 ڈگری ہے یہ tr ایک یہ دونوں pac اور
زاویہ اس زاویے کے برابر ہے اور مزید یہ بات واضح ہے کہ یہ زاویہ بھی دونوں مثلثوں کے لیے مشترک ہے اس لیے ان دونوں مثلثوں کے دو
زاویے ایک جیسے ہیں۔ تیسرا زاویہ گھر بھی ایک جیسا ہونا ضروری ہے اور چونکہ تینوں زاویے اب ان دو مثلثوں کے لیے ایک جیسے ہیں اس سے
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ دونوں مثلث ایک جیسے ہیں اور اسی لیے مماثلت کے تناسب سے اور اسی لیے مماثلت کے تناسب سے یہ اس کی پیروی
دو سے تقسیم کی گئی چھوٹی مثلث میں سے دو برابر pc بڑے مثلث کی اسی طرف کی لمبائی pc one length pc one کرتا ہے کہ
ہے
ایک l دو ہے جو ایک جمع ہے l دو سے pc دو تقسیم l ایک جمع l ایک کچھ نہیں بلکہ pc دو اب r ایک r دو سے pc ایک pc تو
l دو برابر ہے l دو جس کا مطلب ہے کہ r دو پر r ایک مائنس r دو ہے l ایک سے n دو سے ہے لہذا r ایک r دو اور یہ l سے
ایک ہمیں پہلے سے معلوم ہے کیونکہ ہمیں دونوں مراکز کے نقاط ہمیں دیئے l ٹو اور sr ایک منٹ r دو سے تقسیم r ایک کے برابر ہے
پر پڑا ہے۔ سی p 1 کی مساوات چونکہ یہ نقطہ so کے نقاط تلاش کرنے کے قابل ہونا چاہئے اب p گئے ہیں لہذا یہاں سے ہمیں اس نقطہ
سے تقسیم کیا جاتا ہے x1 کو الفا مائنس y1 سی 2 کو جوائن کرنے والی سیدھی لائن اس کی پیروی کرتی ہے کہ بیٹا مائنس
کی ڈھلوان جیسی ہے کیونکہ یہ ویسے بھی c 1 c 2 لائن کی ڈھلوان یہ ہے اور وہ ڈھلوان لائن pc1 کی ڈھلوان ہے pc1 تو یہ اس لائن
ٹو کی ڈھلوان کے برابر ہے جو کہ pc کی ڈھلوان ہے اور یہ حقیقت میں لائن c 1 c 2 کی ڈھلوان اور لائن c 1 ایک ہی لائن ہے اور لائن
ٹو ہے۔ y 2 پر بیٹا مائنس x الفا مائنس
تو اب ہم تلاش کرنے کی کوشش کریں گے
دو کے برابر ہے l مل گیا ہے ۔ اب یہاں سے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ فاصلہ l 2 کے لحاظ سے یہاں l 1 تو ہمیں پہلے ہی

پورا مربع جسے میں اگلی سلائیڈ پر لے جاؤں گا x2 کے برابر ہے۔ پورا مربع جمع الفا مائنس y2 دو مربع ہم کہتے ہیں کہ بیٹا مائنس 1 تو
پورا مربع جو کہ برابر ہے میں 2 x پورا مربع جمع الفا مائنس 2 y مربع ہے بیٹا مائنس 2 1 اسی طرح پچھلی میں سلائیڈ ہمارے پاس تھی
دو پورے مربع x دو پورے مربع کو الفا مائنس سے ضرب y پورے مربع کو عام طور پر لوں گا اس سے ایک جمع بیٹا مائنس 2 x الفا مائنس
دو سے تقسیم کیا جائے x دو کو الفا مائنس y لیکن بیٹا مائنس

تو اس سیدھی لکیر کی ڈھلوان کے علاوہ کچھ نہیں جو دو دائروں کے مراکز کو جوڑتا ہے جو دراصل یہاں اس مقدار کے برابر ہے لہذا ہم اسے
x ایک پورا مربع پر y دو مائنس y دو پورا مربع ہے ایک جمع x دو مربع الفا مائنس 1 یہاں قدر سے بدل سکتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ
ایک r مربع بذریعہ r 2 مربع 1 1 مربع ہے 2 1 پورا مربع لیکن پھر اس مساوات سے یہاں ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ 1 x مائنس 2
دو پورا مربع لہذا اگر ہم اسے استعمال کرتے ہیں r مائنس

ایک کے درمیان فاصلہ ہے دو 1 ایک مربع 1 دو مربع کے برابر بناتے ہیں جو اب r ایک مائنس r دو مربع ضرب r ایک مربع 1 تو ہم اسے
دائروں کے مراکز

تو ایک مربع ہے

ایک x دو مائنس x ایک پورا مربع جمع y دو مائنس y ایک مربع ہے 1 دو پورے مربع میں r ایک مائنس r دو مربع بن جاتا ہے r تو یہ
پورا مربع

تو یہ اور یہ اظہار برابر ہیں اور پھر ہم دیکھتے ہیں کہ ہم کر سکتے ہیں اس کو یہاں عام ڈینومینیٹر کے طور پر لیں اور پھر کچھ ایسا ہوگا جو ہے
ایک x دو مائنس x ایک پورے مربع کو x دو مائنس x دو پورے مربع از x اور پھر کیا ہم اس بائیں ہاتھ کی طرف اس پوری چیز کو الفا مائنس
ایک پورا مربع لیکن یہ پوری چیز اس کے برابر ہے جس کو اس اظہار سے ضرب کیا جاتا y دو مائنس y میں لکھا جاسکتا ہے۔ پورا مربع جمع
ہے وہی ہے اس طرح اور پھر یقینا ہم دیکھتے ہیں کہ یہ اور یہ ایک ہی ہیں

دو مائنس ایکس ایک اور اگر ہم x دو میں r ایک مائنس r دو بذریعہ r تو ہم کیا کرتے ہیں حاصل کرنا یہ ہے کہ الفا مائنس ایکس ٹو برابر ہے
اس کو مزید آسان کریں

دو x ایک r دو سے تقسیم کیا گیا جو r ایک مائنس r ایک x دو مائنس x دو میں r دو جمع x تو ہمیں الفا کی اتنی قدر مل جائے گی کہ
ٹو سے تقسیم کیا گیا ہے r ایک مائنس r ٹو ایکس ایک کو r ہے۔ مائنس

کوآرڈینیٹ تھا جو دائرے کے مراکز کو اس براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ x تو یہ وہی ہے جو الفا ہے یاد رکھیں الفا سیدھی لائن کے اس نقطے کا
کے ساتھ ملاتا ہے اسی طرح ہم بیٹا اور تلاش کرسکتے ہیں۔ یہ آسان ہے کیونکہ ہم اس مساوات کو یہاں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ چونکہ الفا
r کو 1 y 2 r مائنس 2 y 1 r جانا جاتا ہے اب ہم آسانی سے بیٹا تلاش کر سکتے ہیں اور تھوڑی ہیرا پھیری سے ہمیں بیٹا برابر ملتا ہے
لیکن ہمارا حتمی مقصد اس کی مساوات کو تلاش p دو سے تقسیم کیا گیا ہے لہذا اب ہمارے پاس ہے اس پوائنٹ کے اس کے نقاط r ایک مائنس
کرنا تھا اس براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ کی مساوات

تو ہم اسے کیسے حاصل کریں گے

تو یقیناً ایک چیز یہ ہے کہ ہم جانتے ہیں کہ یہ ٹینجنٹ اس نقطہ پر واقع ہے جس کے نقاط جانا جاتا ہے لہذا اگر اس براہ راست مشترکہ ٹینجنٹ پر
ہے y کوما x کوئی نقطہ

مائنس الفا x مائنس بیٹا پر y تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ

کے برابر ہونے دیں m مائنس الفا اس براہ راست مشترک ٹینجنٹ کی ڈھلوان ہو گی۔ اور اس ڈھلوان کو x مائنس بیٹا اس پر y تو

تو اب اگر ہمیں اس براہ راست مشترک مماس کی ڈھلوان معلوم ہے

معلوم m تو ہم نے اس براہ راست مشترک مماس کی مساوات تلاش کر لی ہے کیونکہ پھر یہ براہ راست مشترک مماس کی مساوات ہے لیکن ابھی
نہیں ہے۔ ہمارے لیے

یہ معلوم نہیں ہے کہ ہم کیا دیکھتے ہیں وہ ہے اور یہ وہ جگہ ہے جو ہم نے m الفا اور بیٹا یہاں معلوم ہیں لیکن m تو ہم کیسے تلاش کرتے ہیں
پہلی چند سلائیڈوں پر دیکھا جو کہ ایک نقطہ کے سب سے کم فاصلے کے بارے میں تھا ۔ ایک دی گئی سیدھی لکیر

تو یہ وہ جگہ ہے جہاں یہ نتیجہ بہت کارآمد ثابت ہوگا کیونکہ ہم یہاں جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ پہلے دائرے کے مراکز سے اس مماس کا سب
کی یہ قدر اس طرح ہونی چاہئے کہ اس کا سب سے چھوٹا m دو ہے۔ لہذا r ایک ہے اور دوسرے دائرے کے مرکز سے r سے کم فاصلہ
مختلف ہے m فاصلہ کیونکہ اگر

دو نہیں ہوسکتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ چونکہ یہ براہ راست مشترک مماس ہے اگر آپ r ایک اور r تو ان دو دائروں سے مختصر ترین فاصلہ
اس زاویہ کو دیکھیں یہاں نوے ڈگری ہے

ون کا سب سے کم فاصلہ ہے اور اسی طرح دوسرے دائرے کے c ایک واقعتا اس براہ راست مشترکہ مماس سے اس مرکز r تو یہ فاصلہ
ایسا ہونا چاہیے کیونکہ یہ واضح ہے کہ اگر m دو ہے۔ لیکن r دو اور اس براہ راست مشترکہ مماس کے درمیان سب سے کم فاصلہ c مرکز
ہم ڈھلوان کو اس طرح تبدیل کرتے ہیں

نہیں ہوں گے میرا مطلب ہے کہ میں کر سکتا ہوں مثال کے طور پر اگر میرے پاس ڈھال کچھ اور ہوتی تب میرے پاس r 2 اور r 1 تو فاصلہ
اس طرح کی سیدھی لکیر ہوگی جو اگرچہ الفا بیٹا سے گزرتی ہے

تو یہ کالی لکیر بھی الفا بیٹا سے گزرتی ہے لیکن پھر چونکہ دائرے سے اس کالی لکیر کا سب سے چھوٹا فاصلہ برابر نہیں ہوتا کیونکہ یہ خاص
کالی لکیر ان دو دائروں کو چھو بھی نہیں رہا ہے جس کا مطلب ہے کہ ان دونوں دائروں کے مرکز سے اس کالی لکیر کا سب سے کم فاصلہ ظاہر
ہے r 2 اور r 1 نہیں ہوگا کیونکہ اگر یہ r 2 اور r 1 ہے

کے m تو یہ ہے واضح کریں کہ اس کالی لکیر کو براہ راست ہونا چاہئے یہ دونوں دائروں کے لئے ایک مشترکہ ٹینجنٹ ہونا چاہئے لہذا ہم اسے
کو حل کرنے کی کوشش کریں گے لہذا ہم اس حقیقت کو استعمال m لحاظ سے کچھ مساوات حاصل کرنے کے لئے استعمال کریں گے اور پھر اس
مطمئن کرنا چاہئے وہ یہ ہے کہ آہ اس m کریں گے لہذا اگر ہم اس اعداد و شمار میں دوبارہ واپس جاتے ہیں پھر پہلی پہلی مساوات جس کو
کے برابر ہونا چاہئے لہذا ہمیں اس میں دلچسپی ہے لہذا اگر ہم یہاں r one سے x one y one مخصوص سیدھی لائن کا فاصلہ نقطہ
کا مرکز تھا اور یہ براہ راست c one کے ساتھ دائرہ x one y one واپس آتے ہیں ہمارے پاس بنیادی طور پر ایک نقطہ ہے جو محدد
مائنس بیٹا تھی یا بنیادی طور پر یہ خاص ٹینجنٹ ایک پوائنٹ الفا بیٹا سے گزر y مشترکہ ٹینجنٹ تھا جس کی مساوات تھی جس کی لائن کی مساوات
ایک ہونا ضروری ہے r ون سے الفا بیٹا سے گزرنے والے اس عام ٹینجنٹ تک سب سے کم فاصلے کا اظہار c رہا تھا تب سب سے کم فاصلہ
لہذا اب اس فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے سب سے کم فاصلے کا حساب لگایا جاسکتا ہے جو ہم جانتے ہیں کہ ہم پہلے ہی سائی کر چکے ہیں۔
مربع کے برابر m ایک مائنس بیٹا پورا مربع بذریعہ ایک جمع y ایک مائنس الفا مائنس x گنا m ہے لہذا سب سے کم فاصلہ m کہ ڈھلوان d
کو پورا کرنا ضروری ہے جس کی m ایک مربع کے برابر ہونا چاہئے لہذا یہ پہلی شرط ہے کہ اس r ہوگا لہذا یہ مربع فاصلہ ہے لہذا اسے
کے درمیان سب سے کم فاصلے کے لئے ہے جو پہلے دائرے کا مرکز ہے اور اس براہ راست x1 y1 وجہ یہ ہے کہ یہ اظہار اس نقطہ
سے گزر رہی ہے۔ پوائنٹ الفا بیٹا تاکہ ہمارے پاس ایک سیدھی لکیر تھی جس a ہے اور m مشترکہ ٹینجنٹ یا اس سیدھی لکیر جس میں ڈھلوان

ہے اور اس پوائنٹ الفا بیٹا سے گزر رہی ہے لہذا ہم نے اس فاصلے کا حساب لگایا ہے اور فاصلے کا اظہار یہ بائیں ہاتھ کی طرف m میں ڈھلوان
کے برابر ہونا چاہئے۔ r ہے لیکن یہ اصل میں
کو ایک براہ راست مشترک مماس ہونے کے لیے سب سے کم فاصلہ ah ہونے کے لیے a تو یہ مربع فاصلہ ہے لہذا چونکہ اس سیدھی لکیر کو
ایک مربع کے برابر ہونا ضروری ہے اور ہمیں دوسرے ce کا r ایک کے برابر ہونا چاہیے اور اس لیے مربع فاصلے کے لیے یہ اظہار r
دائرے کے لیے ایک جیسی مساوات ملے گی کیونکہ ایک ہی سیدھی لکیر دوسرے دائرے کے لیے بھی ایک مماس ہے، اس طرح ہم یہ دونوں مساواتیں
حاصل کرتے ہیں
تو یہ پہلی کے لیے ہے۔ دائرہ اور یہ اب دوسرے دائرے کے لیے ہے اگر ہم اس مساوات کو آسان بنانے کی کوشش کریں
تو درحقیقت یہ دونوں مساواتیں ایک ہیں اور میرا مطلب ایک ہی ہے کیونکہ اور اس نقطہ کو دیکھنے کے لیے اسے تھوڑا سا غور سے دیکھنا ہوگا
y مائنس m مائنس الفا پورے مربع میں لکھ سکتے ہیں لہذا میں دوسری مساوات 2 x کیونکہ اگر ہم اسے دوبارہ لکھنے کی کوشش کریں ہم اسے
دو مربع کے برابر ہے یا اس کے بجائے آپ اسے ڈینومینیٹر میں رکھ سکتے ہیں r دو مائنس الفا پورا مربع x ٹو مائنس بیٹا کو دوبارہ لکھ رہا ہوں
دو مربع r مربع برابر m دو مائنس الفا پورا مربع از ایک جمع x ٹو مائنس بیٹا کے طور پر لکھا جا سکتا ہے y مائنس m اور یہ اسی چیز کو
n دو مائنس الفا پورا مربع اور اسی طرح ہم پہلی مساوات کے ساتھ کرنے کی کوشش کریں گے۔ x
تو ہمارے پاس ہے
تو یہ ہے آہ ہمارے پاس اصل میں ہے
تو میں دو پرائم کہوں گا
تو دو سے ہم بہت آسانی سے دو پرائم حاصل کر سکتے ہیں اسی طرح پہلی مساوات سے 1 پرائم ملے گا بس یہ کرنے سے آپ جانتے ہیں کہ
مربع برابر ہے m ایک مائنس الفا پورا مربع ضرب ایک جمع x مائنس بیٹا اوور y 1 مائنس m مائنس الفا نکالنا ہے یہاں ملے گا x 1 صرف
ایک مائنس الفا پورا مربع x ایک مربع r
تو یہ ایک پرائم ہے اور دو پرائم تھا
تو یہ دو پرائم تھا اس مساوات دو پرائم تھا اب اگر ہم آہ صرف چند سلائیڈوں پر واپس جائیں
ہے اور پھر ہمارے پاس الفا بیٹا ہے لہذا ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ c 2 x 2 y 2 ہے یہ پوائنٹ x 1 y 1 تو ہم جانتے ہیں کہ اس لیے یہ
مائنس بیٹا y 1
مائنس الفا جو یہ مقدار ہے اس کے علاوہ کچھ نہیں ہے اس لکیر کی ڈھلوان جو دائرے کے دو مراکز کو جوڑتی ہے اور x1 مائنس بیٹا پر y1 تو
t مائنس الفا جو یہ مقدار ہے کیونکہ یہ ایک ہی سیدھی لائن میں ایک ہے لہذا x2 مائنس بیٹا بائی y2 اسی طرح وہ اور وہ ڈھلوان کچھ نہیں بلکہ
کی ڈھلوان اس لائن فریگمنٹ کی ڈھلوان میں اس کا لائن سیگمنٹ ایک ہی ہے لہذا یہ دونوں مقداریں بنیادی طور پر صرف ایک ہی ہیں اور اگر یہ
حقیقت میں یہاں سے بھی واضح ہے
تو یہ اور یہ ایک ہی ہیں لہذا جو ہم دیکھتے ہیں وہ ان دونوں مساوا
توں میں ایک ہے۔ اور یہاں بائیں ہاتھ کی دو طرف ایک جیسی ہے اب دائیں ہاتھ کی طرف کیا ہے پتہ چلتا ہے کہ دائیں ہاتھ کی طرف بھی ایک ہی ہے
کیونکہ اگر ہم یاد کرتے ہیں
تو اگر ہم اسی مثلث کی طرف واپس جائیں
pc 1 by pc 2 ہے 2 r 1 by r 2۔ لہذا اگر آپ کو یاد ہے کہ pc 1 by pc دو برابر ہے r ایک بذریعہ r تو ہم دیکھتے ہیں کہ
دو مربع ہے اب پی سی ایک مربع پی سی 1 مربع ہے x pc ایک مربع pc دو مربع x r ایک مربع r جس کے برابر ہے جس کا مطلب ہے کہ

y دو مائنس الفا بول اسکوائر پلس x ایک مائنس بیٹا پورے مربع پر پی سی دو مربع ہے y مائنس الفا مکمل مربع جمع x 1 تو یہ پی سی 1 مربع
مائنس الفا پورے مربع پر x 1 مائنس بیٹا بذریعہ y 1 مائنس الفا پورے مربع کے برابر ہے۔ 1 جمع x 1 ٹو مائنس بیٹا پورا مربع ہے اور یہ
دو مائنس الفا مربع میں x دو مائنس بیٹا پر y دو مائنس الفا پورے مربع میں ایک جمع x
دو مائنس الفا مربع اب ہمارے پاس پہلے ہی موجود ہے دیکھا کہ یہاں کا یہ تناسب اور یہاں کا یہ تناسب ایک جیسا x دو مائنس بیٹا مربع پر y تو
ہے کیونکہ وہ دائرے کے بیچ میں شامل ہونے والی سیدھی لکیر کی ڈھلوان کے مربع کے سوا کچھ نہیں ہیں
دو مربع برابر اس سے اور اس سے یہ نکلتا ہے کہ ان دونوں مساوا r ایک مربع بہ r تو یہ دونوں منسوخ کر دیتے ہیں جو ہمیں ملتا ہے وہ ہے
توں کا دائیں ہاتھ کا پہلو بھی ایک جیسا ہے
تو ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ بائیں ہاتھ کی سمت ایک تھی اب دائیں ہاتھ کی طرف بھی ایک ہے اور اس لیے یہ دونوں مساواتیں ایک ہیں۔ صرف
اور اس لیے ہمیں صرف ان مساوات میں سے صرف ایک کو حل کرنے کی ضرورت ہے ہم کوئی بھی لے سکتے ہیں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا
ہے لہذا ہم ان دو مساوا
کو حل کریں گے m توں میں سے صرف ایک لیں گے اور
مائنس تھا m ہمارے پاس re تو آئیے پہلی مساوات کو کہاں سے لیں
کے مراکز کو جوڑنے والی c2 اور c1 میں شامل ہونے والی لائن کی ڈھلوان so s کے ذریعے اس لائن کی ڈھلوان کو ظاہر کرے گا si تو
ایک مائنس الفا پورا مربع اور ہمارے x کے برابر ملتا ہے۔ ایک مربع بذریعہ r مربع m مائنس کا پورا مربع بذریعہ ایک جمع m ہے لہذا ہمیں
ایک مائنس الفا یہ x دو اور اس وجہ سے r ایک بذریعہ r ایک مائنس x دو مائنس R دو x ایک r پاس پہلے سے ہی الفا الفا کا اظہار ہے
میں r ایک مائنس r دو پر x ایک مائنس x ایک r ایک مائنس الفا ہے x ہے کہ
دو r ایک مائنس r مربع برابر m مائنس کا پورا مربع ضرب ایک جمع m تو یہاں تک کہ ہم اس مساوات کو یہاں واپس کرتے ہیں ہمیں ملتا ہے
دو پورا مربع اور پھر اگر ہم اس کو دوبارہ ترتیب دیں x ایک مائنس x پورا مربع
میں ایک چوکور مساوات ملتی ہے جس کا اصل مطلب یہ ہے کہ اور اس صورت میں دو حقیقی جڑیں ہوں گی وہاں دو حقیقی m تو ہمیں اصل میں
جڑیں ہوں گی لیکن پھر اس کا کیا مطلب ہے کہ ڈھال کی دو مختلف قدریں ہیں جو اس کا مطلب یہ ہے کہ ایک بار جب ہم ٹی کو حل کرتے ہیں
دو m برابر m ایک اور m برابر m تو ممکنہ طور پر موجود ہیں۔ اس کے دو حل ملیں گے
دو جانتے x ایک x دو جانتے ہیں ہم r ایک اور r سے ظاہر کرے گی کیونکہ ہم پہلے ہی k تو ہم کہتے ہیں کہ یہ دائیں ہاتھ کی مقدار اسے
ہیں
سے ظاہر کریں k تو آئیے اس کو
تو پھر ہمارے پاس کیا ہے اگر ہم ایسا کریں
پلس k مربع s جمع ms مربع مائنس 2 m ہے اور اس سے یہ نکلتا ہے کہ k مربع m جمع x 1 مائنس کا پورا مربع m تو ہمارے پاس
مربع صفر کے برابر ہے لہذا جب s مائنس k جمع ms مائنس ایک جمع دو k مربع میں m کلومیٹر مربع ہے اور اسے مزید لکھا جا سکتا ہے
میں حل کرتے ہیں m ہم اس چوکور مساوات کو

x ایک میں m ملتی ہیں۔ مائنس بیٹا برابر ہے y دو اور اسی طرح ہمیں دو سیدھی لکیر کی مساواتیں m ایک اور m تو ہمیں دو حل ملتے ہیں
مائنس الفا اور یہ دونوں درست براہ راست مشترک ٹینجنٹ ہیں اگر ہم واپس جائیں x میں m 2 مائنس بیٹا ہے y مائنس الفا میں اور دوسرا
اشتہار میں دکھایا گیا ہے کہ پہلی صورت کے لیے h تو اگر ہم اپنی ابتدائی بحث کو یاد کریں دکھایا گیا ہے کہ تصویر میں اصل میں دو ہیں ہم
دو ہیں m ایک اور m اس کیس کے لیے اصل میں دو براہ راست مشترک ٹینجنٹ ہوں گے اور ان دونوں کی ڈھلوانیں
تو دوسرا براہ راست مشترک مماس کچھ اس طرح ہوگا اور یہ دوسرا براہ راست مشترک ٹینجنٹ کچھ اس طرح ہوگا۔ الفا بیٹا سے بھی گزرتا ہے اور
سے اس p کیونکہ یہ اس مساوات سے واضح ہے جس کا مطلب ہے کہ یہ دوسرا مشترک ٹینجنٹ بھی اس پوائنٹ سے گزرنے والا ہے پوائنٹ
پر مل رہے ہیں اور اس کے علاوہ p لیے بنیادی طور پر مشترکہ ٹینجنٹ اور سیدھی لکیریں دائروں کے مراکز میں شامل ہوتی ہیں۔ سب اس نقطہ
پر ملتے ہیں جو دائروں کے مراکز کو جوڑنے والی سیدھی p ایک اور ہے یہ دیکھنا بھی آسان ہے کہ یہ دونوں براہ راست مشترک مماس اس نقطہ
کے تناسب میں جوڑ رہی ہے radii کو بیرونی طور پر ان کے c1 c2 سیدھے کو تقسیم کرتا ہے۔ لکیر p لائن پر واقع ہے اور یہ نقطہ
تو میرا یہاں کہنے کا مطلب یہ ہے کہ یہ ہے الفا بیٹا کا انٹرسیکشن پوائنٹ یہ سیدھی لائن جوائن ہے دونوں مراکز کو مدنظر رکھتے ہوئے اور ہم
اس سیدھی لائن کو مرکزوں کو خارجی طور پر ملانے والے رداس کے تناسب میں تقسیم کرتا ہے جس کا مطلب ہے کہ p کہتے ہیں کہ یہ نقطہ
ایک بذریعہ r ایک سے تقسیم پی سی ٹو برابر ہے pc ہم یہاں جو کچھ بتا رہے ہیں وہ یہ ہے کہ چونکہ تقسیم بیرونی ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ
دو اور یہ وہ چیز ہے جس کا ہم پہلے ہی ذکر کر چکے ہیں اور چونکہ میرا مطلب یہ ہے کہ ان دو مثلثوں کی مماثلت سے واضح طور پر اس کی r
پیروی کی گئی ہے
جہاں دونوں براہ راست مشترک ہیں۔ ٹینجنٹ میٹ تقسیم کرتا ہے سیدھی لکیر جو دائرے کے مراکز کو p تو اس کا کیا مطلب ہے کہ یہ نقطہ
کے تناسب میں جوڑتا ہے r سے r 2 r 1 سے r 1 بیرونی طور پر
سے تقسیم کرنے کے برابر ہے اگلے لیکچر میں جس میں ہم جا رہے ہیں اس دائروں کے لیے قاطع r 2 کو r 1 سے pc 2 کو pc 1 تو
مشترک ٹینجنٹ کی مساوات کو دونوں دائروں سے اخذ کریں جب دونوں دائرے ایک دوسرے کو نہیں چھوتے اور نہ ہی ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں
شکریہ