

طلباء کو آخری لیکچر میں محدود سیریز کے پانچویں اور آخری لیکچر میں خوش آمدید کہتے ہیں ہم نے یولر نمبر کا تصور تیار کیا ہے جیسا کہ آپ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہم نے بحث کی ہے کہ اسے حد کے طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ لامحدود جمع 1 پر e جانتے ہیں کہ اسے لامحدود سیریز میں تبدیل ہوتا ہے جس کا خلاصہ ah مجھے یہ ایک بار پھر یہ دکھانے کے لیے کرنے دو کہ یہ کس طرح n پوری طاقت پر n کے لیے k اصطلاح پر غور کریں۔ n kth کو مجموعی طور پر پاور n یولر مستقل کی طرف لے جائے گا اور اس لیے ایک جمع ایک اوور کے لیے برابر ہے 2 1 0 تک k کی اصطلاح kth سے binomial theorem سے حاصل کیا جا سکتا ہے n سے کم برابر n سے کم جو برابر ہے اس k پاور n پر n میں فیکٹوریل میں 1 پر k کے برابر ہے ماننس k یہ فیکٹوریل k پوری قوت n بذریعہ 1 nck تک n سے k کی طاقت n سے 1 پر k ماننس 1 کو فیکٹوریل k ماننس n میں ماننس 1 تک n کے ساتھ منسوخ کرنے کے بعد ہم حاصل کرتے ہیں n اصطلاحات میں سے ہر ایک کو بذریعہ تقسیم کریں۔ 1 k تقسیم کرتے ہیں اب آئیے

کے طور k پر فیکٹوریل n ماننس 1 پر k ماننس 1 میں 1 ماننس 2 پر n تو جو ہم یہ حاصل کر رہے ہیں وہ برابر ہے 1 1 ماننس 1 پر k ایک مقررہ n ماننس 1 پر k اور n پر 2 کے ساتھ بدل جاتا ہے۔ کے 1 پر k انفیٹیٹی میں جاتا ہے یہ پورا اظہار 1 پر فیکٹوریل n پر یہ n کی طاقت n مجموعی طور پر n ہے اس لیے حد ایک جمع ایک k کے لیے 0 پر جائیں اس لیے ہمارے پاس جو بچا ہے وہ 1 پر فیکٹوریل انفیٹیٹی پر جاتا ہے n بڑھتا ہے اور n سب سے پہلے بدل جاتی ہے۔ نوٹ کریں کہ اگر

ہو رہی ہے لہذا 0 ویں k کی اصطلاح 1 پر فیکٹوریل kth تو آپ کو سیریز میں ملنے والی اصطلاحات کی تعداد بھی انفیٹیٹی میں جا رہی ہے اور ٹرم ایک kth بڑھتا ہے n فیکٹوریل پر اس لیے جیسا کہ k ٹرم پر 1 ہے kth اصطلاح 1 پر 0 فیکٹوریل جمع 1 ہے۔ 1 پر 1 فیکٹوریل جمع 1 میں بدل جاتا ہے اس لیے لامحدود سیریز کو دیکھا جا سکتا ہے کیونکہ یہ صفر فیکٹوریل پر ایک کا مجموعہ ہے لہذا یہ ایک جمع ایک k پر فیکٹوریل پر ہے ایک فیکٹوریل جو ایک جمع ایک پر ہے۔ دو فیکٹوریل جمع ایک پر تین فیکٹوریل جمع اسے یولر کا نمبر کہتے ہیں سوال یہ ہے کہ اس کی قیمت کیا ہے یہ ایک غیر معقول عدد ہے اس لیے ہم ای کو دو عدد کے تناسب کے طور پر نہیں لکھ سکتے لیکن ہم اس کی حد معلوم کر سکتے ہیں جو کہ دو پوائنٹس ہے ایک اٹھ دو اٹھ ایک اٹھ دو اٹھ چار پانچ نو صفر چار پانچ دو تین صفر تین چھ پانچ لہذا مجھے اس پوزیشن تک تمام عملی مقصد کے لئے یاد ہے ہم عام طور پر تین یا چار اعشاریہ تک استعمال کرتے ہیں اور لوگوں نے اس کے ذریعے اس کی قیمت کا حساب لگانے کی کوشش کی ہے۔ کمپیوٹرز لیکن چونکہ کمپیوٹر میں تمام عملی مقاصد کے لیے اعشاری مقامات کی تعداد کی بھی ایک حد ہوتی ہے ہمیں اس کا تخمینہ لگانا پڑتا ہے اور اس لیے اعشاریہ کے بعد تیسرے یا چوتھے اعشاریہ مقام کا استعمال ہمارے عملی مقصد کے لیے کافی اچھا ہے۔ یہ معلوم کرنا بہت آسان ہے کہ لیکن اس خلاصے sum یہ تعداد 2 سے زیادہ ہونی چاہیے کیونکہ پہلی دو اصطلاحات کی وجہ سے یہ 2 ہے اور باقی رقم یہ ایک لامحدود ہے کی تمام شرائط مثبت حقیقی اعداد ہیں درحقیقت مثبت عقلی اعداد یہ کچھ ایک فیکٹوریل پر ایک ہے اس لیے یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہ حصہ مثبت کو اس سے بڑا ہونا چاہیے۔ دو جو کہ بالکل واضح ہے کہ ہم کیسے جانتے ہیں کہ یہ تین سے e ہونے والا ہے یہ منفی نہیں ہو سکتا اس لیے زیادہ نہیں ہے

تو ہمیں یہ دیکھنا ہوگا کہ ان لامحدود جمع پر پابند ایک ہے آئیے ہم اس بات کی تصدیق کریں کہ ایک پر فیکٹوریل دو جمع ایک پر فیکٹوریل تین اور ایک پر فیکٹوریل چار پر غور کریں جمع ایک کے برابر ہے 2 جمع 1 پر 2 میں 3 جمع 1 پر 2 پر 3 میں 4 جمع 1 پر 2 پر 3 میں 4 اس طرح اب دیگر تمام نمبروں کو 2 کے ساتھ بدل دیں

تو یہ 1 پر 2 سے کم ہے اس مقدار 1 پر 2 سے 2 میں 1 سے کم ہے کیونکہ 3 2 سے بڑا ہے اس لیے 1 پر 3 2 سے چھوٹا ہے۔ جمع 1 پر 2 سیریز ہے۔ جمع ذیلی مربع جمع آدھا مکعب پلس آدھے سے پاور فور agp سے 2 میں 2 جمع 1 پر 2 سے پاور 4 اس طرح اب یہ فارم نصف کی انفیٹیٹی میں جاتا ہے یہ نصف ایک پر ایک ماننس نصف میں بدل جاتا ہے جو ایک n اس طرح ہو اور ہم اس جی پی سیریز کو جوڑ سکتے ہیں جیسا کہ کے برابر ہے لہذا ہم نے دیکھا ہے کہ 2 سے بڑا ہے لیکن حصہ جو 2 سے اوپر باقی ہے 1 سے کم اس لیے ہم آسانی سے کہہ سکتے ہیں کہ 2 سے کم ہے دو سے کم جمع ایک تین کے برابر ہے لہذا ہم جانتے ہیں کہ یہ دو اور تین کے درمیان ہے اور اصل قدر یہ تھی کہ میں نے کچھ e وقت پہلے دکھایا تھا۔ 2.7 1828 1828 وغیرہ اب آئیے کچھ حقیقی یا پیچیدہ ایکس کے لیے پاور ایکس پر ای پر غور کریں سوال یہ ہے کہ x کے برابر ہے۔ فیکٹوریل 3 پر 1 جمع x کی طاقت e سیریز کیا ہوگی جو میں ثابت نہیں کروں گا لیکن میں صرف یہ نتیجہ لکھ رہا ہوں کہ کو میں آپ کو ایک بدیہی خیال دیتا ہوں کہ یہ x کہتے ہیں طاقت e مکعب فیکٹوریل 3 کے علاوہ اس لامحدود رقم کو x مربع 2 جمع x جمع n لہذا ہم اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ حد e سے ضرب e مربع برابر ہے e مربع کو کیسے سمجھ سکتا ہے ہم جانتے ہیں کہ e n حد کے برابر ہے n پورا مربع پوری طاقت n حد تک جاتا ہے 1 جمع 1 بذریعہ n برابر ہے n پوری طاقت تک 2 n لامحدود 1 جمع 1 پر کی اصطلاح صفر سے کم کے برابر kth کے لیے اس لیے n مربع پوری قوت n جمع ایک بذریعہ n انفیٹیٹی ون پلس پر جاتا ہے دو بذریعہ k فیکٹوریل کے برابر ہے n مربع پوری طاقت کے لیے فیکٹوریل n جمع 1 بذریعہ nck کے لیے ہے n سے کم برابر k پوری طاقت کے برابر ہے وہی چال استعمال کر کے جو ہم نے کچھ n میں 2 جمع 1 پر k پوری کی طاقت n پر 1 ماننس n فیکٹوریل k پر 2 1 جمع 1 پر k پر 1 ماننس n کے حوالے سے کی تھی یہ 1 سے 1 ماننس 1 پر بن رہا ہے۔ e عرصہ پہلے کے لیے حد لیتے ہیں k تک اس لیے جب ہم ایک مقررہ k پوری قوت n پر

k پر فیکٹوریل k ٹرم 2 سے پاور kth مربع دراصل ہے خلاصہ جس کی e اس لیے k ٹو پر پاور k تو یہ حد ایک ہو جاتی ہے فیکٹوریل یا ہمیں اس طرح k پر فیکٹوریل K یہ 0 ویں ٹرم 2 سے پاور 0 پر فیکٹوریل 0 پلس 2 پر پاور 1 پر فیکٹوریل 1 پلس 2 پر پاور e اس لیے ہے۔ یہ طاقت کے لیے دو یہ کوئی ثبوت نہیں ہے لیکن یہ ظاہر k کی سیریز ملتی ہے ایک پلس ٹو پر فیکٹوریل ایک جمع دو مربع پر فیکٹوریل ٹو فیکٹوریل مربع کو ایک لامحدود سیریز کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جس میں ایک جمع دو پر فیکٹوریل ایک جمع دو مربع پر فیکٹوریل e کرتا ہے کہ کس طرح کیوب پر x مربع ہے فیکٹوریل دو x جمع x ایک جمع x پاور کے لیے e دو وغیرہ لامحدود تک شامل ہیں لہذا اس سے اندازہ ہوتا ہے کہ سے بدل کر ہم آسانی سے یہ حاصل کر سکتے ہیں کہ یہ x کو ماننس x کا کیا ہے x فیکٹوریل تھری وغیرہ انفیٹیٹی تک اس لیے ای پاور ماننس ہے فیکٹوریل 2 پر مربع ماننس ایکس مکعب فیکٹوریل 3 کے علاوہ یہ لامحدود رقم جہاں متبادل اصطلاحات مثبت اور منفی x جمع x ماننس 1 کے بارے میں جانتے ہیں ماننس 1 سے i پر غور کریں جو آپ سب ix نکلیں گے آئیے اب ہم ایک پیچیدہ عدد کو خالصتاً خیالی ای کی طاقت آپ سب اس سے بہت واقف ہیں اسی ib زیادہ جڑ ہے اور ہم اسے پیچیدہ نمبروں کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں درحقیقت ایک جمع سے پاور 4 پر فیکٹوریل 4 ix مکعب 3 پلس ix مربع پر فیکٹوریل 2 جمع ix جمع ix طرح پھیلانے سے ہم یہ حاصل کرتے ہیں 1 جمع مربع ماننس ون کے برابر ہے اس لیے i سے پاور سکس پر فیکٹوریل سکس وغیرہ ہم جانتے ہیں کہ ix سے پاور 5 پر فیکٹوریل پلس ix پلس مربع کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔ ماننس 1 ix اسے 1 جمع

تو ماننس ایکس مربع پر فیکٹوریل 2 ix پر پاور فور ایکس فور پر ایکس فور جمع i مکعب کے برابر ہے فیکٹوریل تھری ix کیوب ماننس i تو پاور فانیو پر فیکٹوریل پانچ وغیرہ اب حقیقی اصطلاحات اور خیالی اصطلاحات کو الگ کریں تو جو حاصل ہوتا ہے وہ ہے ایک ماننس ایکس مربع ہم فیکٹوریل ٹو پلس ایکس ٹو پاور فور پر فیکٹوریل فور ماننس ایکس ٹو پاور 6 پر فیکٹوریل 6 گنا ایکس ماننس ایکس مکعب فیکٹوریل 3 پلس ایکس پر پاور 5 پر فیکٹوریل 5 وغیرہ اب کیا آپ ان دونوں سیریز کو الگ الگ پہچانتے i وغیرہ پلس ہے لہذا ہم اسے کیا دیکھ x کے سوا کچھ نہیں ہے اور یہ سائن x cos میں کیا آپ دو کلاسوں کے بارے میں واپس ہم نے بحث کی ہے کہ یہ

کی $\cos x$ کی پاور e تو مجھے اس موضوع پر حتمی مسئلہ کرنے دیں

تک x کی طاقت e توسیع تلاش کریں ہمیں پہلے سے ہی

کی $\cos x$ توسیع معلوم ہے ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ

کی e توسیع لیکن

x ایک c صفر جمع c کو درج ذیل طریقے سے چلنا ہے اس سلسلے کو x کی طاقت $\cos x$ توسیع کیا ہوگی؟ اس طرح کے مسائل کے لیے c صفر c مکعب یہ محدود کثیر الجہتی میں ہے اور ہمیں فرد کو تلاش کرنے کی ضرورت ہے۔ کوفیشینٹس x تین c مربع جمع x دو c جمع وقت کی پیداوار کے طور پر اس کثیر الاضلاع کے $\cos x$ کو e to power x ٹو لامحدودیت تک اس لیے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ c one c مربع جمع x دو c جمع x کے برابر ایک c صفر جمع c سے $\cos x$ ہے x کی طاقت e طور پر لکھا جاسکتا ہے لہذا ہمارے پاس برابر ہے $\cos x$ کیوب پر فیکٹوریل تین اور x مربع کے برابر ہے فیکٹوریل ٹو پلس x جمع x ایک جمع x کی طاقت e مکعب اب x تین x دو c جمع x ایک c صفر جمع c کو قوت چار پر فیکٹوریل چار کو ضرب دیا گیا۔ بذریعہ x مربع پر فیکٹوریل ٹو پلس x ایک مائنس کی انفرادی قوت x مکعب تاکہ ہم دو کثیر الاضلاع کی مصنوع سے x تین c مربع

کی e توں کے عدد کو تلاش کر سکیں اور پھر اسے

دو وغیرہ کی قدریں حاصل کر سکتے ہیں c ایک c صفر c ہم x توسیع میں متعلقہ عدد کے ساتھ مساوی کر سکیں۔ پاور

سے پاور صفر ہو x تو مجھے پہلے چند پاور لاحقہ کے لئے کرنے دیں جب یہ

صفر 1 کے برابر ہے اب آئیے c صفر ہے ایک میں لہذا اس کا مطلب ہے کہ c تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ اس طرف کا عدد اس طرف ایک ہے یہ

ایک کو ایک سے ضرب دینے کا مطلب یہ c کا عدد طاقت ایک ہے x کو طاقت 1 پر غور کریں اس کی طرف اس کا عدد ایک ہے اس طرف x ہم

مربع حاصل کر سکتے x مربع کا گٹانک کیا ہے اس طرف ہمارے پاس ایک پر دو ہے ہم x مربع x ایک ایک کے برابر ہے اس طرف c ہے کہ

دو منفی نصف نصف کے c صفر مائنس نصف نصف کے برابر ہے c صفر ہائے دو کیا اس کا مطلب یہ ہے کہ c دو گٹا ایک مائنس c ہیں

برابر ہے۔ فور سی دو ایک کے برابر ہے مجھے اس طرف ایکس کیوب کے لیے ایک اور قدم بڑھنے دو اس طرف ہمارے پاس فیکٹوریل تھری کے

تین c تین مائنس نصف اس لیے c ایک سے دو کا مطلب ہے ایک بذریعہ چھ ہے برابر c تین مائنس c اوپر ایک ہے اس طرف ہمارے پاس

$\cos x$ پر x برابر ہے نصف جمع ایک بذریعہ چھ جو کہ برابر دو ضرب تین کے برابر ہے آپ کو معلوم ہو رہا ہے کہ عددی ای کی طاقت

تین کے برابر دو ہائے تین کے برابر ہے درحقیقت آپ یہ جاننے کی کوشش کر سکتے ہیں کہ c دو برابر ایک c کے برابر ایک c صفر ہے ایک

چار برابر ہے نصف سی پانچ برابر تین ہائے دس وغیرہ اس لیے دو سیریز کے گٹانک کا موازنہ کر کے جب ایک معلوم ہو c

تو ہم دوسری سیریز کے گٹانک حاصل کر سکتے ہیں۔ جس کے لیے گٹانک نامعلوم ہیں ٹھیک ہے طلباء اس کے ساتھ میں اپنے لیکچرز کو ایکسپونینشل

سیریز پر ختم کرتا ہوں امید ہے کہ میں نے مختلف قسم کے مسائل کا خیال رکھا ہے اور اس سے آپ کو سیریز کی

توسیع کے مسائل حل کرنے میں مدد ملے گی شکریہ آپ کا