

வணக்கம் , தலைப்பு வரிசை மற்றும் தொடர் பற்றிய விரிவுரைத் தொடருக்கு மீண்டும் வருக, இது இந்தத் தலைப்பில் எங்களின் ஆறாவது விரிவுரையாகும், வரிசை மற்றும் தொடர் என்ற இரண்டு சொற்கள் நாளுக்கு நாள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதை நினைவுகூருவதன் மூலம் தொடங்குவோம்.

வாழ்க்கை இந்த இரண்டு சொற்களும் நிகழ்வின் தொடர்ச்சியைக் குறிக்கப் பயன்படுகின்றன, அதனால்தான் நான் தொடர் சொற்பொழிவுகளைச் சொன்னேன், இருப்பினும் இந்த இரண்டு சொற்களின் வரிசை மற்றும் தொடர்கள் கணிதத்தில் தனித்தனியான பொருளைக் கொண்டுள்ளன என்பதை மனதில் கொள்ள வேண்டும். கடந்த விரிவுரையில் உறுதியளித்தபடி, ஒரு வரிசையின் விதிமுறைகளின் தொகையைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது, இது ஒரு ஜிபியின்  $n$  விதிமுறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு ஒரு சூத்திரத்தை நிறுவுவோம், ஒரு ஜிபி வடிவியல் முன்னேற்றம் என்பது ஒரு வரிசையாகும்.

நிலையான பூஜ்ஜியமற்ற எண்ணுடன் பெருக்குவதன் மூலம் முந்தைய காலத்திலிருந்து பெறப்பட்டது மற்றும் நிலையான பூஜ்ஜியமற்ற எண் அடுத்த வடிவியல் முன்னேற்றத்தின் பொதுவான விகிதம் என அழைக்கப்படுகிறது

ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றத்தின்  $n$

விதிமுறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவோம்.

$n$ th term  $ar^{n-1}$  etc, எங்களின் குறிக்கோள்,  $n$ th term வரையான  $ar^{n-1}$  ,  $ar^2$  ,  $ar^3$  square plus etc க்கு சூத்திரத்தைக் கண்டறிவதே ஆகும்  $sn$  க்கு ஒரு சூத்திரத்தைக் கண்டுபிடிக்க, முதலில் சிறிய வழக்கைத் தீர்ப்போம், அதாவது  $r = 1$  குறிப்புக்கு சமமாக கொள்வோம் இது அற்ப வழக்கைத் தீர்த்து வைக்கும்  $n$  மடங்குக்கு சமம், இப்போது மீதமுள்ள வழக்கைக் கருத்தில் கொள்வோம்  $r \neq 1$  க்கு சமமாக இருக்கக்கூடாது, நாம் விரும்புவது  $sn$  க்கு சமமான ஒரு கூட்டல்  $ar^{n-1}$  பிளஸ் போன்றவற்றுக்கான சூத்திரம்  $ar^{n-1}$  சக்தி  $n$  கழித்தல்  $1$  வரை நாம் பயன்படுத்துவோம் போன்ற எளிய தந்திரம் பின்வருபவை  $r$  நேரங்களைக் கண்டுபிடிப்போம், இது  $ar^{n-1}$  கூட்டல்  $ar^{n-2}$  சதுரம் கூட்டல் போன்றவற்றுடன் ஒத்துப்போகும் கடைசி காலத்தை  $r$  உடன் பெருக்கும்போது  $ar^{n-1}$  சக்தியாக மாறும் , உங்களுக்கான முந்தைய காலத்தை எழுதுகிறேன், அது  $ar^{n-2}$  சக்தி  $n$  கழித்தல்  $1$  ஆக இருக்கும். இப்போது பார்க்கிறீர்களா? சொற்கள்  $ar^{n-1}$  சதுரம் முதலியன  $ar^{n-1}$  பவர்  $n$  மைனஸ்  $1$  ரத்துசெய்யும் இந்த கழித்தல் செயல்பாட்டில் நாம் முடிவடையும் போது  $s$  மைனஸ்  $r^n$  சமமாக இருக்கும் முதல் சமன்பாட்டைக் கழிப்போம்.

$r \neq 1$  நேரங்கள்  $sn$  மற்றும் வலது பக்கத்தை ஒரு முறை  $1$  மைனஸ்  $r$  சக்தி  $n$  ஆக எளிமைப்படுத்தலாம், இதிலிருந்து நாம் எளிதாக  $sn$  ஐ தனிமைப்படுத்தலாம் , அனுமானத்தின் மூலம்  $r \neq 1$  அல்ல, எனவே  $1$  மைனஸ்  $r$  உடன் வகுத்தல் சாத்தியமாகும், எனவே நாம்  $sn$  ஐப் பெறுகிறோம் சமம் ஒரு முறை  $1$  மைனஸ்  $r$  சக்தி  $n$  ஆல்  $1$  கழித்தல்  $r$  ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றத்தின் முதல்  $n$  சொற்களின் கூட்டுத்தொகையை முதல் கால  $a$  மற்றும் பொதுவான விகிதமான  $r$  என்பது

$r$  என்பது  $1$  க்கு சமமாக இருந்தால்  $r \neq 1$  என்பது  $1$  மைனஸ்  $r$  சக்தி  $n$  ஆல்  $r$  என்பது  $1$  க்கு சமமாக இல்லாவிட்டால்  $1$  கழித்தல்  $r^n$  என்பது  $1$  க்கு சமமாக இல்லாதபோது,  $r$  பவர்  $n$  மைனஸ்  $1$  ஆல்  $r$  மைனஸ்  $1$  ஆகவும், எண் மற்றும் வகுப்பினை மைனஸ்  $1$  ஆல் பெருக்குவதன் மூலம் சூத்திரத்தை எழுதலாம், எனவே இது ஒரு ஜிபி  $i$  இன்  $n$  சொற்களின் கூட்டுத்தொகைக்கான நல்ல சூத்திரம்.

எல்லையற்ற தொகை அல்லது ஒரு தொடரைப் பற்றி உங்களுக்கு நினைவூட்ட இது ஒரு நல்ல நேரம் என்று நம்புகிறேன்.

உண்மையான எண்களை நாம் அவற்றில் முதல் இரண்டையும் சேர்க்கலாம், மேலும் இந்தத் தொகையில் ஒவ்வொரு முறையும் ஒரு சொல்லைச் சேர்த்துக் கொண்டே போகலாம், ஒவ்வொரு முறையும் செயல்முறை முடிவடையும் , மேலும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகையை வைத்திருக்கும் போது, விதிமுறைகள் சேர்க்கப்படும் வரிசையின்படி வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பைப் பெறுவோம்.

உண்மையில் ஒரு பொருட்டல்ல, அதேசமயம் , முடிவில்லாத தொகைக் குறிப்பு இருந்தால் , ஒரு நேரத்தில் ஒரு சொல்லைச் சேர்ப்பது போன்ற வெளிப்படையான காரணத்திற்காக, ஒரு வார்த்தையைச் சேர்ப்பது இரண்டாவதாக முடிவடையாது.

வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொகையை எண்ணிலடங்காத தொகையில், கூட்டல் செய்யும்போது விதிமுறைகள் கருத்தில் கொள்ளப்படும்

வரிசையை வேறுவிதமாகக் கூறினால் , எண்ணற்ற பல உண்மையான எண்களின் கூட்டுத்தொகையை முதலில் உண்மையான எண்கள் சில திட்டவட்டமான முறையில் வரிசைப்படுத்த வேண்டும் மற்றும் உண்மையான எண்களை வரிசைப்படுத்த வேண்டும்.

முடிவில்லாத தொகையை வரையறுப்பதற்கு, நாம் உண்மையான எண்களின் வரிசையைக் கொண்டு தொடங்க வேண்டும், மாறாக உண்மையான எண்களின் வரிசையைக் காட்டிலும் உண்மையான எண்களின் வரிசையுடன் தொடங்க வேண்டும்.

சுருக்கத்திற்காக எழுதப்பட்ட கூட்டுத்தொகை குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி 1 க்கு சமமான  $n$  இன் முடிவிலி ஒரு தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது

இந்த வெளிப்பாட்டிற்கு ஒரு பொருளை எவ்வாறு ஒதுக்குவது என்பதை நினைவுபடுத்துவது இந்த வெளிப்பாட்டிற்கு ஒரு திட்டவட்டமான அர்த்தத்தை வழங்க , பகுதித் தொகைகளின் வரிசை சமமாக இருப்பதை நாம் முதலில் காண்கிறோம்.

$a_1$  plus  $a_2$  plus etcetera plus  $a_n$  ஆக ஒரு புதிய வரிசை உள்ளது  $s_n$   $n$  என்பது 1 க்கு சமமான 1 க்கு முடிவிலிக்கு சமம், இது கொடுக்கப்பட்ட வரிசை  $a$   $n$ ow இலிருந்து உருவாகிறது பகுதித் தொகையின் இந்த வரிசைக்கு என்ன நடக்கிறது என்பதை நாங்கள் கவனிக்கிறோம் ,  $n$  துல்லியமாக இருக்க பெரியதாக மாறும்போது,  $n$  வரம்பு  $n$  முடிவிலிக்கு முனைவதைக் காண்கிறோம்.

வரம்பு உள்ளது , அது ஆம் எனில், இது ஆம் என்பது அந்தத் தொடரின் கூட்டுத்தொகையாகக் கருதப்படுகிறது அல்லது துல்லியமாக நாம் எழுதும் தொடரின் மதிப்பு  $s$  என்பது கூட்டுத்தொகைக்கு சமம்  $n$  என்பது முடிவிலி  $a$  க்கு சமம் 1 மற்றும் தொடர்  $a$  என்பது தொகுக்கக்கூடியது அல்லது தொழில்நுட்ப ரீதியாக குவிந்துள்ளது என்று கூறுகிறோம்.

ஒரு எல்லையற்ற தொகைக்கு வேறு வார்த்தைகளில் அர்த்தம் உள்ளதா என்பதைப் பார்க்க, ஒரு தொடர் ஒன்றுபடுகிறதா என்பதை வேறு வார்த்தைகளில் சுருக்கமாக இருக்கிறதா என்பதைப் பார்க்க, முதலில் பகுதித் தொகைகளின் வரிசையைக் கண்டறிய வேண்டும், பிறகு  $n$  பெரியதாகவும் பெரியதாகவும் மாறும் போது பகுதித் தொகையின் இந்த வரிசைக்கு என்ன ஆகும் என்பதை ஆராய்வோம்.

இதை மனதில் வைத்துக்கொண்டு, எல்லையற்ற தொடரில் சிலவற்றைச் சமாளிக்க முயற்சிப்போம், அதாவது வடிவியல் தொடரின் வடிவியல் தொடரின் மூலம், அதாவது வடிவியல்  $p$  இலிருந்து உருவான தொடர் என்று அர்த்தம்.

ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றம் என்பது ஆரார் சதுர வடிவத்தின் ஒரு வரிசை என்பதை நினைவில் கொள்ளுங்கள் , எனவே இப்போது அதன் கூட்டுத் தொடரின் கூட்டுத்தொகைத் தொடரைக் கையாள்வோம்.

$n$  மைனஸ் 1  $n$  என்பது 1 க்கு சமமானது முடிவிலி வடிவியல் தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது, இப்போது ஜியோமெட்ரிக் தொடர் என்பது சில மொபைலாக உள்ளதா என்பது கேள்வி என்னவென்றால் , ஒரு தொடரின் சில திறன்கள் பகுதித் தொகைகளின் வரிசை குவிந்துள்ளதா இல்லையா என்பதைக் கண்டறியும்.

இந்த வடிவியல் தொடரானது பகுதித் தொகையின் வரிசையாகக் கருதப்படும் வரை, அதாவது முதல்  $n$  சொற்களின் கூட்டுத்தொகை ஏற்கனவே கண்டறியப்பட்டுள்ளது அதற்கான சூத்திரம் எங்களிடம் உள்ளது என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும் , பகுதித் தொகையின் வரிசையானது  $r$  க்கு சமமாக இருந்தால்  $na$  மற்றும்  $r$  சக்தியில்  $n$  கழித்தல் 1 ஆல்  $r$  கழித்தல் 1 என்றால்  $r$  1 க்கு சமமாக இல்லை, எனவே ஒரு வடிவியல் தொடர் சுருக்கமாக உள்ளதா என்று பதிலளிக்க, இறுதியாக அது ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட எண்ணைக் குறிக்கிறதா இல்லையா என்பது  $n$  பெரியதாகவும் பெரியதாகவும் மாறும்போது பகுதித் தொகை  $s_n$  இன் இந்த வரிசைக்கு என்ன நடக்கிறது என்பதை ஆராயுங்கள்,  $r$  என்பது 1 க்கு சமமாக இருக்கட்டும் , பொதுவான விகிதம் 1 குறிப்பு, அந்த வழக்கில்  $s_n$  என்பது  $na$  ரீகால்  $a$  க்கு சமம் என்பது ஒரு நிலையான உண்மையான எண் எனவே  $n$  பெரிதாகவும் பெரியதாகவும் மாறுகிறது அதாவது  $na$  அளவு பெரியதாக மாறுகிறது ,  $n$  முடிவிலிக்கு முனைவது முடிவிலிக்கு முனைகிறது அல்லது மிகப் பெரியதாக மாறுகிறது அல்லது மிகச் சிறியதாக மாறுகிறது என்பது தெளிவாக இருக்க வேண்டும்.

ஒரு சைனைப் பொறுத்து கூட்டல் அல்லது கழித்தல் முடிவிலிக்கு இது 1 க்கு சமமான வழக்கு  $r$  ஆகும், எனவே இந்த விஷயத்தில் பகுதித் தொகையின் வரிசையானது ஒரு நிலையான உண்மையான எண்ணுக்கு அருகில் வரவில்லை என்பதை நாம் கவனிக்கிறோம் தொழில்நுட்ப மொழி வரம்பு  $sn$  இல்லை இந்த வழக்கில் வடிவியல் தொடர்கள் ஒன்றிணைக்கப்படவில்லை அல்லது சுருக்கமாக இல்லை.

$s$  கழித்தல்  $a$  அடுத்தது  $ar$  சதுரம், இது ஒரு மற்றும் அதன் விளைவாக  $s - 1$  என்பது பகுதித் தொகையின் வரிசையாக இருக்கும் முதல் ஒரு வினாடி பகுதித் தொகையின் முதல் ஒரு வினாடி வரிசை முதல் பதம் மற்றும் இரண்டாவது சொல் ஒரு கூட்டல் கழித்தல்  $a$  இது 0 பகுதித் தொகையின் மூன்றாவது வரிசை ஒரு கூட்டல் கழித்தல்  $a$  plus  $a$  ஆக இருக்கும், அது  $a$  ஆக இருக்கும், மேலும் பகுதித் தொகை  $sn$  இன் வரிசை  $a$  மற்றும் 0 க்கு இடையில் மாறி மாறி இருப்பதை நீங்கள் அவதானிக்க முடியும்.

$n$  பெரிதாகி, பெரிய  $sn$  ஆனது எந்த எண்ணையும் நெருங்காது, அது  $a$  மற்றும் 0 க்கு இடையில் ஊசலாடிக் கொண்டே இருக்கும், அது  $a$  அல்லது 0 ஆக இருக்கும், இது ஒரு நிலையான எண்ணுக்கு அருகில் நிலையானதாக இருக்காது, எனவே இந்த விஷயத்தில் வரம்பு  $n$  முடிவிலிக்கு முனைகிறது.

பகுதித் தொகையின் வரிசைக்கு வரம்பு இல்லை என்பதால், இந்த வழக்கில் வடிவியல் தொடர் கூட்டுத்தொகை  $ar$  சக்தி  $n$  மைனஸ் 1 என்பது தொகுக்கப்படாது என்று முடிவு செய்கிறோம்.

1 முதல் மைனஸ் 1 வரை.

இப்போது  $r$  என்பது ஒன்றல்ல அல்லது கழித்தல் 1 என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்  $n$  பெரிதாகவும் பெரியதாகவும் மாறும் போது  $sn$  ஐ 1 மைனஸ்  $r$  மைனஸ்  $ar$  சக்தி  $n$  என்று 1 மைனஸ்  $r$

என்று எழுதலாம் என்பதை கவனிக்கவும்  $n$  பெரியதாக மாறுவதால்,  $n$  இரண்டாவது வார்த்தைக்கு என்ன நடக்கும் என்பதை ஆராய்ந்தால் போதும் அதாவது  $r - 1$  காற்புள்ளி மைனஸ் 1 க்கு சமமாக இல்லை இரண்டு வகைகளாக ஒரு முறை கண்டிப்பாக 1 ஐ விட குறைவாக இருக்கும், அதாவது  $-1$  மற்றும் 1 க்கு இடையில் இருக்கும்  $R$  இன் மதிப்புகளில் நாங்கள் ஆர்வமாக உள்ளோம், இவை இரண்டும்  $\text{mod } r - 1$  க்கும் குறைவாக இருந்தால், நிச்சயமாக  $r$  இரண்டையும் எடுக்கலாம்.

நேர்மறை மற்றும் எதிர்மறை மதிப்பு ஆனால்  $\Delta$  கோழி அளவு 1 க்கும் குறைவாக இருப்பதால், சில  $m$  படிவம் 1 ல் இருக்கும்,  $m$  நிலையான இடத்தில் 1 ல் இருக்கும் படிவத்தில் இருக்கும், எனவே  $n$  பெரிதாகவும் பெரியதாகவும் மாறும்  $r$  பவர்  $n$  அதாவது  $1$   $m$  பவர்  $n$  சிறியதாகவும் சிறியதாகவும் மாறுகிறது, ஏனென்றால் 1 ஆல்  $m$  சக்தியில்  $n$  வகுத்தல் போதுமானதாகிறது,  $n$  பெரிதாகிறது, எனவே எனது முடிவு என்னவென்றால், இந்த விஷயத்தில் வரம்பு  $n$  முடிவிலிக்கு முனைகிறது எங்கள் சக்தி  $n$  பூஜ்ஜியமாக இருக்கிறது என்பதை மீண்டும் சொல்கிறேன், நாங்கள் ஆர்வமாக உள்ளோம்  $r$  மதிப்புகள் நிலையானது ஆனால் மைனஸ் 1 மற்றும் 1 க்கு இடையில் உள்ளது. அப்படியானால்  $r$  என்பது படிவம் 1-ன் சில எண்கள் என எண்ணலாம்.

$m$  பவர் மூலம்  $nm$  ஆனது இப்போது  $n$  பெரியதாக மாறும்போது வகனம் மிகப் பெரியதாகிறது, அதனால் 1 மூலம்  $m$  சக்தி  $n$  0 க்கு நெருக்கமாகிறது, அதாவது நீங்கள் எவ்வளவு உள்ளூணர்வாக வாதிடலாம்  $n$  முடிவிலிக்கு முனைகிறது  $n$  பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமான சக்தி  $sn$  க்கு  $n$  தன்னிச்சையாக  $lar$  ஆகுவதை நாம் அவதானிக்கலாம்  $ge$ ,  $n$  வரம்பு  $r$  சக்தி  $n$  இருப்பதால்,  $n$  முடிவிலிக்கு முனைவது பூஜ்ஜியமாக இருப்பதால், இரண்டாவது சொல் 0 க்கு அருகில் ஆகிறது, எனவே  $n$  பெரியதாக இருப்பதால் இரண்டாவது சொல் எதுவும் பங்களிக்காது, மேலும்  $n$

முடிவிலிக்கு முனையும்  $n$

வரம்பை 1 மைனஸ்  $r$  ஆகக் குறைக்கிறோம்.

எல்லையற்ற தொடரின் வரையறையை நீங்கள் நினைவு கூர்ந்தால் அல்லது எல்லையற்ற தொடர் வரம்பின் பகுதித் தொகையின் ஒருங்கிணைப்பை நாம் தொடரின் கூட்டுத்தொகை என்று அழைக்கிறோம், எனவே இந்த வழக்கில் கூட்டுத்தொகை  $ar$  சக்தி  $n$  கழித்தல் 1  $n$  என்பது முடிவிலிக்கு 1 க்கு சமம் என்று முடிவு செய்கிறோம்.

$a$   $g$  இன் அனைத்து விதிமுறைகளின் கூட்டுத்தொகை 1 மைனஸ்  $r$  ஆகும், இதுவரை நாம் வழக்கை  $r$  க்கு சமமான மைனஸ் 1  $r$  க்கு சமமான 1 ஐ மட்டுமே விவாதித்தோம், மேலும் வழக்கு  $r$  மைனஸ் 1 மற்றும் 1 க்கு இடையில் உள்ளது.

இப்போது  $r$  என்பது வெளியில் சில நிலையான எண்ணாக இருக்கும்.

ஒரு  $r$  ஐ விட அதிகமாக இருக்கும் இந்த மதிப்புகள் பாசிட்டிவ் அல்லது நெகடிவ் ஆக இருக்கலாம் ஆனால் அளவை விட அதிகமாக உள்ளது என்பதை இப்போது பார்க்கவும்  $n$  இன்ஃபினிட்டி மோட்  $r$  பவர்  $n$  க்கு செல்கிறது, ஏனெனில்  $r$  மைனஸ் 1 1 மோட் 1 ஐ விட அதிகமாக உள்ளது என  $n$  டிண்டிங் டி ஓ முடிவிலி உங்களிடம் உள்ளது அந்த மோட்  $r$  பவர்  $n$  பெரியதாகவும் பெரியதாகவும் 2 பவர்  $n$  போன்றதாக மாறுவதை நீங்கள் பார்க்கலாம் 2 4 பின்னர் 8 பின்னர் 16 மற்றும்  $n$  அதிகரிக்கும் போது சக்தி காலவரையின்றி அதிகரிக்கிறது எனவே இது முடிவிலி இதை மனதில் வைத்து மீண்டும் செல்கிறது  $sn$  இன் வெளிப்பாடு,  $n$  என்பது பெரியதாக மாறும்போது இந்தச் சொல், அதாவது 1 மைனஸ்  $r$  என்ற இரண்டாவது சொல்  $ar$  சக்தி  $n$  என்பது

ஒரு நிலையான உண்மையான எண்ணுக்கு அருகில் வராதது, வேறுவிதமாகக் கூறினால், அது ஒன்றிணைவதில்லை, எனவே வரம்பு  $sn$  என்பதும் இல்லை எனவே வரம்பு  $n$  இன்ஃபினிட்டிக்கு முனைவது, தொடர் மொழியில் வைப்பதற்கு இல்லை, இது தொடர்புடைய தொடர்கள் சுருக்கமாக இல்லை என்று கூறுவதற்கு சமமானதாகும், இது கூட்டுத்தொகை  $ar$  சக்தி  $n$  கழித்தல்  $1/n$  என்பது 1 க்கு சமம், முடிவிலி என்பது 1 க்கு சமம், மோட் அதிகமாக இருக்கும் போது அது ஒன்றுபடாது.

ஒன்றை விட ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றத்தை தொகுக்கலாம்.

$r$  க்கு சமமான 1 க்கு அது ஒரு அற்பமான வழக்காக குறைக்கிறது அதாவது  $sn$  என்பது  $n$  மடங்குக்கு சமம் 1 முதல் முடிவிலி வரையிலான எல்லையற்ற வடிவியல் தொடர் கூட்டுத்தொகை  $ar$  சக்தி  $n$  கழித்தல் 1 ஐக்

கருத்தில் கொண்டால்,  $r < 1$  க்கு சமமாக இருக்கும்போது தொடர் ஒன்றிணைவதில்லை.

$r$  மைனஸ் 1 க்கு சமமாக இருக்கும் போது தொடர் ஒன்றுபடாமல் இருக்கும் போது வடிவியல் தொடர்கள்  $r$  மைனஸ் 1 மற்றும் 1 க்கு இடையில் இருக்கும் போது வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பைக் குறிக்கும்.

ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொழில்நுட்பரீதியில் வடிவியல் தொடர் ஒன்றுபடவில்லை, இந்த அவதானிப்பை இங்கே பதிவு செய்கிறேன்.

$1 \bmod r$  ஐ விட 1 ஐ விட குறைவானது,  $r$  இன் பிற மதிப்புகளுக்கு அனைத்து சொற்களின் கூட்டுத்தொகை 1 மைனஸ்  $r$  ஆகும் இந்த இரண்டு நிகழ்வுகளைத் தவிர்த்து பொதுவான விகிதமானது கழித்தல் 1 மற்றும் 1 க்கு இடையில் இருந்தால், இந்த முடிவை மீண்டும் நினைவில் வைத்துக் கொள்ளுமாறு நான் உங்களுக்கு பரிந்துரைக்கிறேன்.

வடிவியல் தொடர் 1 ஐ விட அதிகமாகவோ அல்லது சமமாகவோ தொகுக்க முடியாதது என்பதை இங்கே ஒரு செயலற்ற குறிப்பைக் குறிப்பிடுகிறேன்.

எல்லையற்ற வடிவியல் தொடரின் போது அது ஒருங்கிணைக்கும் போது நாம் கவனித்தோம்.

ஜியோமெட்ரிக் தொடர்களை நாம் கவனித்த வடிவியல் தொடர்களைப் போலல்லாமல் மற்ற பல முடிவிலா தொடர்களில் உள்ள தொடர்கள் சுருக்கமானதா அல்லது குவிந்ததா என்ற கேள்வி, அதன் கூட்டுத்தொகை என்னவாக இருந்தாலும், இந்த இரண்டு கேள்விகளும் இரண்டு படிக்களில் தீர்க்கப்படும்.

தொடர் ஒன்றிணைந்ததா இல்லையா என்பதை ஆராய்வோம், பெரும்பாலான நிகழ்வுகள் ஒன்றிணைந்ததாகக் கண்டறியப்பட்டால்,

அதன் சில மதிப்பீட்டில் நாம் திருப்தி அடைய வேண்டும்.

உம் வேறு வார்த்தைகளில் சிலருக்கு வெளிப்பாட்டைப் பெறுவதற்குப் பதிலாக

, வடிவியல் தொடரின் விஷயத்தில் அது போன்ற எல்லையற்ற தொடர்களின்

கூட்டுத்தொகைக்கான சூத்திரம் அரிதானது,

இரண்டு உண்மையான எண்களைக் கொடுத்ததை நினைவுபடுத்துவோம்  $a$  மற்றும்  $b$  ஒரு

கேள்வியைக் கேட்டோம், ஒரு எண் மூலதனத்தைச் செருக முடியுமா?  $a$  மற்றும்  $b$  க்கு இடையில்

உள்ள இந்த மூன்று எண்களும் ஒரு எண்கணித முன்னேற்றத்தின் விதிமுறைகளை

உருவாக்குகின்றன, உண்மையில் எங்களிடம்  $aa$  பிளஸ்  $b$  க்கு 2 ஒரு சூத்திரம் இருந்தது,

மேலும் இந்த எண்ணை  $a$  மற்றும்  $b$   $am$  இன் எண்கணித சராசரி என்று அழைக்கிறோம், நாம் இதே போன்ற கேள்வியைக் கேட்போம்.

இப்போது  $ap$   $hgp$  என்பதற்குப் பதிலாக,

$a$  மற்றும்  $b$  என்ற இரண்டு உண்மையான எண்கள் கொடுக்கப்பட்டதாகக் கேள்வி

வாசிக்கப்படுகிறது, ஒரு எண் இருக்கிறதா,  $g$  ஐ அழைப்போம், அதாவது  $ag$  மற்றும்  $b$  ஒரு  $gp$  ஐ உருவாக்கும்  $a$  மற்றும்  $b$  க்கு எந்த நிபந்தனையும் விதிக்க வேண்டாம், அவை உண்மையானவை என்பதைத் தவிர,  $ag$  மற்றும்  $b$  வடிவியல் முன்னேற்றத்தின் விதிமுறைகளை உருவாக்கும்  $g$  என்ற எண்ணை எப்போதும் கண்டுபிடிக்க முடியுமா என்பது இந்தக் கேள்வியைத் தீர்ப்போம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்  $ag$  மற்றும்  $b$  என்பது ஒரு  $gp$  யின் தொடர்ச்சியான விதிமுறைகள் என்றால்,  $agb$  வடிவியல் முன்னேற்றத்தில் இருந்தால், இரண்டாவது காலத்தின் விகிதம் வேகமாக இரண்டாவது காலத்தின் விகிதத்துடன் ஒத்துப்போக வேண்டும்.

$g$  சதுரம்  $ab$  க்கு சமம் என்று சொல்வதற்கு சமம் எனவே  $g$  சதுரம்  $ab$  க்கு சமமான எண் உள்ளதா என்று கேள்வி கேட்கிறோம் சதுரம்  $aba$  க்கு சமம் மற்றும்  $b$  ஒரே அடையாளமாக இருக்க வேண்டும், எனவே கேள்வியை சிறிது மாற்றியமைப்போம்,  $a$  மற்றும்  $b$  என்ற இரண்டு நேர்மறை எண்களைக் கொடுத்து நம்மை நாமே கேட்டுக்கொள்ளுங்கள்,  $agb$  ஒரு  $gp$  ஐ உருவாக்கும் பதில் ஆம் என்றால், இதில்  $ab$  இன் வேராக  $g$  என்பதை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்.

வழக்கு  $agb$  ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றத்தை உருவாக்குகிறது மற்றும் இந்த  $g$  கொடுக்கப்பட்ட நேர்மறை எண்களின் வடிவியல் சராசரியாக குறிப்பிடப்படுகிறது, இரண்டு நேர்மறை எண்களின் மூலதனம் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வரையறையாக பதிவு செய்கிறேன், சிறிய  $a$  மற்றும் சிறிய  $p$  சிறிய  $pt$  ஐ எழுதுகிறேன்  $a$  மற்றும்  $b$  என்பதன் சுருக்கத்திற்கான வடிவியல் சராசரி  $gn$  என்பது  $a$  இன்  $gn$  என வரையறுக்கப்படுகிறது மற்றும்  $b$  என்பது  $ab$  இன் மூலத்திற்குச் சமம், இது எண்கணித சராசரியின் போது எண்கணித சராசரியைப் போன்றது, எங்களிடம் கூட்டல் மற்றும் வகுத்தல் உள்ளது, நாங்கள் கூட்டல் மற்றும்  $2$  ஆல் வகுக்கிறோம், இங்கே உங்களுக்கு பெருக்கல் உள்ளது.

மற்றும்

இரண்டு நேர்மறை எண்கள்  $a$  மற்றும்  $b$  ஆகியவற்றைத் தொகுக்க சக்திகளை எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம், இந்த இரண்டு எண்களின் வடிவியல் சராசரியை நீங்கள் எப்போதும் ஒரு எண் மூலதனம்  $g$  பெறலாம், இதனால் ஒரு மூலதனம் ஜிபி ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றத்தை உருவாக்குகிறது, இப்போது இதை கொஞ்சம் பொதுமைப்படுத்தி கேட்கலாம் பின்வரும் கேள்விக்கு இரண்டு நேர்மறை எண்கள்  $a$  மற்றும்  $b$  கொடுக்கப்பட்டால், நமக்குத் தேவையான பல எண்களைச் செருகலாம் ஆனால் ஒரு  $g_1$   $g_2$  போன்றவை  $gn$   $b$  ஆனது ஒரு வடிவியல் முன்னேற்றத்தை உருவாக்குகிறது,  $a$  மற்றும்  $b$  இரண்டு நேர்மறை உண்மையான எண்களைக் கொடுக்கிறது.

$g_1$   $g_2$  போன்ற  $gn$  ஐக் குறிப்பிடவும்,

அதனால் ஒரு  $g_1$   $g_2$  முதலியன  $g$  மற்றும்  $b$  படிவம்  $gp$  என்று பதில் நோக்கி  $gp$  எனக் கூறுங்கள் ஒரு ஜியோமெட்ரிக் முன்னேற்றத்தின் ஒரே தொடர்ச்சியான சொற்கள்  $b$  என்பது அந்த வடிவியல் முன்னேற்றத்தின்  $n$  பிளஸ்  $2$  காலமாக இருக்க வேண்டும்  $b$  என்பது  $n$  பிளஸ்  $0$  என்ற சொல்லில்  $n$  பிளஸ்  $0$  வாக இருக்க வேண்டும்.

$gp$  என்பது  $r$  ஆக இருக்கும்  $n$  பிளஸ்  $2$  சொல்

$ar$  சக்தி  $n$  கூட்டல்  $2$  கழித்தல்  $1$  என்ற சூத்திரத்தால் வழங்கப்படுகிறது, எனவே  $r$  சக்தி  $n$  கூட்டல்  $1$  ஆனது  $b$  க்கு சமம், இது  $r$  க்கு சமம்  $a$  மொத்தமாக பவர்  $1$  ஆல்  $n$  பிளஸ்  $1$ .

இப்போது நம்மிடம் முதல் கால  $a$  மற்றும் பொதுவான விகிதத்தை ஒரு பவர்  $1$  ஆல்  $n$  பிளஸ்  $1$  மூலம் இந்த விஷயம்  $b$  ஐப் பெற்றுள்ளோம், முதல் கால மற்றும் பொதுவான விகிதத்தைப் பெற்றவுடன், ஜியோமெட்ரிக் முன்னேற்றம் என்ன என்பதை முழுமையாகக் குறிப்பிடலாம் எனவே  $g$   $1$  ஆக உள்ளது ஜியோமெட்ரிக் முன்னேற்றத்தின் இரண்டாவது கால அளவு பொதுவான விகிதமாக இருக்கும், இது ஒரு முழு சக்தி  $1$  ஆல்  $n$  கூட்டல்  $1$  ஆல் ஒரு முறை  $b$  ஆகும்.

இதேபோல்  $g$   $2$  என்பது வடிவியல் முன்னேற்றத்தின் மூன்றாவது முறையாக இருக்கும், இது ஒரு முறை  $r$  சதுரமாக இருக்கும்.

முழு சக்தி  $1$  ஆல்  $n$  கூட்டல்  $1$  சதுரம் மற்றும்

அதனால் ஒரு முறை  $b$  ஆகும் இரண்டு நேர்மறை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றுக்கிடையே வரையறுக்கப்பட்ட பல உண்மையான எண்களைச் செருகுவது எப்போதுமே சாத்தியமாகும் என்று நாங்கள் முடிவு செய்கிறோம், இதனால் பட்டியல் ஜிபியை உருவாக்குகிறது, அடுத்த விரிவுரையில் ஜிபி மற்றும் ஏபியுடன் தொடருவோம் நன்றி