

سے لامحدود کے برابر  $1 = \text{ann}$  پہلے لیکچر سے تسلسل اور سیریز کے دوسرے لیکچر میں خوش آمدید یہ واضح رہے کہ ایک ترتیب سے کے طور پر لکھا گیا ہے  $a_2 a_3$  ہے  $1$  تک ہم حقیقی ترتیب کے بارے میں بات کر رہے ہیں اور کسی ترتیب کو بیان کرنے  $r$  سے  $f_n$  تو اس طرح پر ہمارا اصل مطلب ہے ایک فنکشن کے مختلف طریقے جن میں تکراری فارمولہ بھی شامل ہے کسی ترتیب کی ایک خاص اصطلاح اس کی پچھلی اصطلاح میں سے ایک یا زیادہ کے لحاظ سے ظاہر کی جاتی ہے اب آئیے ایک کی نمائندگی کرنے کی کوشش کریں ترتیب گراف کا استعمال کرتے ہوئے عام طور پر ایک ترتیب کو ایک سے لامحدود کے برابر ہے گراف کا استعمال کرتے ہوئے اس  $\text{ann}$  گراف کے ذریعہ دو طریقوں سے دکھایا جاتا ہے غور کریں کہ ترتیب  $a_2 a_3$  کی نمائندگی کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس ترتیب کی چند شرائط کو ایک حقیقی لائن پر نشان زد کریں آئیے ہم کہتے ہیں ایک  $1$  کو جڑ کے ذریعے  $\text{an}$  کے لامحدود کے برابر ہے جہاں  $1 = \text{ann}$  اور اسی طرح ایک مخصوص مثال سے یہ مزید واضح ہو جائے گا کہ ترتیب یہاں اصل  $t$  کے ذریعے دی جاتی ہے تاکہ ہم گراف کا استعمال کرتے ہوئے اس کی نمائندگی کریں۔  $n$  میں اصطلاح روٹ  $n$  دیا جاتا ہے ہے  $1 = \text{an as root n}$  محور  $0$  ہے وہاں  $1 2 3 4 5$  ہے اور اسی طرح اس دیے گئے تسلسل کی پہلی اصطلاح پر یعنی ہے روٹ  $2$  یہ  $2$  سے کم ہے  $1$  سے بڑا  $a_2$  تو یہ  $1$  ہے

تو یہاں کہیں  $3$  روٹ  $3$  بننے جا رہا ہے جو کہ روٹ  $2$  سے بڑا ہے آئیے ایک  $n$  تو یہ یہاں ہے اور ایک  $4$  ہے روٹ  $4$  جو کہ  $2$  ہے  $5$  ہے روٹ  $5$   $2$  سے بڑا لیکن  $3$  سے چھوٹا یہ گراف ہے۔ دی گئی ترتیب جڑ کی گراف کرنے کے لئے دیا جاتا ہے  $n$  کو  $1$  بذریعہ  $\text{bn}$  اصطلاح  $\text{nth}$  سے لامحدود کے برابر ہے جہاں  $1 = \text{bnn}$  اور مثال دیکھیں کہ ترتیب دو ایک سے دو ہے  $b$  ایک ایک ایک ہو جائے گا۔  $b$  اس سے ہمیں اصل لائن دیکھیں کہ تین ایک سے تین ہے جو ایک سے  $2$  سے کم ہے  $b$  دو ایک سے دو ہے جو صفر کے درمیان آدھے راستے پر ہے اور ایک  $b$  ایک  $b$  تو یہ ہے  $0$  اور آدھے کے درمیان  $b$  جو کہ آدھا  $4$   $\text{by}$  ہے  $1$   $4$   $b$  تو کہیں پر ہے اور اسی طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ترتیب کی شرائط صفر کے قریب اور قریب آ رہی ہیں یہ ایک طریقہ ہے ایک ترتیب کو گراف  $b_4$  تو یہ کے ذریعے پیش کریں ایک اور طریقہ یہ ہے کہ یاد رکھیں کہ ایک ترتیب ایک فنکشن ہے اور اس لیے ہم اس کی وضاحت کے لیے متعلقہ فنکشن کو  $n$  کو جڑ سے دیا جاتا ہے  $\text{an}$  سے لامحدود کے برابر ہے جہاں  $1 = \text{ann}$  مخصوص مثال کے ساتھ گراف کر سکتے ہیں، غور کریں کہ ترتیب کے برابر ہے اور ہم اس فنکشن کے گراف پر  $n$  تک متعلقہ فنکشن پر غور کرنا روٹ  $r$  سے  $n$  کی طرف سے دیے گئے  $f$  کے  $n$  کے  $n$  ہم ہیں کے ساتھ محور اور ایک پلاٹ پر غور کریں گے۔  $1$  کے مطابق  $n$  محور کے ساتھ پلاٹ کیے گئے  $x$  غور کرنے جا رہے ہیں لہذا اس کے لیے ہم محور فنکشن کی ویلیو روٹ  $1$  ہے جو کہ  $1$  ہے  $y$

محور پر پوائنٹس کو نشان زد کرتا ہوں جو کہ  $2$  سے مطابقت رکھتا ہے فنکشن کی قدر روٹ  $2$   $y$  تو پوائنٹ  $1$   $1$  ہے جو  $2$  کے مساوی ہے میں ہے لہذا ہم پلاٹ  $2$  کوما روٹ  $2$   $2$  یہاں ہے روٹ  $2$   $1$  اور  $2$  کے درمیان ہے۔ تو یہ  $2$  کوما روٹ  $2$  ہے اور  $3$  کے مطابق فنکشن کی ویلیو روٹ  $3$  ہے جو  $2$  سے کم ہے لیکن روٹ  $2$  سے زیادہ ہے تو یہاں کہیں  $3$  ہے۔ جڑ  $3$  سی  $4$  یا  $4$  کے مطابق فنکشن کی ویلیو روٹ  $4$  ہے جو  $2$  ہے لہذا ہم  $4$   $2$  وغیرہ کو پلاٹ کرتے ہیں اور یہ الگ تھلگ یہ ترتیب کو گراف کرنے کا ایک اور طریقہ ہے۔ یہ کہنے  $n$  جڑ کے برابر ہے  $\text{an}$  پوائنٹس ترتیب کے مطابق فنکشن کا گراف فراہم کرتے ہیں کے بعد آئیے ترتیب کے بنیادی تصور کو گراف کرنے کے لیے کچھ مثالوں کے ساتھ مشق کریں میں کچھ مسائل پیش کرنے جا رہا ہوں فارمولے کے برابر ہے۔ یہ تسلیم کرنا  $i$  جمع  $2$   $n$  میں  $n$  میں  $n$  اصطلاح  $n$  کے ذریعے دی گئی ترتیب کی پہلی پانچ اصطلاحات لکھیں اور ترتیب کی تک فنکشن کے  $r$  سے  $n$  چاہیے کہ ترتیب کی پہلی پانچ اصطلاحات کہنا قدرے الجھا ہوا ہے کیونکہ ہم نے ریمارکس دیے ہیں کہ ایک ترتیب کو کے ذیلی سیٹ  $n$  اور اسی طرح ہوگی یا اسے سمجھا جا سکتا ہے۔  $a_1 a_2 a_3$  طور پر سمجھا جا سکتا ہے اس صورت میں متعلقہ فہرست اور  $a_7 a_8$  تک ایک فنکشن کے طور پر اس صورت میں یہ ضروری نہیں ہے کہ ترتیب  $1$  سے شروع ہو یہ مثال کے طور پر  $6$   $r$  سے  $1$   $\text{ith n}$  شروع ہوتی ہے۔  $w$  اسی طرح ہو سکتا ہے لیکن جب تک کہ دوسری صورت میں وضاحت نہ کی جائے آئیے فرض کریں کہ ترتیب پر مشتمل ہے اور اسی طرح اس معاہدے کے ساتھ ہم دیے گئے ترتیب کی پہلی  $5$  اصطلاحات تلاش کریں گے  $a_2$  کے برابر ہے یعنی فہرست  $1$   $n$  پلگ لگانے سے حاصل ہوتا ہے  $a_2$  برابر ہے  $1$  سے  $3$  ہے  $n$  پہلی اصطلاح  $1$  سے  $1$  جمع  $2$  صرف پلگ کرنے سے حاصل کی گئی  $a_1$  کے برابر ہے  $3$   $n$  کو بدل کر حاصل کیا جاتا ہے  $a_3$  برابر  $2$  اس  $2$  میں  $2$  جمع  $2$  جو کہ  $2$  میں  $4$  ہے جو  $8$  کو  $4$  سے ضرب دیا جاتا ہے جس  $a_4$   $4$   $3$   $3$   $2$  کے ساتھ ضرب دیا جاتا ہے جس کی مقدار  $3$  ہوتی ہے۔  $5$  کے ساتھ ضرب جو  $50$  ہے کے برابر  $5$   $5$   $2$  میں جوڑ کر  $n$  میں  $\phi$  کو فارمولا  $a_5$  کی تعداد  $4$  جمع  $2$  سے ملتی ہے جو کہ  $4$  سے  $6$  ہے جو کہ  $24$  ہے اور حاصل کیا جاتا ہے۔  $5$  سے  $7$  جو کہ  $35$  کے برابر ہے فہرست  $3$   $8$   $15$   $24$  اور  $35$  پر مشتمل ہے یہ پہلی  $5$  اصطلاحات ہیں اگر آپ اسے ترتیب کے طور پر لکھنا چاہتے ہیں جمع  $2$  وغیرہ اور یہ ہمیشہ تجویز کیا جاتا ہے کہ اگر ممکن ہو  $n$  میں  $n$  تو یہ  $3$   $8$   $15$   $24$   $35$  وغیرہ ہوں گے اور نمبر نویں نمبر پر آئے گا۔

صرف پہلی چند اصطلاحات کو درج کرنے کے بجائے میرا مطلب ایک ترتیب  $\text{nction}$  کا  $n$  لکھیں  $fu$  میں جگہ پر بطور  $n$  تو اصطلاح کو کے لیے ہے جو اس مسئلے سے مطابقت رکھتا ہے اسے ہمیشہ  $3$   $8$   $15$   $24$   $35$  وغیرہ لکھنا پہلی چند شرائط کی وجہ سے بیٹرن ہمیشہ قابل  $n$  کو  $n$  میں جگہ عنصر  $n$  برابر ہے  $\text{an}$  شناخت نہیں ہو سکتا ہے آئیے ہم مثال کے ساتھ آگے بڑھتے ہیں فارمولے کے ذریعے دی گئی ترتیب کی پہلی چار شرائط تلاش کریں یقیناً یہ صرف عددی ہے لیکن آئیے ہم اسے مرحلہ وار کرتے ہیں تمام تفصیلات اس ترتیب کے مطابق پہلی  $4$   $\phi$  مربع جمع  $n$  میں  $n$  اصطلاح یعنی  $1$  ہے  $1$  میں  $1$  مربع جمع  $5$  بذریعہ  $4$  جو کہ حساب سے  $1$  سے  $6$  ضرب  $4$  تک کم ہو جاتا ہے جو ہو سکتا ہے۔  $3$  ہائے  $2$  میں آسان برابر ہے  $2$  میں  $2$  مربع جمع  $5$  بذریعہ  $4$  جو حساب کرنے پر  $2$  میں  $4$  جمع  $5$  بذریعہ  $4$  تک کم ہو جاتا ہے جو  $a_2$  کیا گیا۔ دوسری اصطلاح میں ہوگا۔  $3$  مربع جمع  $5$  بذریعہ  $4$  جو حساب سے  $3$   $3$   $a_3$  منسوخی سے  $2$  میں  $9$  ہائی  $4$  تک کم ہو جاتا ہے۔ تیسری اصطلاح کو آگے بڑھائیں میں  $3$  مربع تک کم ہو جاتا ہے  $9$   $9$  جمع  $5$  ضرب  $4$  ہے جو کہ  $3$  میں  $9$  جمع  $5$  ہے  $14$  ضرب  $4$  جو کہ ہو کر  $3$  سے  $7$  بذریعہ  $2$  ہو جاتا ہے جو چوتھی اصطلاح ہے کیونکہ سوال آپ سے پہلی چار اصطلاحات تلاش کرنے کا مطالبہ کرتا ہے  $4$   $\text{found}$  کہ آخری ٹرم میں  $21$  ضرب  $2$  ہے۔ میں  $4$  مربع جمع  $5$  بذریعہ  $4$  اور حساب کے حساب سے یہ  $4$  سے  $4$  مربع تک کم ہو جاتا ہے  $16$  جمع  $5$  ہائی  $4$  ہے جسے  $4$  میں لکھا جا سکتا ہے۔ ہائی  $4$  اور جو کہ پورا نمبر اکیس دیتا ہے  $21$

تو یہ تین ضرب دو نو ہائی دو اکیس ہائی دو اکیس ہوں گی امید ہے کہ میں نے حساب کتاب میں کوئی غلطی نہیں کی ہے۔ اگلی مثال کو دوبارہ چیک سے لامحدود کے برابر ہے  $1 = \text{ann}$  کرنے کے لیے ایک اچھی مشق ہے جو آپ سے ترتیب کی نویں اصطلاح کو تلاش کرنے کا مطالبہ کرتی ہے عام اظہار میں  $9$   $n$  کیوب میں نویں ٹرم دیا جاتا ہے یعنی نو پلگ لگا کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔  $n$  مائنس ون کو  $n$  کو مائنس  $1$  پاور  $\text{an}$  جہاں کے برابر ہے لہذا نو مرضی مائنس  $1$  پاور  $9$  مائنس  $1$  انٹ  $9$  مکعب جو کہ مائنس  $1$  پاور  $8$   $9$  مکعب کے برابر ہے جو کہ مائنس  $1$  پاور  $8$  ہے  $1$  اور  $9$  مکعب  $81$  میں  $9$  ہے جو کہ  $7$   $2$   $9$  ہے جو اگلے میں پچھلے مسئلے کو حل کرتا ہے۔ مثال کے طور پر آپ کو ترتیب ترتیب کی پہلی تین

فارمولے کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے  $a_n$  is equal to one to infinity were an بیس آپ کو خرگوش کے مسئلے کو یاد کرنے کا  $a_1$  اور  $a_2$  کے لئے مائنس 1 مائنس 1 کے برابر ہے اور  $n$  سے زیادہ  $a_n$  کے لحاظ سے ایک لکھنے کے بجائے ہم اس کی پچھلی اصطلاحات کے لحاظ سے ایک ترتیب کو اس طرح بیان  $n$  مشورہ دوں گا مثال کے طور پر یا اسے کہتے ہیں۔ recurrence relation ویں اصطلاح کو پچھلی اصطلاحات کے لحاظ سے ظاہر کیا جاتا ہے اسے  $n$  کرتے ہیں کہ  $a_2$  کی تسلسل کی تکراری تعریف کہلاتی ہے اور یہاں آپ کو مائنس 1 مائنس 1 کے برابر تکراری تعریف دی گئی ہے اور تکرار کا آغاز 1 اور سے زیادہ  $n$  ہے 2 جو کہ ہے۔ اس کو دیکھتے ہوئے آپ  $a_2$  اصطلاحات سے ہوتا ہے جو کہ 2 کو دیا جاتا ہے۔ حقیقت میں ایک 1 ہے 2 اور کے  $n$  کو پچھلی اصطلاح مائنس 1 کے طور پر بیان کیا گیا ہے اس لیے ایک 3 کو 2 کے برابر  $a_n$  کے لیے تکرار شروع کر سکتے ہیں 2 دیا جائے گا۔ 2 مائنس 1 ہونا جو 1 ہے لہذا آپ کو مشاہدہ کرنا چاہئے کہ اس صورت کے  $a_2$  برابر رکھا جائے گا ایک 3 ایک 2 مائنس 1 اور کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے کسی خاص اصطلاح کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں پچھلی  $n$  برعکس جہاں ترتیب کو ایک فارمولے کے ساتھ اصطلاح تلاش کرنی پڑ سکتی ہے اور پھر اسے پلگ کرنا پڑ سکتا ہے۔ پچھلی اصطلاح اور اسی طرح آگے چلیں ایک اور مثال کے ساتھ جاری رکھیں کا استعمال کرتے ہوئے بیان کیا  $a_n$  is equal to one to infinity were an ترتیب کی پہلی سے چار اصطلاحات تلاش کریں سے بڑا یا مساوی دیکھیں کہ اس مثال میں  $a_n$  is equal to  $n$  in minus 1 for  $n \geq 2$  اور  $a_1$  is equal to 3 کے لیے تکرار تعلق کا استعمال کرتے ہوئے 3 گنا 1 ہے  $a_2$  بھی تسلسل کو تکرار کے تعلق کے ساتھ بیان کیا گیا ہے پہلی اصطلاح 3 ہے دوسری اصطلاح میں ہم نے پہلے پایا ہے جو 3 میں 3 مربع ہے جو 3 مکعب  $a_2$  اور  $a_2$  جو 3 سے 3 مربع ہے۔ تیسری اصطلاح ایک 3 برابر ہے۔ 3 کے برابر ہے جو ہم نے پچھلے مرحلے میں پایا ہے اور جس کی مقدار  $a_3$  ہے 3 گنا 3 یہ تکراری تعریف کے مطابق ہے جو 3 گنا 4 ہے  $a_4$  کے لحاظ سے ایک  $n$  تین طاقت چار ہے یہ چار اصطلاحات ہیں جو ڈھونڈنے کے لیے کہی گئی ہیں لیکن پھر اس مثال میں دیکھتے ہیں کہ کیا ہم recurrence relation کا استعمال کرتے ہوئے  $a_n$  minus 1 recurren relation تلاش کر سکتے ہیں یاد رکھیں کہ  $a_n$  minus 1 relation  $a_n$  minus 1 میں 2 میں 3 ہے اور مائنس 2 3 میں مائنس 3 ہے اور اسی طرح اسے لگاتار لاگو کرنے پر ہم دیکھیں  $a_n$  minus 1 مائنس 1 سمجھا جا سکتا ہے۔ تاکہ 3 کی طاقت جس کے ساتھ 1 کو ضرب کیا جائے 3 کی  $n$  مائنس  $n$  گے کہ یہ 1 بار ہوگا مشاہدہ کہ 1 کو مائنس 1 پیٹرن کو دیکھیں جب ہمارے پاس مائنس 1 کی طاقت 3 ہے 1 ہے جب ہمارے پاس مائنس 2 کی طاقت 3 ہے 2 اور اسی طرح جب  $n$  طاقت کو 3 دیا جاتا ہے  $a_1$  مائنس 1 ہے  $n$  مائنس 1 ہے 3 کی طاقت  $n$  ہم ایک 1 ہے جو ایک مائنس ہے حالانکہ اس طرح کی ترتیب کو تکراری تعریف کے لحاظ سے دیا گیا ہے  $m$  مائنس 1 انٹ 3 ہے جو کہ اس مثال میں 3 پاور  $n$  تو یہ 3 پاور ویں اصطلاح کے  $n$  کے لحاظ سے ایک لکھ سکتے ہیں اسے بند شکل کا اظہار کیا جاتا ہے۔  $n$  اس ریفریو تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم کو دیا جائے  $n$  کے فنکشن کے طور پر کیا جاتا ہے تاکہ کسی بھی  $n$  کا اظہار  $a_n$  کے لیے سے مطابقت رکھنے والی اصطلاح کیا ہو گی، بغیر پچھلی اصطلاحات کو تلاش کیے اس  $n$  تو ہم براہ راست یہ تلاش کر سکتے ہیں کہ دی گئی کے لحاظ سے کیا گیا ہے۔ کلورڈ فارم ایکسپریشن کہلاتا ہے یہ مثال یہ بتاتی ہے کہ ایسے  $n$  کا اظہار مکمل طور پر  $a_n$  طرح جس میں معاملات ہیں جہاں اگرچہ ترتیب کو اصل میں ایک تکراری تعریف یا تکرار تعلق کے لحاظ سے ظاہر کیا جاتا ہے بالآخر ہم اسی ترتیب کے لیے ایک بند شکل کے اظہار کے ساتھ آ سکتے ہیں جسے تکرار کے تعلق کو حل کرنا کہا جاتا ہے۔ کورس کے دیے ہوئے تکرار کے تعلق کو حل کرنے کے لئے ایک منظم نظریہ ہے ہم اس کی تفصیلات میں نہیں جا رہے ہیں لیکن اس مثال کی کے لحاظ سے ترتیب کی  $n$  توقع کی جاتی ہے اس بات پر روشنی ڈالی کہ ایسے معاملات ہیں جہاں تسلسل کے لیے دیے گئے تکراری تعلق کو کے یہ کہنے کے بعد فارمولے کے بجائے تکراری  $n$  ویں اصطلاح کو حاصل کرنے کے لیے حل کیا جا سکتا ہے، ایسے معاملات ہیں جہاں  $n$  سے  $a_n$  1 تعلق کو ترجیح دی جاتی ہے۔ کچھ اور مثالوں کے ساتھ جاری رکھیں لیکن اس بار مختلف ارادے کے ساتھ غور کریں کہ ترتیب by  $n$  کے برابر  $a_n$  کے لحاظ سے دیا گیا ہے ایکسپریشن کا استعمال کرتے ہوئے  $n$  کو  $a_n$  ویں اصطلاح  $n$  لامحدود کے برابر ہے جہاں واضح ہونے کے لئے میں کچھ لکھتا ہوں۔ اس ترتیب کی اصطلاحات پہلی ٹرم ہے 1 سیکنڈ ٹرم ہے 1 بائی 2 تیسری ٹرم ہے 1 بائی 3 چوتھی ٹرم 1 بائی 4 ہے اور اسی طرح آگے یاد کریں اسی چیز کو گرافی طور پر دو طریقوں سے بیان کیا جا سکتا ہے مجھے پہلا طریقہ استعمال کرنے دو اصلی محور میں اصطلاحات کو نشان زد کرنے کے لیے یہ اصلی محور ہے جس میں قدرتی اعداد ہیں یا خاص طور پر غیر منفی عدد کے ساتھ پہلی اصطلاح 1 ہے

by 4 یہاں کہیں 4 ہے by 3 1 ہے  $a_3$  اور 2 by 1  $a_2$  is تو یہ 1 سیکنڈ ٹرم ہے 1 بائی 2 یہ 0 اور 1 ویں کے درمیان ہے 4 اور کے درمیان ہے  $a_2$  یہ 0 اور ہے اور اسی طرح آپ یا  $a_4$  تو یہ

تو ترتیب میں عناصر کی فہرست سے مشاہدہ کرتے ہیں یا سے ہم نے جو گراف بنایا ہے کہ جیسے جیسے ہم ترتیب کے اختتام کی طرف بڑھتے  $n$  ہیں ایک ایک سے دو ایک 3 1 بائی 4 وغیرہ وغیرہ اصطلاحات 0 کے قریب سے قریب تر ہوتی چلی جاتی ہیں کیونکہ جیسے جیسے آپ ترتیب میں اضافہ ہوتا ہے  $n$  کے اختتام کی طرف بڑھتے ہیں اس کے مطابق تعداد بڑھ جاتی ہے۔ مقام اول، دوسرا، تیسرا اور اسی طرح بڑھتا ہے جو کہ کم ہوتا جاتا ہے اور یہ آخر کار 0 کے قریب آتا  $n$  بڑھتا ہے 1 سے  $n$  ہوتی ہے لہذا جیسے جیسے  $n$  ویں مقام پر ہونے والی تعداد 1 سے  $n$  ہے

تو اس حوالے سے مشاہدہ مثال یہ ہے کہ جب ہم دوسرے لفظوں میں ترتیب کے اختتام کی طرف بڑھتے ہیں جیسے جیسے ہم اصطلاح میں اضافہ کرتے ہیں

سے واضح ہے جو صفر کی طرف بڑھتا ہے اس کو ذہن میں رکھتے  $a_1$   $a_2$   $a_3$   $a_4$  تو ایک مقررہ نمبر صفر کے قریب ہو جاتا ہے جو گراف وغیرہ پر غور کریں جیسا کہ میں نے آپ کو 2 by 2 by 3 3 by 4 ہوئے آئیے آگے بڑھتے ہیں۔ ایک اور امتحان براہ کرم ترتیب 1 0 پہلے بتایا تھا کہ اگر ممکن ہو تو یہ لکھنا ہمیشہ تجویز ہوتا ہے کہ اگر آپ پیٹرن کو دیکھیں ویں جگہ پر اصطلاح کیا ہے اس ترتیب پر غور کریں اب ہم اسی طرح کی مشق کرتے ہیں جیسا  $n$  ہے اور اسی طرح by  $n$  مائنس 1  $n$  تو یہ بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے اسے کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ  $n$  کہ پچھلی مثال میں ہے کہ آئیے دیکھتے ہیں کہ اس ترتیب کا کیا ہوتا ہے کیونکہ گراف ڈرا کریں میرا مطلب ہے پہلے طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے گراف کا استعمال کرتے ہوئے ترتیب کی نمائندگی کریں۔ میں نے تجویز کیا کہ یہاں صفر ہے یہاں 1 ہے آئیے ہم کہتے ہیں 2 اور اسی طرح پہلی اصطلاح 0 ہے یہ 1 دوسری اصطلاح ہے 1 بائی 2 جو 0 اور 1 کے درمیان ہے یہ 8 ہے 2 تیسری اصطلاح 2 ضرب 3 ہے جو زیادہ ہے 1 بائی 2 سے آپ اس کا مشاہدہ کر سکتے ہیں لیکن یہ 1 سے کم ہے سے بڑا ہے  $a_3$  پھر 1 سے کم ہے کیونکہ یہ 3 بائی 4 ہے لیکن یہ  $a_4$  ہے  $a_3$  تو کہیں پر سکس اور اسی طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اصطلاحات  $a_n$  تو یہاں کہیں اور اسی طرح آپ زیادہ سے زیادہ پوائنٹس کا مشاہدہ کر سکتے ہیں۔ ایک کے قریب اور قریب آتا ہے اسے پلاٹ پر بھروسہ کیے بغیر مختلف انداز میں بھی دیکھا جا  $c$  oncerned جہاں تک اس مثال کی ہے کو 1 کے طور پر  $n$  minus 1 by  $n$  ویں اصطلاح یعنی  $n$  لکھتے ہیں اور اسی طرح 2 by 2 by 3 by 2 سکتا ہے آئیے ہم اصطلاح 1 0 کیا اب یہ شرائط 0 نہیں ہیں دوسری ٹرم دراصل 1 مائنس 1 بائی 2 تیسری ٹرم ہے 1 مائنس 1 بائی 3 دوبارہ لکھا جا سکتا ہے۔ مائنس 1 بذریعہ

بڑا ہوتا ہے  $n$  ہوتا ہے بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے جیسے ہی  $n$  ہے اب کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں جب  $m$  اور اسی طرح نویں ٹرم 1 مائنس 1 ہائی کے  $n$  وہ اعداد 1 کے قریب آجائے۔ اس طرح جہاں تک اس خاص مثال کا تعلق ہے  $n$  کے قریب آتا ہے تاکہ 1 منفی 1 بذریعہ  $\theta$   $n$  بذریعہ 1 بڑھنے کے طور پر یا جب آپ ٹیل اینڈ کی طرف بڑھتے ہیں۔ ترتیب کی شرائط 1 کے قریب اور قریب آرہی ہیں۔ پچھلی مثال میں یاد کریں یعنی  $n$  بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے اصطلاحات  $\theta$  کے بہت قریب ہوتی جارہی تھیں اور اس مثال میں جیسے جیسے  $n$  جیسے جیسے  $n$  ترتیب 1 بذریعہ اصطلاحات 1 کے قریب سے قریب  $nd$  کی طرف بڑھ رہے ہیں۔ ترتیب کی  $e$  بڑا ہوتا جاتا ہے اور یہ کہنے کا دوسرا بڑا طریقہ یہ ہے کہ آپ کے لامحدود کے برابر ہے واضح کرنے کے لیے آئیے 1  $nn$  تر ہوتی چلی جاتی ہیں۔ آئیے ایک اور مثال کے ساتھ جاری رکھیں یعنی ترتیب روٹ ہے اور اسی طرح  $n$  ٹرم پر روٹ  $n$ th چند مزید اصطلاحات 1 جڑ 2 دوسری اصطلاح جڑ 3 تیسری اصطلاح اور اسی طرح درج کرتے ہیں۔ بڑا اور بڑا ہوتا جاتا  $n$  یہ ایک لامحدود ترتیب ہے آئیے ہم اس مشق کو کریں جو ہم پہلے کر چکے ہیں یعنی مشابہہ کرنے کی کوشش کریں کہ جب

بڑا ہوتا ہے مثال کے طور پر سو کی جڑ جو ہے دس ہزار کی دو جڑ کی جڑ سے بڑا ہے دس ہزار  $n$  بڑا ہوتا ہے  $n$  تو کیا ہوتا ہے یاد رکھیں جب

کی جڑ سے بڑا ہے یعنی 10 اور اسی طرح جب آپ ترتیب کے اختتام کی طرف بڑھتے ہیں 100 آپ اصطلاحات کی قدر میں  $go\ on$  تو اصطلاحات بڑی سے بڑی ہوتی جارہی ہیں اور یہ ترقی اس معنی میں قابل کنٹرول نہیں ہے جیسے آپ بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے ترتیب کی  $n$  اضافہ کر سکتے ہیں اس طرح اس مثال میں پچھلی مثال کے برعکس ہم یہ نہیں دیکھتے کہ جیسے جیسے

کے قریب ہوتی جاتی ہیں۔ آرٹیکولر ویلیو اگر آپ اسے گراف کرتے ہیں  $pa$  اصطلاحات کچھ تو یہ ایسا ہوگا جیسے پہلی اصطلاح ہے 1 دوسری اصطلاح ہے جڑ 2 جو 1 سے بڑی ہے تیسری اصطلاح ہے جڑ 3 جو 1 سے بڑی ہے اور جڑ جو جڑ 4 ہے جو 2 ہے اور اسی طرح میں جو بھی بڑی تعداد دیتا ہوں آپ اس ترتیب میں ایک اصطلاح تلاش کرسکتے 4  $a$  سے بھی بڑی ہے۔ 2 ہیں جیسے کہ وہ اصطلاح میرے ذریعہ دی گئی تعداد سے بڑی ہے مثال کے طور پر فرض کریں کہ میں 100 کہتا ہوں آپ ہمیشہ اس ترتیب میں سے بڑی اصطلاح تلاش کرسکتے ہیں مثال کے طور پر اگر آپ ایک 1001 تلاش کریں یہ اصل میں دس ہزار اور ایک کی جڑ ہوگی اور دس 100 ہزار کی جڑ اور ایک سو سے بڑا ہے

تو سو دیا گیا میں ایک اصطلاح تلاش کرسکتا ہوں یعنی دس ہزار ایک اصطلاح جو سو سے بڑی ہے اب فرض کریں کہ میں اس سے بڑا دوسرا نمبر مل سکتی ہے جیسے جیسے آپ آگے بڑھتے  $am$  سے زیادہ ایک اصطلاح  $k$  دیتا ہوں۔ سو پھر بھی آپ کو دوسرے الفاظ میں دیے گئے نمبر جاری ہیں ترتیب کی اصطلاحات بڑی سے بڑی ہوتی جارہی ہیں لہذا آپ کو کوئی مقررہ عدد نہیں مل رہا ہے جس کی اصطلاحات قریب ہوتی جارہی ہیں۔ ایک اور مثال کے ساتھ آگے بڑھیں ترتیب 1 مائنس 1 1 مائنس 1 وغیرہ پر غور کریں نویں اصطلاح مائنس 1 پاور این پلس 1 پہلی اصطلاح مائنس 1 مربع ہے جو 1 سیکنڈ ٹرم ہے مائنس 1 پاور 3 جو مائنس 1 ہے اور اسی طرح یہاں آپ کے طور پر دوسرے لفظوں میں ترتیب کو بڑا اور بڑا بناتے ہیں  $n$  کے اختتام کی طرف پیشرفت جب آپ

ایک بڑی تعداد ہے جو ایک عدد  $n$  ہے تو ترتیب کا کیا ہوتا ہے اس کا 1 اور 1- کے درمیان واپس ہائوس ہوتا ہے اگر ایک بڑی تعداد ہے جو کہ ایک عدد  $n$  ہے جمع 1 برابر ہو جائے گا اور اصطلاح 1 بن جائے گی اور اگر  $n$  تو

آگے بڑھے گا اصطلاحات یا  $n$  جمع 1 اوڈ بن جائے گا اور اس طرح ٹرم مائنس 1 ہو جائے گا اس طرح جیسے جیسے  $n$  تو کی قدر کیا ہے اس لیے ہم کوئی ایسا نمبر نہیں  $n$  تو 1 ہوں گی یا مائنس 1 ہم اسے یقینی طور پر نہیں کہہ سکتے۔ یہ اس بات پر منحصر ہے کہ  $by\ n$  ڈھونڈ سکتے جس کے لیے ترتیب کی اصطلاحات پچھلی مثالوں کو مضبوط کرتے ہوئے قریب آئیں جو آپ پہلی مثال میں دیکھتے ہیں یعنی 1 بڑھتا  $n$  اصطلاحات میں اضافہ کرتا ہے لیکن پھر یہ ہو جاتا ہے دوسری مثال میں صفر کے قریب اور قریب جیسے ہی  $n$  جو ہوا وہ ہوا کیونکہ بڑھتا ہے اصطلاح بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے تاکہ ہم یہ نہیں کہہ  $n$  ہے تیسری مثال میں اصطلاح ایک کے قریب اور قریب آتی ہے جیسے ہی سکتے کہ تمام اصطلاحات بالآخر کسی مقررہ تعداد کے قریب ہوں گی۔ آخری مثال میں اگرچہ اصطلاحات بڑی نہیں ہو رہی ہیں یا تو یہ 1 ہوں گی یا مائنس 1 لیکن پھر بھی ہم کوئی عدد نہیں ڈھونڈ سکتے ہیں اس لیے تمام اصطلاحات اس مخصوص نمبر کے قریب آرہی ہیں ان بڑھتا ہے اصطلاح ایک  $n$  مثالوں سے یہ واضح کرنا چاہیے کہ ایسے معاملات ہیں جہاں ترتیب میں برتاؤ ہوتا ہے۔ اس طرح کہ جیسے جیسے کے بڑھنے سے ترتیب کی اصطلاحات ایک مقررہ تعداد کے قریب نہیں رہیں گی  $n$  عدد کے قریب ہو جاتا ہے اور ایسی مثالیں موجود ہیں جہاں تاکہ ان دونوں صورتوں

توں میں فرق کیا جا سکے ہم غیر رسمی طور پر متضاد ترتیب اور متضاد ترتیب نامی اصطلاحات متعارف کراتے ہیں۔ ترتیب کو کنورجنٹ کہا جاتا  $ann\ 1$  ایک ترتیب  $11y$  مجھے معلومات لکھنے دیں 1 ترتیب کی نویں اصطلاح کو بڑھاتا ہے اور ایک مقررہ نمبر کے قریب آتا ہے  $n$  ہے اگر پہلی مثال کو ذہن میں رکھیں 1 کسی نمبر کے کافی قریب ہو جاتا ہے  $ana\ ns$  بڑھتا ہے  $n$  کے لامحدود کے برابر ہے متضاد کہا جاتا ہے اگر ترتیب میں کوئی اصطلاح نہیں ہو 1 بڑھنے سے اصطلاحات  $\theta$  کے قریب ہو جاتی ہیں۔ یاد رکھیں کہ نمبر  $n$  کیونکہ  $n$  یعنی ترتیب 1 بذریعہ کی صورت میں اصطلاحات  $\theta$  کے قریب سے قریب تر ہوتی جا رہی ہیں لیکن کوئی اصطلاح بالکل  $\theta$  نہیں  $n$  سکتی ہے مثال کے طور پر 1 بذریعہ کے قریب آتا ہے اسے  $an\ 1$  ترتیب کی تمام شرائط کو بڑھاتا ہے  $n$  موجود ہو جیسے کہ 1 ہوتی۔ ایسی ترتیب جن کے لیے کوئی عدد کے طور پر لکھتے ہیں لامحدودیت کی طرف ایک ہے  $n$  کو اس ترتیب کی حد کہتے ہیں اشارے میں ہم اسے حد 1 کنورجنٹ کہا جاتا ہے اس بڑھتا  $n\ a$  نہ ہو جس کے لیے 1 کے برابر ہے کو ترتیب کی حد کہا جاتا ہے اور اس طرح کی ترتیب کنورجنٹ کہلاتا ہے اگر کوئی عدد 11 کے قریب آتا ہے 1 ہے اور

تو اس ترتیب کو ڈائیورجنٹ کہا جاتا ہے جو کسی فنکشن کی حد کو یاد کرتے ہیں وہ سمجھ سکتے ہیں کہ یہ اس معنی میں ایک خاص معاملہ ہے کہ ایکوینس بھی ایک فنکشن ہے آئیے ہم اس کنورجنسی سیکوینس وغیرہ کی تفصیلات میں نہیں جائیں گے لیکن کم از کم غیر رسمی طور پر  $s$  تو یہ معلوم کریں کہ کنورجنٹ ہونے کے لیے ترتیب کا کیا مطلب ہے اور حد کا کیا مطلب واضح ہونا چاہیے ہم کنورجنسی کی قطعی تعریف پر غور نہیں کریں گے کہ کیسے ترتیب کی تبدیلی اور ایک فنکشن کی حد جس کا آپ نے مطالعہ کیا ہے وغیرہ وغیرہ جڑے ہوئے ہیں کنورجنٹ کی غیر سے لامحدود کے برابر ہے جہاں یقیناً یہاں ایک  $ann\ 1\ 5$  رسمی تعریف جانتے ہوئے آئیے ہم کچھ اور مثالوں کے ساتھ مشق کریں کہ ترتیب مربع کے برابر ہے۔ میں نے سیٹ اشارے کے بجائے ایک بریکٹ استعمال کیا ہے مجھے یہ کہنا چاہئے کہ سیٹ نوٹیشن کے بجائے اس طرح  $n$  کے فوسین کا استعمال کر کے ایک ترتیب کو بھی دکھایا جاسکتا ہے جو ہم نے اب تک استعمال کیا ہے جو اس طرح کی ترتیب لکھنے کے بجائے ہم اس طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں۔ درحقیقت میں محسوس کرتا ہوں کہ یہ اس لحاظ سے زیادہ تجویز کنندہ ہے کہ یہ ایک ترتیب ترتیب کے ساتھ الجھن کو فارمولہ  $an$  اصطلاح  $n$ th میں نہیں آئے گا جب کہ سیٹ کوئی مخصوص نہیں ہے عناصر کی ترتیب اب ہم ترتیب پر غور کریں جہاں بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے  $n$  مربع دیا گیا ہے اب میں آپ کو اندازہ لگانا چاہوں گا کہ جب  $n$  بذریعہ  $\phi$

$x\ 2\ 5$  مربع تیسری اصطلاح  $x\ 2\ 5$  تو ترتیب کی شرائط کا کیا ہوتا ہے آئیے ہم چند اصطلاحات کی فہرست بناتے ہیں۔ پہلی ٹرم 5 ہے دوسری ٹرم 5 مربع ہے اور اسی طرح دیکھیں کہ بندسہ 5 مقرر کیا گیا ہے اور ڈومینیئر بڑھ جاتا ہے جیسے 2 مربع 3 مربع 4 مربع  $x\ 4$  مربع چوتھی ٹرم 3 بڑا اور بڑا ہوتا جائے گا  $n$  وغیرہ 100ویں ٹرم 5 ہائی 100 مربع وغیرہ ہو گی اس لیے جیسے جیسے آپ ترقی کرتے جائیں گے جیسے جیسے ٹرمز 5 بذریعہ بہت بڑی تعداد  $\theta$  ہو جاتی ہے۔ اس لیے اس کے بعد تقریباً تمام اصطلاحات صفر ہو جائیں گی، حقیقت میں ہر ٹرم صفر نہیں ہو گی۔ سے کی جا سکتی  $n$  صفر کے قریب اور قریب ہو جائیں سوائے اصطلاحات کی محدود تعداد کے ٹھیک ہے دوسرے لفظوں میں اس کی نمائندگی حد

مربع کنورجنٹ ہے اور  $\theta$  اس کی حد ہے حتمی مثال کے طور پر غور کریں۔ ترتیب  $n$  مربع  $\theta$  ہے یا ترتیب 5 بذریعہ  $n$  ہے لامحدود 5 بذریعہ پاور 6 جمع 3 دیا جاتا ہے۔ سوال  $n$  پاور 6 بذریعہ  $n$  کو 4 مائنس 7 سے لامحدودیت کے برابر ہے جہاں  $1$  uence ann کی ترتیب بڑا اور بڑا ہو جائے  $n$  یہ ہے کہ جب تو ترتیب کی شرائط کا کیا ہوتا ہے یا اس بات کا تعین کریں کہ آیا دی گئی ترتیب متضاد ہے یا نہیں جیسا کہ دی گئی شکل سے یہ دیکھنا سیدھا نہیں کے ساتھ کیا ہوتا ہے جیسا کہ لامحدودیت کی طرف مائل ہوتا ہے لیکن اُنہیے کچھ بیرا پھیری کرتے ہیں اور اسے لکھا جا سکتا ہے  $n$  ہوسکتا ہے کہ پاور 6 کا من لے رہا ہوں  $n$  کیونکہ میں عدد سے وہیں اصطلاح کو  $n^4$  پاور 6 منسوخ ہو گیا اور  $n$  پاور 6۔ اب  $n$  پاور 6 جمع 3 بذریعہ  $n$  پاور 6 مائنس 7 بذریعہ  $n$  تو یہ ہوگا 4 بذریعہ بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے  $n$  پاور 6 کے طور پر دوبارہ لکھا جا سکتا ہے۔ جیسے جیسے  $n$  پاور 6 مائنس 7 بذریعہ 1 جمع 3 بذریعہ  $n$  بذریعہ کی طاقت 6 میں اضافہ ہوتا ہے  $n$  پاور 6  $\theta$  کے قریب اور قریب ہوتا جاتا ہے کیونکہ ڈینومینیٹر  $n$  بذریعہ تو یہ  $\theta$  پر جاتا ہے پاور 6 دوسرا سمٹ یعنی 3 بذریعہ  $n$  بڑا ہوتا ہے اسی طرح ڈینومینیٹر 1 جمع 3 بذریعہ  $n$  تو عدد کم ہو کر مائنس 7 تک پہنچ جاتا ہے جیسا کہ پاور سکس صفر کے قریب ہو جاتا ہے  $n$  کی طرف اشارہ کرتا ہے۔ انٹی تھری ہائے  $n$  پاور 6  $\theta$  پر جاتا ہے کیونکہ  $n$  بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے  $n$  تو ڈینومینیٹر ایک جمع صفر کے قریب ہو جاتا ہے اس کے نتیجے میں جب آپ دیکھتے ہیں کہ تو مائنس 7 کے قریب آتا ہے اس طرح دی گئی ترتیب کنورجنٹ ہے اور حد مائنس -7 ہے۔ ہم ترتیب کے بارے میں مزید بات کریں گے اور پھر اگلی کلاس میں سیریز میں داخل ہوں گے شکریہ