پچھلے چند لیکچرز میں میں نے گنتی کے تصورات کو متعارف کرایا ہے ہمارے پاس گنتی کے بنیادی اصول تھے جیسے کہ اضافے کا اصول
ضرب کا اصول اور پھر ترتیب شدہ ترتیب کی تعداد جس کو ترتیب دیا گیا سب سیٹ اور ترتیب دیا گیا انتظامات اور وہ امتزاج جو غیر ترتیب شدہ
انتظامات کی تعداد ہے۔ ایک مخصوص سیٹ یا مخصوص تعداد میں آہ الگ الگ آئٹمز سے لے کر آہ آج میں سب سے پہلے اس عنوان پر چند مسائل
حل کروں گا اور پھر ہم آہ مجموعے میں کچھ اور تصورات متعارف کروائیں گے تو آئیے میں کچھ مسائل سے شروعات کرتا ہوں یہ مسئلہ دو ہزار
عدد کو ایک دائرے پر الگ الگ پوائنٹس لیں اور ملحقہ پوائنٹس کے n چودہ کے مشترکہ داخلہ امتحان کے سوالیہ پرچے میں سے ایک کا ہے لہٰذا
کی قدر تلاش کریں تو n ہر ایک جوڑے کو نیلے رنگ سے اور باقی کو سرخ سے جوڑیں تو اگر نمبر سرخ اور نیلی لکیر کے حصے برابر ہیں تو
ای بلیو لائن سیگمنٹ سے جوڑیں اور w الگ پوائنٹس لیتے ہیں اور پوائنٹس کے ملحقہ جوڑے n مجھے مسئلہ دوبارہ پڑھنے دیں ہم دائرے پر
کی قدر کیا ہے مجھے ایک خاکہ کے n بقیہ کو ہم سرخ سے جوڑیں اور فرض کریں کہ یہ سرخ اور نیلی لکیر والے حصے تعداد میں ایک ہیں تو
ذریعے بیان کرنے دیں تو فرض کریں کہ ہم ایک دائرے پر غور کریں اور پوائنٹس ہیں۔ اس پر تو یہ پوائنٹ یہ پوائنٹ اور اسی طرح ہمارے یہاں
پوائنٹس ہیں اب یہ ملحقہ پوائنٹس جو ہم آہ نیلے سے جوڑ رہے ہیں اس طرح یہ نیلے سے جوڑ دیا جائے گا یہ نیلے سے جوڑ جائے گا یہ نیلے
سے جوڑ جائے گا اور اسی طرح یہ تمام ملحقہ ہیں ان کو نیلے آہ سے جوڑ دیا جائے گا اس طرح آپ رکھ سکتے ہیں اور باقی جس کو ہم سرخ سے
جوڑتے ہیں تو مجھے یہاں ایک سرخ مارکر استعمال کرنے دیں اور اس طرح ہم اسے سرخ سے جوڑ سکتے ہیں یہ سرخ سے جوڑ دیا جائے گا اس
سے جوڑ دیا جائے گا۔ سرخ وغیرہ تو یہ سب ہیں اس کا مطلب ہے کہ اگر یہ ملحقہ نہیں ہیں تو ہم ان کو سرخ سے جوڑتے ہیں اب مجھے یہاں
لائن ہیں ملحقہ پوائنٹس n لائن سیگمنٹ ہوں گے لہذا وہاں n پوائنٹس ہیں تو اگر آپ ان کو جوڑتے ہیں تو بالکل n ابتدائی گنتی کرنے دیں تو اگر
میں شامل ہونے والے حصے
ہے اگر ہم تمام پوائنٹس کو جوائن کرتے ہیں اگر ہم تمام پوائنٹس کو جوائن کرتے ہیں تو لائن n یہ اب s اس لیے نیلی لکیر والے حصے کی تعداد
دو nc پوائنٹس ہیں اور اگر میں ہر دو جوڑے کو لے لوں تو اس کا مطلب ہے n سیگمنٹس کی کل تعداد ٹھیک ہے تو آپ کیسے شمار کریں گے کہ
کے ساتھ ملانے کے مترادف ہے لہذا اسے دو بار شمار کیا جاتا ہے a کے ساتھ b کے ساتھ پھر یہ b کو a کیونکہ اگر آپ جوائن کریں گے
n ہوگی جو کہ 2 nc 2 سے لئے گئے 2 کے غیر ترتیب شدہ انتظامات کی تعداد ہے لہذا لائن سیگمنٹس کی کل تعداد n لہذا یہ بنیادی طور پر
n مائنس ایک سے دو تو باقی لائن سیگمنٹ کتنے n میں n ہیں اور کل نمبر ہے n مائنس 1 سے ہے 2. تو ہم نے کہا ہے کہ ملحقہ n میں
ہیں تو ہم صرف اس چیز کو لکھتے ہیں ۔ لائن سیگمنٹس کی تعداد جو سرخ رنگ کی ہوتی ہے n مائنس ایک سے دو مائنس n میں n مائنس ہیں جو
کے برابر ہے کیونکہ یہ لکھا ہے n مائنس 2 x مائنس 1 n میں n ہے اب یہ دیا گیا ہے کہ n مائنس 2 by مائنس 1 n میں n جو کہ
کہ سرخ اور نیلی لکیر کی تعداد سیگمنٹس برابر ہیں
برابر ہے t تو یقیناً آپ اسے آسان بنا سکتے ہیں n برابر ہے n مائنس 2 by میں مائنس 1 n اس لیے ہم یہاں یہ مساوات حاصل کرتے ہیں
n مربع پانچ n ہو جاتا ہے تو اس کا مطلب ہے کہ n مائنس ایک کے برابر ہے اس کے برابر ہے آپ اس طرف لے جائیں تو یہ چار n میں n
پوائنٹس ہیں ایک دائرے پر چنا جاتا ہے اور اگر ہم ملحقہ پوائنٹس ah پانچ کے برابر ہونا چاہیے اس کا مطلب ہے کہ اگر پانچ n کے برابر ہے تو
کو نیلے اور غیر ملحقہ پوائنٹس کے ساتھ جوڑتے ہیں اور اگر نمبر ایک ہی ہے تو دائرے پر بالکل پانچ عمودی یا پانچ پوائنٹس ہوں گے تو یہ ہمارے
سے ہے ah ہے مجھے ایک اور مسئلہ حل کرنے دو جو دوبارہ ah دو nc یہاں گنتی کا ایک آسان مسئلہ ہے۔ مرکب کا استعمال کیا ہے جو کہ
کو دیں۔ n 4 سے کم n 3 سے کم n 2 کم سے کم n 1 سوالیہ پیپرز میں سے ایک یہ دوبارہ ایک خاص طریقے سے گن رہا ہے لہذا je
بیس کے برابر ہے تو پانچ عدد اس طرح چنے n 5 جمع n 4 جمع n 3 جمع n 2 جمع n 1 سے کم مثبت عدد ہوں جیسے کہ n 5
n پانچ کتنے طریقوں سے n چار n تین n دو n ایک کو منتخب کر سکتے ہیں n جاتے ہیں کہ ان کا مجموعہ بیس ہے ہم کتنے طریقوں سے
کا انتخاب کیا جا سکتا ہے جس کا مطلب ہے اطمینان بخش یہ معیار اب ہم کم سے کم سے شروع کر سکتے ہیں لہذا 1 n 2 n 3 n 4 n 5
اگر ہم غور کریں کہ اسائنمنٹ ایک سے ایک این دو کے برابر ہے دو کے برابر تین تین کے برابر تین اور چار چار کے برابر اب آپ دیکھیں کہ میں
ah پانچ کے باقی انتخاب اب n چار کی قدریں تو اب n تین اور n دو n ایک n نے کیا کیا ہے میں نے سب سے چھوٹی کو منتخب کیا ہے
پانچ کا دس ہونا ضروری ہے تو اب ہم تھوڑا سا لچک n تین اور چار کا مجموعہ دس ہے اور ٹوٹل بیس ہے لہذا یہ لازمی ہے کہ n ایک اور دو n
چار میں ہم نے n تین اب n دو سب سے چھوٹا ہے n ایک سب سے چھوٹا ہے n پیدا کرتے ہیں ہم ایک اور آپشن لیتے ہیں سب سے چھوٹا
پانچ نو بن جاتا n پہلے ہی سب سے چھوٹا لے لیا ہے تو اب اگلا کیا ہے لہذا اگلا سب سے چھوٹا پانچ ہو سکتا ہے اگر ہم ایسا کرتے ہیں کہ پھر
ایک اور دو این تین کو سب n ہے کیونکہ ہم نے اسے ایک سے بڑھایا ہے لہذا اس کو ایک سے کم کرنا ہے اب ہم دوسرا آپشن لیتے ہیں ہم پھر بھی
چار کو ایک سے بڑھاتا ہوں جو ہے ہم اسے چھ بناتے ہیں تو یہ آٹھ آہ بن جائے گا اب آپ سب سے n سے چھوٹا رکھتے ہیں اور میں پھر سے
n پانچ کے امکانات ہیں کیونکہ اگلے مرحلے میں فرض کریں کہ میں n چار n تین یہ صرف n دو n چھوٹی ن ایک کے ساتھ دیکھ سکتے ہیں۔
n پانچ سے کم ہے تو اس کے ساتھ n چار n پانچ بھی سات بن جائیں گے تو اس شرط کی خلاف ورزی ہوگی کہ n چار کو سات بناتا ہوں تو
تین کے ساتھ n ایک اور دو لیتے ہیں اور n تین کی سب سے چھوٹی قدر ہمارے پاس تین امکانات ہیں اب ہم سب سے چھوٹی n دو اور n ایک
n تین کے ساتھ میں چار لیتا ہوں جو کہ اگلا ہے تو اب آئیے n دو ایک دو اور پھر تین کی جگہ n ایک n میں لچک لیتا ہوں تاکہ سب سے چھوٹی
پانچ صرف آٹھ ہو سکتے n چار کے لیے اگلا سب سے چھوٹا لیں جو کہ پانچ ہے تو اب ہم نے کتنی آہ کی قدریں ختم کر دی ہیں جو کہ بارہ ہے تو
چار کے لیے دوسری قیمت کا انتخاب کرتا ہوں جو کہ ایک دو چار ہے اور یہ پانچ میں چھ بناتا n ہیں جو کہ اب ایک ہی امکانات ہیں ایک اگر میں
پانچ صرف n بنانے کے لیے n ہوں جو کہ اگلی سب سے چھوٹی ہے تو کتنی قدریں ختم ہو جاتی ہیں تو ہم نے سات جمع چھ تیرہ لیے ہیں تو
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ واحد امکانات ہیں اگر میں y سات ہو سکتے ہیں۔ ایک جمع این دو جمع این تین جمع این چار جمع این پانچ برابر بیس دوبارہ
کو اگلا سب سے چھوٹا ہونے کا انتخاب کرتا ہوں جو کہ 3 سے ہے ہم نے 4 کی قدر کو لے لیا ہے n3 دو کو سب سے چھوٹا اور n ایک اور n
دو یعنی دو کی جگہ میں اسے تین بناتا ہوں اب ہم n لیں ایک اور دوسرا سب سے چھوٹا n کوئی دوسرا امکان نہیں ہے اب ہم سب سے چھوٹا
چار یعنی پانچ ہے تو اب آپ کے پاس تیرہ ہیں تو n پانچ جو کہ n تین لیتا ہوں جو چار سب سے چھوٹا ہے n لیتے ہیں اگر میں سب سے چھوٹا
n اگلی قدر ہو سکتی ہے صرف سات ہونے کا یہی امکان ہے کہ اب اگلے ایک میں اگر میں اسے چھ کر دوں گا تو یہ بھی چھ ہو جائے گا تاکہ یہ
ٹو کی سب سے چھوٹی ویلیو میرے n ایک اور اگلا n پانچ کی خلاف ورزی کرے گا تو ایک تین کے ساتھ جو سب سے چھوٹا ہے n چار سے کم
ایک n ایک پہلے میں سب سے چھوٹا ہے میں نے n پاس صرف ایک آپشن ہے اب ہم اگلا لے لیں تو اب ہم نے تمام آپشنز ختم کر دیے ہیں جس میں
تین کو سب سے چھوٹا اور چار کو اگلے سب سے چھوٹے n دو n ایک n اور دو اور تین اور چار کو سب سے چھوٹا سمجھا اگلے میں میں نے
تین کے لئے n کو سب سے چھوٹا لیا اور ah دو b دو n ایک اور n پھر ہم نے ah کے ساتھ لیا اور یہی بات تیسری ترتیب میں بھی ہے
میں نے اگلا چھوٹا لیا تو اس کے ساتھ چار قدر لی گئی پھر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ تین ہیں۔ اب ممکنہ انتظامات چونکہ یہاں صرف آخری میں صرف
سب سے چھوٹا ہے اور باقی سب چھوٹے سے قدرے بڑے ہیں n1
ایک کی دوسری قدر ہم لے سکیں۔ دو اور پھر ہم تین n کی دوسری قدر کے لیے جانا چاہیے تاکہ n one اس لیے اگلا آپشن یہ ہونا چاہیے کہ
پانچ کی قدروں کے طور پر لیتے ہیں آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ یہ رقم براہ راست بیس n تین اور چار اور n دو n چار پانچ اور چھ کو
ٹو این تین اور چار اور پانچ میں سے کسی کو اس n i کے برابر ہے لہذا اب کسی دوسرے نمبر کو بڑھانے کا کوئی دوسرا امکان نہیں ہے یعنی
پانچ کو منتخب کرنے کے تمام امکانات کو اس طرح ختم n چار اور n تین n دو n ایک n کے علاوہ کوئی دوسرا انتخاب نہیں بنا سکتا لہذا یہ

کر رہا ہے کہ n ایک کم ہے۔ n دو سے کم ہے n تین سے کم ہے n چار سے کم ہے le ہے۔ ss n پانچ سے زیادہ ہے اور تمام انٹیجرز کا مجموعہ بیس کے برابر ہے تو ہمارے پاس طریقوں کی کل تعداد ہے جو کہ سات کل بچت کے انتظامات کے برابر ہے آہ تو اس مسائل کا مقصد یہ ہے کہ ہم اصل میں حل کر سکتے ہیں یا آپ کہہ سکتے ہیں کہ تلاش کریں انٹیجرز میں حل یہ عام طور پر نمبر تھیوری ہیں جیسے پارٹیشن کے مسائل کہتے ہیں ڈائی فاونٹائن مساوات وغیرہ ہیں لہذا بنیادی طور پر یہاں بھی گنتی کی ضرورت ہوتی ہے بعض اوقات ہم ترتیب کے امتزاج کا استعمال کرتے ہیں اور بعض اوقات براہ راست گنتی کی ضرورت ہوتی ہے مجھے ایک یا دو دیگر مسائل بھی اسی نوعیت کے بتانے دیں xyz کو یکساں مساوات کا تسلی بخش نظام ہونے دو x مائنس y مائنس z برابر صفر مائنس تین x جمع z برابر صفر مائنس تین x جمع دو i جمع z صفر کے برابر ہے ایسے پوائنٹس کی تعداد تلاش کریں جن کے لئے x مربع جمع y مربع جمع z مربع سو ھ سے کم یا اس کے برابر ہے تو آئیے مشاہدہ کریں اگر ہم اس مساوات نمبر کو دیکھیں کہ ایک اور دو اور میں ان دونوں کو جوڑ دوں گا تو مجھے صرف y صفر کے برابر ملے گا۔ یا اگر میں آہ سیکنڈ اور تیسرا لیتا ہوں اور میں گھٹا دیتا ہوں تو مجھے ملتا ہے y صفر کے برابر ہے تو فوری طور پر یہ واضح ہو جاتا ہے کہ y صفر ہے لہذا یہاں y صفر ہے اب اگر آپ y کو صفر کے برابر ڈالیں گے تو ہمیں z ملے گا۔ تین x تو آپ کے پاس عام طور پر لامحدود حل موجود ہیں اگر ہم x اور z کی تمام قدروں کی اجازت دے سکتے ہیں لیکن یہاں ہماری شرط ہے کہ وہ عددی ہیں اور ساتھ ہی مربعوں کا مجموعہ سو سے کم یا برابر ہونا چاہئے۔ اب یہاں چونکہ y صفر کے برابر ہے آپ کو صرف یہ شرط ہے کہ x مربع جمع z مربع سو سے کم یا اس کے برابر ہے تو یہاں کون سے جوڑے ہیں آہ آپ کے پاس z تین گنا x ہے لہذا xyz کے لئے صرف ممکنہ جوڑے ہیں xyz کے لیے بنیادی طور پر ah تین ٹیپلز جوڑے نہیں ہیں وہ ظاہر ہے کہ صفر صفر صفر ایک حل ہے اور پھر آپ کے پاس x ایک کے برابر ہو سکتا ہے تو z تین ہو جائے گا اور آپ جو بھی قدر لیں گے آپ اس کی منفی کو بھی لے سکتے ہیں اتنا مائنس ایک صفر مائنس تھری بھی ایک حل ہو گا اور پھر آپ کے پاس دو صفر si ہو سکتے ہیں۔ x تو مائنس دو صفر مائنس چھ اور تین صفر نو اور اس وجہ سے مائنس تین صفر مائنس نو آہ آئیے ہم یہاں مربعوں کے مجموعہ کو دیکھتے ہیں آخری والے کے ساتھ یہ تین مربع بن رہا ہے نو جمع نو مربع اکیاسی ہے تو یہ نوے ہے۔ اگلا اگر میں چار لیتا ہوں تو چار صفر بارہ اب بارہ مربع ایک سو چالیس ہو جاتا ہے تو یہ اس شرط کی خلاف ورزی کرے گا x مربع جمع y مربع سو سے کم یا اس کے برابر تو یہ واحد ممکنہ حل ہیں لہذا حل کی کل تعداد انٹیجر حل سات ہے تو آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ تقسیم کے مسائل انٹیجرز میں حل کرتے ہیں جو کہ ڈایافرام ٹائم مساوات ہے بھی بنیادی طور پر امتزاج میں مسائل ہیں آہ آئیے ایک اور مسئلہ کو لے لیں جو ایک ترتیب کا ah مسئلہ ہے آہ یہ دوبارہ ان میں سے کسی ایک سے ہے۔ je سوالیہ پرچے تین لڑکے اور دو لڑکیاں ایک قطار میں کھڑے ہیں کہ انہیں کتنے طریقوں سے ترتیب دیا جا سکتا ہے تاکہ ہر لڑکی کے آگے تاروں کی تعداد اس سے آگے لڑکیوں کی تعداد سے کم از کم ایک زیادہ ہو ۔ آہ تو یہاں لڑکے اور لڑکیاں قابل شناخت ہوں گے لہذا ہم ان کو کچھ شناخت دے سکتے ہیں لہذا تاروں کو b1 b2 b3 ہونے دیں اور لڑکیوں میں دو لڑکیاں g ایک اور g ٹو ہیں تو بنیادی طور پر ہمیں انہیں aq میں رکھنا ہے تاکہ اس کا مطلب ہے کہ وہ یہاں ایک ترتیب میں کھڑے ہیں اب آئیے ہم یہاں ان تقرریوں کو دیکھتے ہیں جو اس شرط کو پورا کریں گی جس سے ہم مندرجہ ذیل آہ رکھ سکتے ہیں لہذا ہمیں اس حالت پر نظر رکھنا ہے تو آئیے اس کو دیکھیں فرض کریں کہ میں g one g دو b ایک b دو سمجھتا ہوں۔ بی تھری یعنی پہلے دو لڑکیاں کھڑی ہیں اور پھر تین لڑکے کھڑے ہیں تو اب دیکھیں جی ایک سے آگے آپ کے پاس ایک لڑکی اور تین لڑکے ہیں تو شرط یہ ہے کہ ہر لڑکی سے آگے لڑکوں کی تعداد کم از کم ایک سے زیادہ ہو۔ لڑکیوں کی تعداد اس سے آگے ہے تو g سے آگے آپ کے پاس ایک لڑکی ہے اور تین لڑکے ہیں تو تین کم از کم ایک سے زیادہ ہیں کیونکہ تین ہے دو ایک سے زیادہ اسی طرح g دو سے آگے لڑکیوں کی تعداد صفر ہے اور تاروں کی تعداد تین ہے تو پھر یہ شرط مطمئن ہے تو بنیادی طور پر w ٹوپی ہم کہہ رہے ہیں کہ ہم پہلے دو لڑکیوں کو اور پھر تین لڑکوں کو ڈالتے ہیں اس طرح کے کتنے انتظامات ہیں تو آہ ان دو لڑکیوں کو دو فیکٹریل طریقوں سے اجازت دی جاسکتی ہے اور ان تین لڑکوں کو تین فیکٹریل طریقوں سے اجازت دی جاسکتی ہے لہذا ہم دو کو پرموٹ کرسکتے ہیں۔ لڑکیاں دو فیکٹوریل طریقوں سے اور تین تاریں تین فیکٹوریل طریقوں سے اس طرح کے انتظامات کی کل تعداد ah 2 فیکٹوریل میں 3 فیکٹوریل ہے ہم نے ضرب کے اصول کو لاگو کیا ہے تو یہ چھ سے دو ہے جو کہ بارہ ہے اب آئیے ایک اور ترتیب کو دیکھتے ہیں جس میں آپ ہے تو یہ ایک انتظام ہے دوسرے انتظام میں ہم کیا کرتے ہیں پہلے ایک لڑکی پھر ایک لڑکا پھر لڑکی اور پھر دو لڑکے تو آئیے اس سے آگے دیکھیں جی ون آپ کے پاس ایک لڑکی اور تین لڑکے ہیں تو شرط یہ ہے کہ نمبر لڑکوں کی تعداد ہر لڑکی سے کم از کم ایک زیادہ لڑکیوں کی تعداد سے زیادہ ہے جو میں نے پیش کی تھی یہ شرط پوری ہے اسی طرح g2 سے آگے ہمارے ہاں دو لڑکے ہیں اور کوئی لڑکی نہیں لہٰذا دوبارہ یہ شرط پھر سے تسلی ہوئی اگر آپ منتظمین کو دیکھیں لڑکوں اور لڑکیوں کی t تو لڑکیوں میں آپ کو اجازت دی جا سکتی ہے اس کا مطلب ہے کہ آپ کے یہاں جی ٹو اور جی ایک یہاں اور بی ایک بی دو بی تھری کو بھی تین فیکٹوریل طریقوں سے اجازت دی جا سکتی ہے تو پھر آہ لڑکوں کو تین میں اجازت دی جا سکتی ہے۔ فیکٹوریل طریقوں اور لڑکیوں کو دو فیکٹوریل طریقوں سے اجازت دی جا سکتی ہے لہذا ترتیب یا ترتیب کی کل تعداد تین فیکٹوریل میں دو فیکٹوریل ہے جو کہ بارہ ہے تو ہم نے کیا کیا ہم نے شمار کیا ہے جس میں دو لڑکیاں پہلے نمبر پر ہیں اور تین اگلے تین جگہوں پر لڑکوں کا قبضہ ہے دوسرا آپشن ہم نے لیا ہے جس میں ایک لڑکی ہے اس کے بعد ایک لڑکا ہے اور پھر ایک لڑکی ہے اور اس کے بعد دو لڑکے ہیں آئیے تیسرا امکان دیکھتے ہیں کہ پہلے ہمارے پاس لڑکی ہو سکتی ہے اور پھر آپ ایک لڑکا ہو سکتا ہے پھر آپ کے پاس دوسرا لڑکا ہو سکتا ہے پھر آپ کے پاس لڑکی ہو سکتی ہے اور پھر آپ کے پاس آہ ایک لڑکا ہو سکتا ہے آئیے اس لڑکی سے آگے ایک لڑکا ہے پھر اس سے آگے کوئی لڑکی نہیں ہے تو شرط ہے کہ لڑکوں کی تعداد کم از کم ایک سے زیادہ ہے۔ اس سے آگے لڑکیوں کی تعداد مطمئن ہے اور g کے حوالے سے ایک یقینی شرط مطمئن ہے کیونکہ صرف ایک لڑکی آگے ہے اور تینوں لڑکے آگے ہیں اور پھر آپ کے پاس تین فیکٹریل ہیں دو فیکٹوریل ہیں جو کہ بارہ ایسے انتظامات ہیں آہ ایک اور امکان آپ کے پاس یہ ہے کہ آپ پہلے ایک لڑکا رکھ سکتے ہیں پھر دو لڑکیاں اور پھر دو لڑکوں کو پھر سے دیکھتے ہیں کہ پہلی لڑکی سے آگے ایک لڑکی ہے اور دو لڑکے دوسری لڑکی سے آگے دو لڑکے ہیں اور نہیں لڑکیوں کو پھر شرط یہ ہے کہ ہر لڑکی سے آگے لڑکوں کی تعداد اس سے آگے لڑکیوں کی تعداد سے کم از کم ایک زیادہ ہو اور پھر لڑکیوں اور لڑکوں کی اجازت دینے کی وجہ سے یہاں آپ کو تین فیکٹریل اور دو دو فیکٹریل ہو سکتے ہیں۔ یہ بارہ ایسے انتظامات ہیں جن میں پہلے آپ کے پاس ایک لڑکا ہے دو لڑکیاں اور پھر دو لڑکے ہیں اگلے ایک آپ کیوں کر سکتے ہیں پھر ایک لڑکی ہے پھر ایک لڑکا ہے پھر لڑکی ہے اور پھر ایک ہے۔ لڑکا دوبارہ اگر آپ جی ٹو سے آگے کی شرائط پر نظر ڈالیں تو آپ کے پاس ah g سے آگے ایک y ہے آپ کے پاس ایک لڑکی ہے اور دو لڑکے ہیں تو پھر شرائط مطمئن ہیں اور ان کو تین فیکٹوریل میں دو فیکٹوریل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جو کہ بارہ ایسے انتظامات ہیں۔ اگر آپ انتظامات کی کل تعداد کو دیکھیں تو اس طرح کے انتظامات کی کل تعداد ہے تو ہمارے پاس پانچ میں بارہ ہیں جو کہ ساٹھ ہیں تو ہم نے یہاں تین لڑکوں کے انتظامات معلوم کرنے کے لیے اضافی اصول کے ساتھ ساتھ ضرب کا اصول بھی استعمال کیا ہے۔ دو لڑکیاں ایک خاص انداز میں آہ آئیے ایک خاص لفظ پر غور کریں ٹھیک ہے اینڈینایل پر غور کریں تو ٹھیک ہے اگر آپ گنتے ہیں تو یہاں نو حروف ہیں تو سب سے پہلے ہم پوچھتے ہیں کہ اس لفظ کے تمام حروف پر غور کرنے سے کتنے الفاظ بن سکتے ہیں یہاں اگر آپ دیکھیں کہ کل تعداد نو ہے تو آپ کے پاس نو حروف ہیں جن میں سے اگر آپ ee کو دیکھیں تو تین بار دہرایا گیا ہے اور اگر آپ n کو دیکھیں تو n دو بار دہرایا گیا ہے اور پھر آپ کے پاس ایک d ایک ah a is ہے۔ وہاں اور پھر آپ کے پاس o ہے اور آپ کے پاس l یہ ایک بار ظاہر ہو رہے ہیں تو اگر آپ دیکھیں کہ کل ترتیب نو کتنی ترتیب ہے تو اگر آپ کے پاس تین چیزیں ہیں جو ایک جیسی ہیں اور دو چیزیں ایک جیسی ہیں تو آپ کے پاس نو فیکٹوریل ہوں گے بذریعہ تقسیم تین فیکٹوریل میں دو فیکٹوریل یقیناً ایک اس آہ کو آسان بنا سکتا ہے کل تیس ہزار دو سو چالیس ایسے انتظامات ہوں گے آہ اب فرض کریں کہ ہم یہ طے کرتے ہیں کہ ایک خاص لفظ وہاں آتا ہے کہ کتنے الفاظ میں طبقہ کہتا ہے کہ ایک خاص طبقہ ne اور dea اب ہوتا ہے۔ اس نو حروف میں سے اگر آپ ان پانچ حروف

کا انتخاب کرتے ہیں جن کو لازمی طور پر ظاہر ہونا ہے تو وہاں موجود چیزوں کی کل تعداد صرف چار جمع ایک پانچ ہوگی کیونکہ ان کو ایک ساتھ تو ah n اور ایک e ah one o one l ظاہر ہونا ہے تو آہ یہاں اشیاء کی تعداد پانچ ہے جو کہ اینڈیا ہے۔ اور پھر آپ کے پاس باقی ہے ایک ترتیب کی تعداد پانچ فیکٹوریل ہے جو کہ ایک سو بیس ہے اسی طرح آئیے یہاں ایک اور پابندی دیکھتے ہیں۔ الفاظ کی تعداد شروع اور ختم ہونے والی سے شروع ہو رہی ہے اور ایسے کتنے حروف ہوں گے اگر ہم پہلے اور آخری کو ٹھیک کر لیں تو ہمارے پاس سات باقی رہ گئے ہیں جن e حرف دو بار ہوتا ہے تو ترتیب کی تعداد سات فیکٹوریل ہو جائے n دو بار ظاہر ہو رہا ہے تو اب ہمارے پاس سات حروف باقی ہیں جن میں n میں سے صرف طاق aeo گی دو فیکٹوریل سے تقسیم ہونے پر جو کہ دو ہزار پانچ سو بیس ہے ایک میں ایک اور پابندی لگاتا ہوں کہ کتنے الفاظ کے حروف پوزیشنوں میں آتے ہیں ٹھیک ہے آہ دیکھنے کے لیے اس پر تو تین تین ای کی ٹھیک ہے اور کل طاق پوزیشنیں ہیں وہ ایک تین پانچ سات اور نو ہیں تو تو یہ بھی اب پانچ ہیں انہیں کتنے طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے پانچ فیکٹوریل کو تین فیکٹوریل سے تقسیم کیا e's اور تین ao پانچ جگہوں پر یہ بھی چار ہیں چار فیکٹوریل میں دو فیکٹوریل طریقے سے تقسیم کیا جا سکتا ہے تو n's اور دو ld جائے طریقے اب باقی چار پوزیشنوں میں کو دو ctorial میں تقسیم کرنے کے برابر ہے۔ fa آپ کے پاس ایسے الفاظ کی کل تعداد ہے جو 5 فیکٹوریل کو تین فیکٹوریل سے چار ah حروف طاق پوزیشن میں ظاہر ہوں گے aeo فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے جو کہ دو سو چالیس ہے یعنی دو سو چالیس الفاظ ہیں جن میں آخری پانچ پوزیشنوں میں واقع ہوتا ہے لہذا n اور dl آئیے ہم اس کی ایک اور تبدیلی کو دیکھتے ہیں ترتیب کی تعداد جس میں کوئی بھی حروف پہلے چار جگہوں پر ظاہر ہونا ضروری ہے جو اب طے شدہ ہے طریقوں کی تعداد چار فیکٹوریل ہوگی یہاں دو فیکٹوریل سے ns اور دو dl کو پانچ میں آخری پانچ پوزیشنوں پر رکھا جاسکتا ہے۔ فیکٹوریل کو تین فیکٹوریل سے تقسیم کیا جاتا ہے تو کل e's اور تین ao تقسیم اور باقی نمبر دوبارہ چار فیکٹوریل بن جاتا ہے دو فیکٹوریل کو پانچ فیکٹوریل سے تقسیم کیا جاتا ہے جو کہ دو سو چالیس کے برابر ہوتا ہے تو دیے گئے لفظ اور دو آخر وہ پہلی چار پوزیشنوں پر واقع ہوتے ہیں اور باقی آخری پانچ پوزیشنوں پر ہوتے ہیں پھر dl کے حروف کی ترتیب کی تعداد جس میں دو سو چالیس ہجری ہیں آئیے ایک اور مسئلہ اٹھاتے ہیں جو مشترکہ داخلہ امتحان میں سامنے آیا ہے۔ یہ بھی جی ای کے سوالی پرچے میں سے ایک سے ہے کہ پانچ تاروں اور پانچ لڑکیوں کو ایک قطار میں کتنے طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے تاکہ ایک تمام لڑکیاں لگاتار کھڑی ہوں بالکل ٹھیک چار لڑکیاں لگاتار کھڑی ہوں تو اب پانچ تاروں میں سے وہ ہو سکتی ہیں کہیں بھی لیکن اگر پانچوں لڑکیاں ایک ساتھ ہوں تو انہیں ایک اکائی سمجھا جا سکتا ہے لہٰذا اشیاء کی کل تعداد پانچ جمع ایک چھ ہو سکتی ہے

اس لیے انہیں چھ فیکٹوریل طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے تاہم یہ پانچ لڑکیاں آپس میں بدل سکتی ہیں۔ یہ پانچ فیکٹوریل ہو جائے گا لہذا اگر تمام لڑکیاں لگاتار کھڑی ہوں تو ان کو ایک یونٹ سمجھا جا سکتا ہے لہذا پانچ تاروں کے علاوہ ایک یونٹ کی ترتیب کی تعداد چھ فیکٹوریل ہے تاہم پانچ لڑکیوں کو پانچ فیکٹوریل طریقوں سے اجازت دی جا سکتی ہے تو اس طرح کی کل تعداد انتظامات جو چھ فیکٹوریل میں پانچ فیکٹوریل ہوں گے تو یقیناً یہ ایک بڑی تعداد ہے آہ چھیاسی ہزار چار سو اب فرض کریں کہ میں دیکھتا ہوں کہ ان پانچ میں سے بالکل چار لڑکیاں ایک ساتھ ہیں اور ایک لڑکی کسی اور جگہ پر ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ ایک ہی ترتیب میں نہیں ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ کتنے طریقوں سے ہو سکتا ہے تو اگر چار لڑکیاں ایک ساتھ ہوں تو ان کو ایک اکائی سمجھا جا سکتا ہے چار لڑکیاں جو لگاتار کھڑی ہوں ان کا علاج کیا جا سکتا ہے۔ جیسا کہ ایک اکائی ٹھیک ہے تو پانچ لڑکے اور یہ چار لڑکیاں چھ فیکٹوریل طریقوں سے کھڑے ہو سکتے ہیں اور ان چار لڑکیوں کو بھی چار فیکٹریل طریقوں سے اجازت دی جا سکتی ہے اور ان چار لڑکیوں کو چار فیکٹریل طریقوں سے اجازت دی جا سکتی ہے ایک اور بات یہ ہے کہ پانچ میں سے لڑکیاں ہم نے چار لڑکیوں کا انتخاب کیا ہے دو ایک ساتھ کھڑے ہیں اور ایک لڑکی الگ ہے

اس لیے اسے بھی پانچ سی ون میں چنا جا سکتا ہے یا آپ کہہ سکتے ہیں کہ پانچ سی چار طریقے آہ جو لڑکی الگ کھڑی ہے اسے پانچ لڑکیوں میں سے پانچ سی ایک طریقے سے منتخب کیا جا سکتا ہے۔ تو آئیے اب انتظامات کو دیکھتے ہیں آہ آپ کے پاس ایک دو تین چار پانچ اور چھ آہ ہو سکتی ہے کہ چار لڑکیوں کو ایک یونٹ سمجھا جاتا ہے اور پانچ تاریں چھ فیکٹریل طریقوں سے کھڑی ہوتی ہیں اور پھر دوسری گنتی بھی ہوتی ہے تو مجھے بس کہتے ہیں کہ وہ رکھے گئے ہیں۔ یہاں مثال کے طور پر آہ یہ چار لڑکیاں ہو سکتی ہیں پھر یہ اگلے پانچ تار ہو سکتے ہیں یا یہ چار لڑکیاں ہو سکتی ہیں اور یہ پانچ لڑکے ہو سکتے ہیں یا یہ وہ چار لڑکیاں ہو سکتی ہیں اور یہ پانچ تاریں ہو سکتی ہیں یا یہ چار ہو سکتی ہیں لڑکیاں اور یہ پانچ لڑکے ہو سکتے ہیں اب یہ ایک لڑکی جو باقی رہ گئی ہے وہ یہاں کھڑی ہو سکتی ہے یہاں یہاں یا یہاں یہ ہے کل امکانات کی تعداد سات ہے تاہم چونکہ ہم نے شرط رکھی ہے کہ بالکل چار لڑکیاں لگاتار کھڑی ہوں تو اگر یہ ہیں چار لڑکیاں تو باقی لڑکی یہاں نہیں ہو سکتی یا یہ یہاں نہیں ہو سکتی اس کا مطلب ہے کہ اسے پانچ جگہوں پر رکھنا ہو گا اسی طرح جہاں بھی وہ چار گول ہوں اس سے ملحق دونوں طرف وہ لڑکی کھڑی نہیں ہو سکتی

اس لیے رکھنے کے لیے صرف پانچ امکانات باقی ہیں۔ وہ آخری لڑکی یہاں

اس لیے آخری لڑکی کو پانچ طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے کیونکہ اسے پچھلی چار لڑکیوں کے ساتھ نہیں لگایا جا سکتا تو اب اگر ہم ضرب کے اصول کو لاگو کریں تو ترتیب کی کل تعداد 6 فیکٹوریل میں 4 فیکٹوریل میں 5 سی 1 ٹو فائیو تو یقیناً کوئی اس کا اندازہ لگا سکتا ہے کہ یہ اصل میں چار لاکھ بتیس ہزار ہے یہاں آپ نے دیکھا کہ گنتی کیسے ہوئی ہے ہم کہتے ہیں کہ چار لڑکیاں لگاتار کھڑی ہیں تو ان کے ساتھ سلوک کیا جاتا ہے۔ ایک یونٹ کے طور پر اب ایک لڑکی باقی رہ گئی ہے

اس لیے ہم اسے الگ سے سمجھتے ہیں اور پانچ تاریں ہیں تو پانچ تاروں کے علاوہ چار لڑکیوں کی یہ اکائی چھ بنتی ہے

اس لیے انہیں چھ فیکٹریل طریقوں سے رکھا جا سکتا ہے اب یہ چار لڑکیاں خود چار فیکٹریل طریقوں سے پرموٹ کر سکتی ہیں۔ اب ایک اور چوائس آنے والی ہے کیونکہ ایک لڑکی الگ ہو گئی ہے

اس لیے پانچ لڑکیوں میں سے اس لڑکی کو منتخب کرنے کے طریقے پانچ سی ایک ہوں گے اب اس لڑکی کی جگہ اس طرح ہونی چاہیے کہ یہ یونٹ سے متصل نہ ہو۔ اب چار لڑکیوں کی وہ اکائی جہاں کہیں بھی رکھی گئی ہے تو اصل میں سات جگہیں ہیں جہاں کوئی اس آخری لڑکی کو رکھ سکتا ہے لہذا چار لڑکیوں کے سیٹ کے ساتھ دو کو ایک طرف چھوڑ کر آپ کے پاس صرف پانچ دستیاب اختیارات ہیں لہذا یہ تعداد ہے طریقوں کی ایک میں پانچ میں لاگو کیا ہے یعنی چار لاکھ بتیس ہزار c تعداد پانچ ہے تو اب ہم نے ضرب کے اصول چھ فیکٹوریل کو چار فیکٹوریل میں پانچ تو آئیے ہم مزید ترتیب کے امتزاج کے مسائل کو دیکھتے ہیں۔ لہذا ایک کھلاڑی اور میں نے لیزا نامی 52 کارڈز کے ڈیک ah طریقوں کی تعداد ہے سے 13 کارڈز کا انتخاب کیا ہے کہ وہ کتنے طریقوں سے انتخاب کر سکتی ہے تاکہ اسے دو بادشاہ اور دو ملکہ ملیں یعنی وہ کارڈ جو بادشاہ یا ملکہ دکھا رہا ہو تو اب اس میں سے 52 کارڈز ہیں۔ 52 کارڈز میں آپ کے پاس چار کنگ کارڈز اور چار کوئین کارڈز ہیں اور پھر باقی کارڈز 44 ہیں تو اگر آپ یہ پابندی لگا رہے ہیں کہ ان تیرہ کارڈز میں سے جن کو منتخب کیا گیا ہے ان میں سے دو کا بادشاہ ہونا ضروری ہے تو اس کا مطلب ہے دو ہوگا اسی طرح ہمیں بھی دو ملکہ مل رہے ہیں تو پھر ضرب کے اصول سے c کہ انہیں ان چاروں میں سے منتخب کرنا ہوگا۔ تو وہ نمبر چار دو سے ضرب دیا جائے گا اب یہ شرط بھی رکھتا ہے کہ باقی نو کارڈ ہو سکتے ہیں۔ اڑتالیس کارڈز میں سے کوئی بھی c اس کو اس نمبر چار کارڈ ہے تو یہ 44 سی نو ہے تو یہ ایک سادہ آہ مجموعہ مسئلہ ہے کیونکہ یہ یہاں غیر ترتیب شدہ انتظامات ہیں

اس لیے ہم نے فوراً شمار کیا ہے کہ چار بادشاہ ہیں

اس لیے ان میں سے دو کا انتخاب کیا گیا ہے۔ چار سی دو طریقوں میں سے چار ملکہ ہیں جن میں سے دو کو چار سی دو میں چنا جاتا ہے اور باقی چالیس چار کارڈوں میں سے ہم 44 سی نو طریقوں میں سے نو کا انتخاب کرتے ہیں آہ آئیے ہم مجموعہ کا ایک اور مسئلہ لیتے ہیں کہ تین گیندوں کو کتنے طریقوں سے تین سرخ چار نیلے اور دو سبز گیندوں کے سیٹ سے منتخب کیا جا سکتا ہے تاکہ تمام مختلف رنگوں کے ہوں سب ایک ہی رنگ

کے ہوں تو ہم تین کا انتخاب کر رہے ہیں اور اگر ہم یہ کہیں کہ سبھی مختلف رنگوں کے ہیں تو اس کا مطلب ہے کہ ہمیں ایک کا انتخاب کرنا چاہیے۔
سرخ ایک نیلی اور ایک سبز گیند اب منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد جو کہ نیلے چار سی ایک کے لیے تین سی ایک ہو سکتی ہے اور سبز کے
ہم نے تین کا انتخاب e لیے دو سی ایک ہے تو یہ نمبر سیدھا چوبیس ہے اب دوسرے حصے میں ہم کہہ رہے ہیں کہ تمام اب ایک ہی رنگ کے ہیں ۔
کیا ہے اور اگر وہ ایک ہی رنگ کے ہونے چاہیں تو یا تو وہ تمام سرخ ہونے چاہئیں یا سبھی نیلے ہونے چاہئیں تو اگر ان سب کو سرخ ہونا ہے تو یہ
تین سی تین طریقوں سے بن جائے گا جو کہ سادہ ہے۔ ان میں سے ایک ایک نیلے رنگ کے ہو سکتے ہیں جنہیں چار سی تین طریقوں سے منتخب کیا
جا سکتا ہے، یعنی ایک جمع چار یعنی پانچ طریقوں سے ظاہر ہے کہ آپ ان کو سبز نہیں کر سکتے کیونکہ وہاں صرف دو سبز گیندیں ہیں لہذا اگر
آپ غور سے دیکھ سکتے ہیں پہلے حصے میں ہم نے ضرب کے اصول کو لاگو کیا ہے اور دوسرے حصے میں ہم نے اضافی اصول کو یہاں دو
امکانات کا اضافہ کر کے لاگو کیا ہے کہ یہ سب سرخ ہو سکتے ہیں یا سبھی آہ نیلے ہو سکتے ہیں یہاں ایسے اور بھی ترتیب کے مسائل ہیں۔ لہٰذا
als ہے اگر ہم یہاں ah کیا ہے جو کہ ah آخری لفظ کی تمام ترتیب انگلش ڈکشنری کے مطابق ترتیب دی گئی ہے، انگلش ڈکشنری کی ترتیب
ca n alts اور پھر آپ a اگلا ہو گا جس سے شروع ہو گا۔ ah ہو جائے گا اور پھر alst کے حروف کو دیکھیں تو پہلا لفظ t اور
کہیے اور اس طرح اس کا مطلب ہے کہ لغت کی ترتیب کے عین مطابق عمل کرنا ہوگا اس ترتیب میں لفظ کی پوزیشن کیا ہے نمک کہیے تو اس کا
مطلب ہے کہ اگر ہم ان سب کو ایک ساتھ لکھیں تو بنیادی طور پر یہاں ایسے چوبیس الفاظ ہیں کیونکہ یہ سب الگ الگ ہیں لہٰذا ان چوبیس الفاظ میں
چار فیکٹریل لفظ نمک کا مقام کیا ہے تو سب سے پہلے ہم ان الفاظ پر غور کریں جو ایک سے شروع ہو رہے ہیں ایسے کتنے الفاظ ہیں اس طرح کے
ہے اور انہیں تین فیکٹریل طریقوں سے اجازت دی جا l st ہے اور بقیہ میں آپ کے پاس a پہلے لفظ سے شروع ہونے والے الفاظ کی تعداد
اور a کو پہلے رکھیں اور پھر l سے شروع ہو رہی ہے لہذا اگر ہم l سکتی ہے لہذا کل الفاظ کی تعداد چھ ہو جائے گی اب الفاظ کی تعداد
رکھیں۔ تین فیکٹوریل میں دوبارہ اجازت دی جا سکتی ہے جو کہ چھ طریقوں سے ہے پھر اگلی ایک آہ چونکہ ہمارے پاس لغت کی ترتیب کے st
اس t اور پھر l اگلا ہو گا۔ ایک آ رہا ہے یہاں پھر a ہو جائے گا اگر آپ لغت کو دیکھیں تو s ہے لہذا اگلا t اور als مطابق آپ کے پاس
گننے کے کچھ ah اگلے لیکچرز میں میں ah کا مطلب ہے کہ نمک کی پوزیشن اس فہرست میں 13 ویں ہوگی لہذا یہ یہاں تیرہویں پوزیشن ہے
مزید اصولوں پر غور کروں گا کچھ قبضے کے مسائل اور پھر ہم کچھ حل کریں گے ۔ اس نوعیت کی مزید مشقیں آپ

Prutor@IITK