[موسیقی] پچھلے دو لیکچرز میں میں نے گنتی کے بنیادی اصول متعارف کرائے ہیں لہذا آپ کے پاس اضافی اصول ہے آپ کے پاس ضرب کا اصول ہے اور پھر آپ کے پاس ترتیب کی تعداد کا تصور ہے اور ترتیب کی تعداد کے تصور میں آپ کر سکتے ہیں۔ ترتیب دینا ضروری ہے جس میں ترتیب دینا ضروری ہے اور اگر ترتیب کو مدنظر نہیں رکھا جاتا ہے
فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا تھا اور ہم k مائنس n فیکٹوریل کو n متعارف کراتے ہیں جو کہ npk تو ہم اسے امتزاج کہتے ہیں لہذا ہم عددی n کے غیر ترتیب شدہ نمونوں کی ایک بڑی تعداد ہے۔ k متعارف کرایا جو nck نے
کی مختلف خصوصیات پر بات کریں گے ان ah فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے لہذا اب ہم k مائنس n فیکٹوریل k فیکٹوریل کو n تو یہ گنانکوں npk اور nck
سے نمونے کا آرڈر دیا لہذا ہم ایک پراپرٹی پر تبادلہ خیال کیا تھا جو n ah نے k اشیاء کی تعداد ہے لہذا k ah k ایک ساتھ لیا گیا npk تو کے برابر ہے آئیے مزید پراپرٹیز کو دیکھتے ہیں k مائنس ncn ہے nck
سے بڑا یا اس کے برابر r 1 مائنس 1 جہاں یقیناً cr سے مائنس n 1 کے برابر ہے۔ ni جو کہ ncr میں r تو ایک پراپرٹی یہ ہے کہ آئیے اس خاصیت کے ثبوت کو دیکھیں n اس سے کم یا برابر ہے r ہے اور
ہے۔ آپ یہاں نوٹ کریں کہ میں یہاں ایک اور اشارے استعمال کر رہا ہوں لہذا ncr ah میں r تو آئیے بائیں ہاتھ کی طرف غور کریں جو n میں r جو کہ ncr میں r لکھ سکتا ہے لہذا دونوں اشارے استعمال کیے جاسکتے ہیں وہ مساوی ہیں لہذا nck بھی اس طرح ncki
فیکٹوریل میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب ہم اس کو دیکھتے ہیں ہم عدد میں ٹرمز کو ایڈجسٹ کر سکتے ہیں r مائنس n فیکٹوریل سے r فیکٹوریل کو
مائنس ون فیکٹوریل کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا r میں r فیکٹوریل ہے جو r اور یہاں ڈینومینیٹر میں r فیکٹوریل لکھتا ہوں اور اس n میں مائنس 1 فیکٹوریل ہے r ہو سکتا ہے۔ منسوخ ہو گیا اور آپ کے پاس r ہندس اور ڈنومینیٹر میں
مائنس 1 فیکٹوریل لکھ سکتا ہوں r مائنس 1 مائنس n تو اس اگلی اصطلاح میں میں
کو الگ کرتا ہوں n مائنس 1 فیکٹوریل لکھ سکتا ہوں اس کا مطلب ہے کہ میں یہاں n میں n فیکٹوریل میں n تو اس عدد کو یہ n مائنس ون فیکٹوریل سے تقسیم کرکے دیکھیں اور r مائنس 1 فیکٹوریل کو n کے برابر ہے۔ اصطلاح ہے اگر آپ th اور n تو یہ ہے اب مائنس ون فیکٹوریل دیکھیں r مائنس ون مائنس
ah مائنس ون یہاں دائیں طرف ہے r مائنس ون کا انتخاب کریں n تو یہ کچھ نہیں ہے مگر
آئٹمز کے غیر ترتیب شدہ نمونوں r آئٹمز سے لیے گئے ncr n تو اس کا ثبوت یہ آسان ہے آئیے ہم اس کی آہ فزیکل فہم کو دیکھتے ہیں لہذا سے ضرب کریں r کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے لہذا اگر ہم اسے
مائنس ون چیزوں r مائنس ون چیزوں سے n اوقات ایسی چیز پر غور کیا جانا ہے۔ اب ہم کیا کہتے ہیں کہ یہ r تو اس کا کیا مطلب ہے کہ سے ضرب کرتے ہیں n کے غیر ترتیب شدہ نمونوں کو منتخب کرنے کے مترادف ہے اور اگر آپ
ایسے نمونوں سے کرتے ہیں nn مائنس ون ہے لہذا اگر آپ اسے n تو یہاں یہ
چیزوں کا انتخاب کرتے ہیں اور آپ ایسی چیزیں کرتے ہیں r میں سے n تو وہ نمبر یہاں کے برابر ہے۔ کہ اگر آپ
ہے cr مائنس ایک n میں n وہی ہے جو ncr میں r مائنس n تو یہ ایک ہی ہے آئیے ہم اسی طرح کی دوسری خصوصیات کو دیکھیں
فیکٹوریل میں r مائنس n فیکٹوریل کے ذریعے r ہے۔ di فیکٹریل n میں تاکہ یہ ncr کو r مائنس n تو آئیے اس بائیں طرف دیکھیں
فیکٹوریل دیکھ سکتے ہیں یہاں پہلی اصطلاح منسوخ ہو جائے گی r مائنس n اور r مائنس n یہاں آپ اسے vided
n مائنس ایک فیکٹوریل ہم کیا کرتے ہیں ٹرم کو یہاں عدد میں ایڈجسٹ کریں میں r مائنس n فیکٹوریل r فیکٹوریل تقسیم n تو آپ کو ملے گا
فیکٹوریل ہے r مائنس ون فیکٹوریل کے طور پر لکھیں اور پھر آپ کے پاس n کو الگ کرتا ہوں اور اسے n factorial r مائنس ون مائنس

مائنس 1 کے انتخاب کے علاوہ n لکھتا ہوں پھر یہ مقدار آپ دیکھ سکتے ہیں کہ r مائنس ون مائنس n مائنس ون ہے میں r مائنس n تو یہ کو ظاہر کرنا چاہتا تھا لہذا یہ پراپرٹی بنیادی طور پر پچھلی پراپرٹی کی بحالی ہے کیونکہ ah کچھ نہیں ہے لہذا یہ وہ مقدار ہے جس کی میں جیسا ہی ہے لہذا یہ پراپرٹی اور یہ پراپرٹی ان کی ہے۔ اسی طرح کی نوعیت آئیے ہم ایک اور پراپرٹی کو دیکھتے ہیں r مائنس n nc ncr
کے درمیان ہے n ایک اور r مائنس ون یقیناً ان تمام معاملات میں آپ کے پاس یہ r مائنس cn پلس 1 r مائنس n برابر r مائنس rcn لہذا اگر آپ بائیں طرف دیکھیں
فیکٹوریل کو r اور r ایک بار پھر آپ اس ah فیکٹوریل r مائنس n فیکٹوریل r فیکٹوریل میں تقسیم n r ہے یعنی ncr میں r تو
فیکٹوریل ملے یہاں میں r مائنس n مائنس ون فیکٹوریل اور r یہاں دیکھ سکتے ہیں آپ یہاں پہلی اصطلاح کو منسوخ کر سکتے ہیں تاکہ آپ کو سے ضرب کرتا ہوں عدد اور ڈینومینیٹر میں جمع ایک r مائنس n
مائنس ون ہے لہذا یہ وہ اصطلاح ہے جسے آپ یہاں ncnncr پلس ون فیکٹوریل اب یہ اصطلاح کچھ نہیں بلکہ r مائنس n تو مجھے ملے گا دکھانا چاہتے تھے آہ ہمارے پاس بھی ترتیب کی کچھ خصوصیات ہیں
کے برابر ہے آئیے سب سے پہلے اس کے ثبوت کو ah مائنس ون npr میں r پلس npr پلس ون پی آر کا جو n تو میں بتاتا ہوں۔ آپ اس دیکھیں
فیکٹوریل n سے تقسیم شدہ فیکٹوریل ہے فیکٹوریل دوسری ٹرم ہے r مائنس n ہے جو n pr تو اگر آپ دائیں ہاتھ کی طرف دیکھیں جو کہ جمع r 1 مائنس n فیکٹوریل نکال سکتے ہیں اور یہاں میں n پلس ون فیکٹوریل اس کے برابر ہے اب آپ یہاں سے r مائنس n میں تقسیم سے ضرب اور تقسیم کرتا ہوں
پلس ون فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا r مائنس n کو r پلس 1 فیکٹوریل جمع r مائنس n جمع 1 تقسیم ہوتا ہے بذریعہ r مائنس n تو نظر آتا ہے r جمع ایک جمع r مائنس n تو عدد میں اگر آپ کو
جمع ایک بن جاتا ہے n تو یہ صرف
پلس n پلس ون فیکٹوریل جو کچھ نہیں ہے سوائے r مائنس سے تقسیم کیا جاتا ہے n جمع ایک کو n جمع ایک حقیقتی ہے کیونکہ n تو یہ پلس 1 سے چنے گئے ہیں اور ہم n آئٹمز ہیں جو r آئیے یہاں بائیں طرف کی تشریح کو دیکھیں یہ ah جو کہ بائیں ہاتھ کی طرف ہے pr ون جمع ایک چیزوں سے n چیزوں کو r بنیادی طور پر ترتیب دیے گئے انتظامات کو دیکھ رہے ہیں۔
چیزوں n چیزوں کا انتخاب کرتے ہیں اور ان کو ترتیب دیتے ہیں جو r چیزوں میں سے n تو یہ نتیجہ کیا کہتا ہے کہ یہ وہی ہے کہ اگر آپ لیا جاتا ہے r اوقات میں ar چیزوں میں سے ایک چیز کو مائنس کرتے ہیں n r میں سے ترتیب دیتے ہیں اور
n سیٹوں کی تعداد کے برابر ہو گی آہ آئیے اسی طرح کی ایک خاصیت کو دیکھتے ہیں r جمع ایک خلیات میں سے ترتیب دیے گئے n تو یہ تعداد کے برابر ہے۔ مائنس ون پی آر مائنس ون اور اسی طرح پلس آر پی آر مائنس n مائنس ون جمع npr میں r فیکٹوریل جمع pr r جمع ایک ون
تو اگر ہم یہاں آخری ٹرم لیں
تو ہمارے پاس دائیں ہاتھ کی طرف ہے اور میں ایک ایک کرکے اصطلاحات کو جوڑتا ہوں

n بن جاتا ہے npr ٹائم این پی آر مائنس 1 پلس r تو مشق چار کا نتیجہ یہ ہے کہ یہاں یہ خاصیت ہے جو ہم کہہ رہے ہیں وہ یہ ہے کہ
pr پلس 1
تو اگر آپ یہاں اس آخری اصطلاح کو دیکھیں
مائنس ون ہے rpr گنا ضرب r تو یہاں یہ
rpr تو یہاں اگر آپ پہلی اصطلاح جو کہ
میں شامل کریں r پلس rpr تو
مائنس ون لیتا ہوں rpr فیکٹوریل کو دیکھیں اور اس اصطلاح کو میں r تو آئیے اس
کے سوا کچھ نہیں ہے r مائنس ون کے rpr پلس rpr تو یہ
تو اگر آپ اس چیز کو دیکھیں
لگا رہا ہوں r کی جگہ ni تو یہاں
کے برابر ہو جائے ٹھیک ہے اب یہ اصطلاح آیا ہے اور اگلی ٹرم کیا ہوگی یہاں اگلی ٹرم یہاں آہ ہے pr پلس 1 r تو یہ
مائنس ون ہوگی pr پلس 1 r ہے اور یہاں ٹرم pr پلس 1 r تو اب ہمارے پاس
پلس ون کے برابر ہے r ڈال کر یہ مشق ہے n تو پھر وہی چیز ہے جو
مائنس 1 ہے۔ اس pr پلس 2 r میں r بن جائے گا اب آپ اسے دوبارہ شامل کریں۔ یہاں اور اگلی ٹرم یہاں ہے جو کہ pr پلس ٹو r تو یہ
ہے pr پلس 1 n مائنس 1 میں دے دے گا جو کہ npr کو r پلس npr طرح آپ جاری رکھیں آخری ٹرم مجھے
r سے کم یا n تو میں اسے یہاں دکھاتا ہوں تاکہ اس پراپرٹی کو ثابت کریں کہ میں یہاں پچھلی پراپرٹی کا استعمال کر رہا ہوں اب یہ پراپرٹی
ڈالوں n کی مختلف قدروں کا انتخاب کروں گا لہذا اگر میں n سے کم یا اس کے برابر کے لیے درست ہے لہذا میں
rpr میں r ہے اور یہاں آخری اصطلاح ہے جو rpr فیکٹوریل کچھ نہیں بلکہ r کے برابر ہے۔ اس اصطلاح کو دیکھیں i اور r تو
مائنس ون ہے
جمع ایک rcr بن جاتی ہے اب اس اصطلاح کو میں یہاں دوسری اصطلاح کے ساتھ جوڑتا ہوں جو کہ pr پلس ون r تو اس خاصیت سے یہ
ہے۔ مائنس ون pr
مائنس ون pr پلس ون r میں r پلس pr پلس ون r تو یہ یہاں دی گئی اصطلاح ہے
کے طور پر حاصل کروں گا اب میں اسے pr پلس 2 r پلس ون میں اسے r برابر ہے n تو اس پراپرٹی کے ذریعے دوبارہ منتخب کر کے
s میں مل جائے گی npr minu کی اصطلاح npr plus r دوبارہ ملاتا ہوں اگلی اصطلاح کے ساتھ یہاں اور اسی طرح بالآخر مجھے
لہذا اگر میں یہاں سے ڈالوں .1
بن جاتا ہے pr پلس ون n تو یہ
کے برابر pr مائنس 1 n میں n ہے جو npr میں r مائنس n پرمیوٹیشن کی ایک اور خاصیت ah تو یہ خاصیت یہاں قائم ہو جاتی ہے
ہے
n سے تقسیم کیا گیا ہے تاکہ آپ ah فیکٹوریل r مائنس n فیکٹوریل میں n کو r مائنس n تو اگر میں بائیں ہاتھ پر غور کروں سائیڈ جو کہ
مائنس ون فیکٹوریل n میں n فیکٹوریل کی اصطلاح ملے گی جسے میں دوبارہ n کو عدد اور ڈینومینیٹر میں منسوخ کر دیں اور آپ کو r مائنس
اسی طرح ہم بھی ایسے ہی ہو pr ah مائنس ون n میں n مائنس ون فیکٹوریل جو کچھ بھی نہیں ہے سوائے r تقسیم کر کے لکھتا ہوں مائنس
مائنس ون آئیے اس کے ثبوت کو دیکھتے ہیں دائیں ہاتھ کی طرف npr is equal to n مائنس r پلس one in npr سکتے ہیں جیسے
پلس ون ہے جو منسوخ ہو r مائنس n سے تقسیم کیا گیا ہے اب یہاں پہلی اصطلاح r مائنس n فیکٹوریل کو n ہے جمع ایک r مائنس n
جاتی ہے
ہے npr ah فیکٹوریل سے تقسیم کیا جاتا ہے جو r مائنس n فیکٹوریل کو n تو آپ کو
چیزوں سے ترتیب اور یہ وہی ہے جیسا کہ وہاں سے n اس کی تشریح یہاں ہے ہم آر آرڈر کو دیکھ رہے ہیں۔ ایک وقت میں لی گئی ah تو پھر
پلس ایسی ہی ایک چیز اس طرح یہاں ضرب ہے جو چیز کو اگلی خاصیت دیتا ہے وہ بھی فطرت میں یکساں ہے r مائنس n مائنس ون اور پھر r
مائنس 1. pr مائنس 1 n میں n اسی طرح ہے npr
فیکٹوریل n فیکٹوریل ہے جو r مائنس n مائنس 1 فیکٹوریل تقسیم n میں n مائنس 1 جو کہ pr مائنس 1 n میں n تو دائیں ہاتھ کی طرف
کے طور پر ہم ترتیب اور مجموعے کے اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے نمبر تھیوری npr فیکٹوریل ہے جو ایک ہی ہے r مائنس n تقسیم
لگاتار عدد کی پیداوار پر غور کرتا ہوں n میں کچھ نتائج ثابت کر سکتے ہیں میں یہاں ایک مثال دوں گا لہذا اگر میں
فیکٹوریل سے تقسیم ہوتا ہے n تو یہ
مسلسل نمبروں پر غور کریں۔ n تو آئیے
پر غور کریں n جمع r جمع 2 اور اسی طرح r جمع 1 r تو آئیے
لگاتار عدد ہیں n تو یہ
فیکٹوریل سے تقسیم ہے n مثبت عدد ہیں آہ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ یہ n اور r تو یہاں
ترتیب اور امتزاج کا استعمال کرے گا لہذا ہم یہ لکھ سکتے ہیں کہ اگر ہم ان اصطلاحات پر e تو یہاں میں ایک ثبوت پیش کروں گا۔ جس میں ڈبلیو
غور کریں
فیکٹوریل سے ضرب کرتا ہوں r مائنس 1 ہے اور اسی طرح یہاں اگر میں r جمع rn جمع n تو یہ
سمجھتا n فیکٹوریل r فیکٹوریل سے تقسیم کیا جاتا ہے لہذا اگر میں اس کو r کو p فیکٹوریل مل جائے گا۔ جو r تو مجھے اس اصطلاح میں
ہوں
فیکٹوریل سے n فیکٹوریل کو n فیکٹوریل سے تقسیم کرنے کے سوا کچھ نہیں ہے اور اب ہم اسے مزید r فیکٹوریل کو r جمع n تو یہ
فیکٹوریل میں منتخب کریں n ضرب کے طور پر سمجھ سکتے ہیں لہذا آپ اسے دیکھیں یہ ہے n کو r پلس n کچھ نہیں سوائے
ہے اب یہ اس کا نمبر ہے rcr جمع n فیکٹوریل سے تقسیم کیا جا رہا ہے جو کہ n کو p تو ہمیں
تو مجھے آہ کے امتزاج کی تعریف کی طرف واپس جانے دو جو میں نے پچھلے لیکچر میں دی تھی۔ اگر ہم اس صحیح تعریف کو استعمال کرتے ہیں

کے مجموعوں کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے لہذا یہ غیر ترتیب شدہ انتظامات ہیں لہذا یہ ایک عدد k الگ الگ اشیاء کے سیٹ سے n nck تو
غیر ترتیب شدہ p: فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ایک عدد ہے جو میں جواب n کو p ٹھیک ہے لہذا چونکہ یہ ایک عدد ہے اس کا مطلب ہے کہ
فیکٹوریل سے تقسیم کیا جا سکتا ہے n کو p الگ الگ اشیاء سے تقسیم ہوتا ہے لہذا r جمع n تعداد سے n امتزاج کی r
برابر ہے 1 کو یک فیکٹوریل جمع میں کہنا دو میں دو s s تو آئیے کچھ مسائل حل کرتے ہیں مثال کے طور پر ہم تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ
فیکٹوریل n میں n فیکٹوریل جمع اور اسی طرح

Prutor@IITK

لکھ سکتے ہیں اس طرح میں لکھ سکتا ہوں دو مائنس ون کو ایک فیکٹوریل کے علاوہ اس دو کو ہم تین مائنس ون کو دو s تو ہم کیا کرتے ہیں ہم اسے
فیکٹوریل میں لکھ سکتے ہیں اگلی اصطلاح تین میں تین فیکٹوریل ہوں گے لہذا تین کو ہم چار مائنس ایک کو تین فیکٹوریل کے طور پر لکھ سکتے ہیں
فیکٹوریل میں لکھ سکتے ہیں n پلس 1 مائنس 1 کو n اور اسی طرح آخر میں
تو یہ 2 میں 1 فیکٹوریل کے علاوہ کچھ نہیں ہے جو 2 فیکٹوریل مائنس 1 فیکٹوریل جمع 3 کے علاوہ کچھ نہیں ہے۔ 2 فیکٹوریل مائنس 1 میں 2
فیکٹوریل مائنس این فیکٹوریل n جمع 1 میں n فیکٹوریل پلس 4 میں 3 فیکٹوریل مائنس 3 فیکٹوریل اور اسی طرح آخر میں
چونکہ ان میں سے ہر ایک کو اگلی لگاتار تعداد سے ضرب کیا جاتا ہے دو فیکٹوریل مائنس ون فیکٹوریل بنتا جا رہا ہے اب یہ اصطلاح پھر i تو یہ
فیکٹوریل بن رہی n پلس ون فیکٹوریل مائنس n سے تھری فیکٹوریل مائنس ٹو فیکٹوریل پلس فور فیکٹوریل مائنس تھری فیکٹوریل پلس اور اسی طرح
ہے اب آپ دیکھیں کہ یہاں یہ اصطلاحات دوربین کی رقم بن گئی ہے جو کہ پہلی ہے یہاں کی اصطلاح مائنس سیکنڈ ٹرم کی طرح ہے جیسے دو
فیکٹوریل مائنس ٹو فیکٹوریل اسی طرح یہاں آپ کے پاس اگلے ایک میں تین فیکٹوریل ہوں گے آپ کے پاس مائنس تھری فیکٹوریل ہے لہذا یہ شرائط
منسوخ ہو جائیں گی
پلس ون فیکٹوریل کے ساتھ جو کہ آخری ٹرم ہے مائنس دوسری ٹرم یہاں جو ایک n تو بالآخر تمام شرائط منسوخ ہو جائیں گی اور ہم رہ جائیں گے۔
ہے
پلس ون فیکٹوریل مائنس ون کے علاوہ کچھ نہیں ہے وہاں چھ لڑکے اور پانچ لڑکیاں 11 بیجوں پر بیٹھنے کے n تو اس سیریز کا یہ مجموعہ
ٹھیک ہے دو مخصوص لڑکوں کے نام رکھے گئے ہیں کہتے ہیں رمیش اور گیری اور کہتے ہیں ایک لڑکی ایک خاص health spa منتظر ہیں
اب ہمارے پاس انتظام ہو گا
کا نمبر معلوم کریں ۔ تمام لڑکوں اور لڑکیوں کے بیٹھنے کے طریقے ڈھونڈتے ہیں کہ رمیش اور گیری ملحقہ ہیں یعنی وہ ساتھ ساتھ بیٹھتے w تو
ہیں اور تیسرے بیٹھنے کے طریقے تلاش کرتے ہیں تاکہ روبی درمیان والی سیٹ پر ہو رمیش ایک پر ہے۔ روبی کے بائیں طرف اور گری کے دائیں
طرف سیٹ لیکن ضروری نہیں کہ اس سے ملحق ہو
تو آئیے ہم یہاں طریقوں کی تعداد کو دیکھتے ہیں آہ یہاں 11 بچے ہیں 6 لڑکے اور 5 لڑکیاں اور 11 سیٹیں ہیں
تو اگر ان سب کو بیٹھنا ہے
تو ہم اسے کتنے طریقوں سے کر سکتے ہیں اس لیے پہلے حصے میں گیارہ چیزوں کا انتخاب کرنا اور پھر ان کو ترتیب دینا اب یہ لڑکے اور
لڑکیاں الگ الگ ہوں گے کیونکہ وہ قابل شناخت ہیں اس لیے انتظامات کی تعداد کچھ نہیں مگر مثال کے طور پر ترتیب دیے گئے انتظامات کی تعداد
اگر میں ان میں سے 2 کا انتخاب کروں کہ رمیش اور گری کہوں
تو سب سے پہلے رمیش بیٹھا ہوا ہے پھر گری پہلے گریش اور پھر رمیش ہے
تو ان دو ترتیبوں میں اگر وہ پہلے سے ہیں
تو دو فیکٹریل آئیں گے۔ اب یہ گیارہ ہے لہٰذا جب کوئی پابندیاں نہ ہوں
تو طریقوں کی کل تعداد 11 فیکٹریل بن جائے گی
تو رمیش اور گیری کے بیٹھنے کے طریقوں کی کل تعداد جو کہ 11 فیکٹوریل ہے آپ مختلف انداز میں بحث کر سکتے ہیں پہلے شخص کو بھی
بٹھایا جا سکتا ہے۔ گیارہ طریقوں سے دوسرے شخص کو دس طریقوں سے بٹھایا جا سکتا ہے تیسرے شخص کو نو طریقوں سے بٹھایا جا سکتا ہے
اور اسی طرح گیارہ سے دس میں نو اور اسی طرح تین دو ایک تک جو کہ دوبارہ گیارہ فیکٹوریل ہے لہذا ہم دونوں طریقوں سے گیارہ کہہ سکتے
گیارہ یا ہم کہہ سکتے ہیں گیارہ فیکٹریل دونوں ایک ہی جواب دیں گے ٹھیک ہے آہ دوسرے میں ہم یہ پابندی لگا رہے ہیں کہ آہ رمیش اور p ہیں۔
گیری ملحقہ سیٹوں پر بیٹھیں اس لیے اگر وہ ایک ساتھ بیٹھیں
تو ہم ان کو ایک ہی ہستی سمجھ سکتے ہیں اگر رمیش اور گیری ملحقہ نشس
توں پر ہیں پھر ہم ان کو ایک ہستی کے طور پر مان سکتے ہیں
تو اب آہ ہے
تو اب ان دس چیزوں کے انتظامات دس فیکٹریل انتظامات کیونکہ جہاں کہیں بھی یہ رمیش اور گیری ظاہر ہونا ہے وہ ایک ساتھ ظاہر ہونا ہے لیکن
یقینی طور پر وہ خود اپنی پوزیشنوں کو تبدیل کرسکتے ہیں تاہم وہ اپنی جگہوں کو تبدیل کرسکتے ہیں تاکہ دو سے دس فیکٹریل جو کہ فیز کی کل
تعداد ہے میں اسے دوسرے حصے میں یہاں دہرانے دو میں رامیس اور گیری کو ہمیشہ ساتھ بیٹھنے کے لیے منتخب کر رہا ہوں۔ اس لیے اگر
انہیں ہمیشہ ساتھ ہی بیٹھنا ہے
تو نو بچے ہیں اور نو کے علاوہ یہ رمیش گری میں ان کو ایک ہستی سمجھتا ہوں
جو کہ رمیش کے p 10 تو اب یہ دس چیزیں بن رہی ہیں اب ان دس لوگوں کا بندوبست کرنا ہے اب ترتیب دیے گئے انتظامات کی تعداد ہوگی 10
درمیان 10 فیکٹوریل ہے غصے میں دوبارہ وہ اپنی پوزیشنز کو تبدیل کر سکتے ہیں تاکہ یہ 2 گنا ہو
تو اب اگر آپ ضرب کے اصول کو لاگو کرتے ہیں
تو یہ 2 سے 10 فیکٹوریل بن جاتا ہے اس طرح ان 6 لڑکوں اور 5 کو بیٹھنے کے طریقوں کی کل تعداد ہے۔ لڑکیاں ایسی کہ ان میں سے 2 ہمیشہ
ساتھ رہتی ہیں آہ اب تیسرا حصہ دیکھیں تیسرے حصے میں ہم یہاں کچھ پابندی لگا رہے ہیں کہ روبی اس میں ہے درمیانی نشست اور رمیش روبی
کے بائیں جانب ایک نشست پر ہے اور گیری ایک نشست پر ہے جو دائیں جانب ہے
تو آئیے ہم یہاں کی پوزیشننگ کو دیکھتے ہیں لہذا ہم صرف اس کی وضاحت کے لیے کچھ خاکہ بناتے ہیں تاکہ آپ کے پاس ایسا ہو۔ آپ کے پاس
ہے ہم صرف نام بیج کہہ سکتے ہیں ایک دو تین چار پانچ چھ سات آٹھ نو آہ دس اور گیارہ
تو درمیان والی سیٹ میں کل گیارہ سیٹیں ہیں روبی ہے
تو اس کی سیٹ یہاں طے ہے اب یہ رمیش ان بیجوں میں سے کسی پر بھی ہو سکتا ہے اور اسی طرح گیری یہاں ان بیجوں میں سے کسی پر بھی
ہو سکتا ہے
تو امکانات کی کل تعداد کتنی ہے
تو روبی درمیانی نشست پر قابض ہے جو کہ سیٹ نمبر چھ ہے لہذا یہاں صرف ایک ہی امکان ہے کہ اب رمیش کو پانچ سی ون میں بٹھایا جا سکتا
ہے جو کہ پانچ طریقے ہیں کیونکہ اسے ان پانچ جگہوں میں سے کسی بھی جگہ پر بٹھایا جا سکتا ہے اور اسی طرح گیری کو دوبارہ پانچ سی ایک
میں بٹھایا جا سکتا ہے یعنی پانچ طریقے سے اب ہم نے گیارہ میں سے تین افراد کو بٹھایا ہے اس لیے آٹھ افراد باقی رہ گئے ہیں
جو کہ 8 فیکٹوریل ہے اس لیے بقیہ آٹھ بچوں کو باقی آٹھ سیٹوں پر آٹھ p 8 تو اب وہ ہو سکتے ہیں کہ کتنے کا آرڈر دیا گیا ہے۔ ان میں سے 8
c فیکٹوریل طریقوں سے بٹھایا جا سکتا ہے لہذا اب ہم ضرب کے اصول کو ضرب کے اصول سے لاگو کرتے ہیں سیٹنگ پلانز کی کل تعداد پانچ
ایک ہے۔ یہ پانچ سے پانچ میں آٹھ فیکٹوریل ہے
ah تو یقیناً کوئی بھی اس کا اندازہ لگا سکتا ہے کیونکہ آپ سمجھ سکتے ہیں کہ آٹھ فیکٹوریل کی یہ قدر بڑی ہے اور پھر آپ کو اسے دوبارہ پچیس
سے ضرب دینا پڑے گا، آئیے میں اسی میں ایک اور مسئلہ رکھتا ہوں۔ مندرجہ بالا مسئلہ یہ ہے کہ لڑکے اور لڑکیاں متبادل نشس
پھر لڑکی پھر لڑکا پھر لڑکی اس طرح اگر ہم ایسا لگاتے ہیں y توں پر کتنے طریقوں سے بیٹھ سکتے ہیں یعنی ایک

Prutor@IITK

تو پھر اس آہ کو دیکھتے ہیں مجھے یہ ترتیب دوبارہ کرنے دیں کیا اب وہاں چھ لڑکے اور پانچ لڑکیاں ہیں
تو اگر ہم ایک لڑکے سے شروع کریں گے
لڑکا ur تو یہاں ایک لڑکی آئے گی پھر لڑکا پھر لڑکی پھر لڑکا پھر لڑکی پھر لڑکا پھر لڑکی پھر لڑکا پھر لڑکی اور
تو فوراً آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس ترتیب میں لڑکے کو جگہوں کی طاق تعداد میں ہونا چاہیے جو کہ ایک تین پانچ سات نو اور گیارہ ٹھیک ہے اور پھر درمیانی پانچ جگہوں پر جو یہاں دو چار چھ آٹھ اور دس ہیں۔ اب لڑکیوں کو بٹھایا جا سکتا ہے اگر آپ ترتیب بدل دیں مثال کے طور پر اگر آپ کسی لڑکی سے شروع کریں
تو آپ فوراً بتا سکتے ہیں کہ ایک لڑکا رہ جائے گا کیونکہ اگر آپ یہاں سے کہنا شروع کریں گے
تو ایک لڑکا بچ جائے گا اور آپ یہاں ڈالنا پڑے گا
تو وہ باری باری نہیں ہوں گے اس لیے چونکہ لڑکوں کی تعداد لڑکیوں کی تعداد سے بالکل ایک زیادہ ہے ، سیٹنگ پلان کی صحیح تعداد صرف اس طرح ہوگی
تو آپ کو کیا دیکھنا ہوگا کہ ایسے کتنے انتظامات ہیں ممکن ہے لہذا ہم یہاں دیکھ سکتے ہیں کہ چھ تعصب چھ طاق نمبر والی نشس توں پر قبضہ کر سکتا ہے جو کہ چھ فیکٹوریل طریقوں سے ہے اور باقی پانچ ہموار نمبر والی سیٹوں میں پانچ لڑکیوں کو پانچ فیکٹوریل طریقوں سے بٹھایا جا سکتا ہے
تو دوبارہ ضرب اصول کے ذریعے متبادل نشس توں پر لڑکوں اور لڑکیوں کے بیٹھنے کے طریقوں کی کل تعداد پانچ فیکٹوریل میں چھ فیکٹوریل ہے لہذا یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ترتیب کی گنتی کیسے کی جاتی ہے یا آپ کہہ سکتے ہیں کہ ترتیب شدہ انتظامات ہیں، آہ اب مجھے ایک یا دو لینے دیں ایسے امتزاج کے لیے مسائل جن میں غیر منظم انتظامات ہوتے ہیں لہٰذا ایک اسکول میں 25 میں سے 11 اساتذہ ویلیو ایجوکیشن کے حق میں ہیں کہ آٹھ اس کے خلاف ہیں اور تین غیر جانبدار ٹھیک ہیں، اس لیے آیا ویلیو ایجوکیشن کا کورس متعارف کرایا جائے یا نہیں، 11 اساتذہ اس کے حق میں ہیں۔ آٹھ اساتذہ اس کی مخالفت کرتے ہیں اور تین کی کوئی رائے نہیں ہے وہ غیر جانبدار ہیں کہ پانچ اساتذہ کو کتنے طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے تاکہ وہ ویلیو ایجوکیشن کے حق میں ہوں یا دوسری ان کی ایک ہی رائے ہے یا یوں کہہ لیں کہ دو حق میں ہیں دو مخالف ہیں اور ایک ہے۔ غیرجانبدار
تو آئیے یہاں حل کو دیکھتے ہیں اب یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ غیر منظم انتظامات ہیں کیونکہ اگر ہم پانچ اساتذہ کا انتخاب کر رہے ہیں
تو کہتے ہیں کہ ہم کس ترتیب سے منتخب کرنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کیونکہ وہ نہیں بیٹھ رہے ہیں یا کچھ ایسا ہی ہے کہ ہم صرف ان کا غیر ترتیب شدہ ذیلی سیٹوں کی تعداد ہے لہذا پہلی صورت ah انتخاب کر رہے ہیں لہذا یہ مخصوص پابندیوں کے تحت 25 میں سے 5 سائز کے میں میں ہوں یہ پوچھنا کہ وہ سب ویلیو ایجوکیشن کے حق میں ہیں اس کا مطلب ہے کہ جن 5 اساتذہ کا انتخاب کیا گیا ہے وہ صرف اس گیارہ میں سے ہونے چاہئیں
تو یہ کچھ نہیں بلکہ گیارہ کو دوسری صورت میں پانچ کا انتخاب کرنا ہے
تو اب ان کی بھی یہی رائے ہے۔ ایک ہی رائے
تو ہو سکتا ہے کہ وہ سب کے حق میں ہوں یا وہ سب کے خلاف ہوں
تو آٹھ سی پانچ اور آہ مجھے لگتا ہے کہ میں نے حساب غلط کیا ہے یہاں یہ چھ ہونا پڑے گا چھ غیر جانبدار ہیں یا یہ ہو سکتا ہے کہ سب غیر جانبدار ہوں
پانچ ٹھیک ہے c تو چھ
تو ہم نے کیا حساب لگایا ہے کہ پچیس میں سے پانچ اساتذہ کا انتخاب کتنے طریقوں سے کیا جا سکتا ہے کہ ان کی رائے ایک ہی ہے
تو یا
تو ان سب کو ویلیو ایجوکیشن کے حق میں ہونا چاہیے اور وہ تعداد اس کے سوا کچھ نہیں ہے۔ گیارہ پانچ کا انتخاب کرتے ہیں کیا وہ سب اس کے خلاف ہیں
پانچ ہوگا یا یہ سب غیر جانبدار ہیں c تو وہ نمبر آٹھ
پانچ ہے c تو وہ نمبر چھ
تو یہاں ہم نے جو کچھ کیا ہم نے اضافی اصول کو لاگو کیا ہے لہذا کوڈز کی یہ کل تعداد ہوسکتی ہے اب آسانی سے حساب لگایا جاتا ہے کہ اگلا یہ ہے کہ ہم پانچ کو اس طرح چنتے ہیں کہ دو حق میں ہیں دو مخالف ہیں اور ایک غیر جانبدار ہے
تو اگر دو حق میں ہیں
ایک طریقے سے منتخب c دو طریقے اور ایک نیوٹرل ہے کو چھ c تو گیارہ سی دو طریقوں سے دو مخالف ہیں اس کا انتخاب کیا جا سکتا ہے۔ آٹھ کیا جا سکتا ہے اور پھر آپ کو ضرب کے اصول کو لاگو کرنا ہوگا
بن جاتا ہے، یقیناً ان اعداد کو آسانی سے شمار کیا جا سکتا ہے آئیے ہم غور کریں۔ قرعہ اندازی میں c دو میں چھ c دو میں آٹھ c تو یہ گیارہ آٹھ نمبروں کے امتزاج پر ایک اور مسئلہ جیتنے والے نمبروں کے طور پر 1 سے 99 تک کا انتخاب کیا جاتا ہے اگر تمام نمبر اس شخص سے ملتے ہیں جو شرط لگا رہا ہے
آٹھ نمبر اور اگر تمام آٹھ نمبر قرعہ oses تو میں کہوں گا کہ ہم نے کچھ صوابدیدی نام رکھ دیا ہے کہ جان ونس پہلی قیمت ہے لہذا وہ چو اندازی میں دیے گئے نمبروں سے ملتے ہیں
تو اسے پہلا انعام ملتا ہے اگر سات نمبر ملتے ہیں
تو جان کو دوسری قیمت ملتی ہے اور اگر چھ نمبر ملتے ہیں
تو جان کو تیسری قیمت ملتی ہے جان کتنے طریقوں سے کر سکتا ہے نمبروں کا انتخاب کریں تاکہ اسے کچھ قیمت مل جائے اب اگر اسے پہلی قیمت حاصل کرنی ہے
تو تمام امکانات بالکل ایسے ہی ہونے چاہئیں جو کہ لاٹری کے ذریعے دیے گئے ہیں یعنی فرض کریں نمبر 3 کا انتخاب کیا جائے
تو اسے 3 ملنا ہوں گے۔ نمبر 7 کا انتخاب کرنا ہے پھر 7 کا ہونا ضروری ہے اگر یہ کہے کہ 13 45 یا جو بھی نمبر ہیں
تو اس سیٹ کی شناخت قرعہ اندازی کے لیے مختص کردہ نمبروں کے طور پر کی جاتی ہے لہذا پہلی قیمت حاصل کرنے کے طریقوں کی تعداد بالکل ایک آہ نمبر ہے۔ دوسری قیمت حاصل کرنے کے طریقے اب دوسری قیمت میں اسے ان آٹھ میں سے سات نمبر حاصل کرنے کے قابل ہونا چاہئے اور ایک نمبر کوئی دوسرا نمبر ہوسکتا ہے لہذا اب اسے 99 میں سے آٹھ سی سات ہونا پڑے گا ۔ باقی 91 نمبر موجود ہیں اس لیے اسے باقی 91 نمبروں میں سے ایک نمبر ملے گا اور ہم یہاں ضرب کے اصول کو لاگو کرتے ہیں کیونکہ کل نمبر آٹھ ہیں اس لیے یہ سات نمبر وہی ہونا چاہیے جو ان آٹھ نمبروں میں سے ہوں اور کوئی ایک نمبر۔ یقیناً مختلف ہو سکتا ہے اس لیے آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ یہ سات سو اٹھائیس ہے پھر ہے کیونکہ تیسری قیمت ہے اگر 6 2 c 91 6 c آئیے ایک بار پھر تیسری قیمت حاصل کرنے کے طریقوں کی تعداد کو دیکھتے ہیں جو کہ 8 نمبر اس طرح ملتے ہیں۔ یہ 6 نمبر ان آٹھ نمبروں سے ہونے چاہئیں جو قرعہ اندازی میں دیئے گئے ہیں پھر باقی دو نمبر اکیانوے نمبروں میں سے کوئی اور ہو سکتے ہیں

تو یقیناً اس کا دوبارہ اندازہ لگایا جا سکتا ہے کہ اٹھائیس سے چار ہزار پچانوے یعنی گیارہ ہزار۔ چار چھ چھ صفر آہ
تو اب آپ اضافی اصول لاگو کرتے ہیں قیمت جیتنے کے طریقوں کی کل تعداد اس طرح جمع سات اٹھائیس جمع ایک ہے
تو یہ ہے ایک ایک پانچ تین آٹھ نو ایک لاکھ پندرہ ہزار تین سو اناسی ان طریقوں کی کل تعداد ہے جس سے وہ حقیقت میں آہ جیت سکتا ہے یقیناً ایک انعام جیت سکتا ہے اگر آپ کو لگتا ہے کہ یہ ایک بہت بڑی تعداد ہے
ah تو صرف آپ کو اس کا موازنہ ان کی کل تعداد سے کرنا ہے۔ امکانات
ایک اور گنتی کی مشق جس میں آپ ترتیب کو استعمال کر ah ہو گی جو درحقیقت ایک بہت بڑی تعداد ہو گی 10 c تو امکانات کی کل تعداد 99
سکتے ہیں تین ہزار اور چھ ہزار کے درمیان عدد کی تعداد تلاش کریں جس میں اور ہر ہندسہ نہیں ہے دہرایا گیا اس کا مطلب ہے کہ 3000 سے
کے درمیان کتنے نمبر ہیں جن میں ایک ہندسہ نہیں دہرایا جاتا ہے یعنی تین ہزار خود نہیں مانے جاتے ہیں 6000
تو مثال کے طور پر تین ہزار ایک کو نہیں سمجھا جا سکتا کیونکہ صفر کو دہرایا جاتا ہے اسی طرح فرض کریں کہ میں چار ہزار ایک سو بائیس کہوں
تو اس نمبر کو بھی شمار نہیں کیا جاتا ہے
ہو سکتا ہے کیونکہ نمبر ہزار اور چھ ہزار کے درمیان ہونا ضروری ہے اب تین صورتیں ہیں باقی 5 r تو آئیے دیکھتے ہیں کہ پہلا ہندسہ 3 4
نو ہندسوں میں سے باقی تین ہندسوں کا انتخاب کیا جا سکتا ہے نو ہندسوں کا مطلب یہ ہے کہ دیکھیں آپ صفر ایک دو نو پر غور کر رہے ہیں
تو دس ہندسے ہیں اب ایک ہندسہ نکالا جا چکا ہے
تو باقی نو ہندسوں کو وہاں سے منتخب کرنا ہے۔ تین لیکن الگ اور پھر یہ کچھ بھی نہیں بنتا ہے لیکن ترتیب کی تعداد جو ایک وقت میں نو سے لے کر نو پی تھری ہوتی ہے
سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ چھ فیکٹوریل ہے جو کہ ایک k مائنس n ہے جو کہ 3 میں 9 فیکٹوریل کو 3 p تو ایسے ہندسوں کی کل تعداد 3 میں 9 ہزار پانچ سو بارہ ہے
تو بنیادی طور پر تین ہزار نمبروں میں سے ایک ہزار پانچ سو بارہ نمبر ایسے ہیں جن میں کوئی ہندسہ نہیں دہرایا جاتا آہ اب میں ایک اور مسئلہ تلاش کرتا ہوں کہ اوپر والے مسئلے میں کہتے ہیں کہ نمبر تلاش کریں۔ یہاں تک کہ ہندسے
تو آئیے اس کو دیکھتے ہیں پہلے ہندسوں کو پہلا ہندسہ جفت نمبروں کا پہلا ہندسہ بنیادی طور پر مجھے یہ کہنا چاہئے کہ پہلا ہندسہ آہ اگر پہلا ہندسہ ہے
آخری ہندسہ 0 دو چھ آٹھ سے ہو سکتا ہے جو کہ چار طریقے سے ہے اب باقی آٹھ ہندسوں میں سے دوسرا اور تیسرا e تو 4 ٹھیک ہے پھر وہی
ہندسہ منتخب کیا جا سکتا ہے کیونکہ دو ہندسوں کو لیا گیا ہے پہلا ہندسہ چار ہے اور دوسرا ہندسہ یکساں نمبر کے طور پر منتخب کیا گیا ہے۔ ان
دو میں چار میں آٹھ p دو طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے بالکل ٹھیک ہے لہذا نمبر چار ہو گیا آٹھ p چار میں سے دو باقی ہندسوں کو آٹھ
فیکٹوریل کو چھ فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا جو کہ دو سو چوبیس ہے آئیے پہلے کو بھی دیکھیں۔ ہندسہ تین یا پانچ ہوسکتا ہے اگر پہلا ہندسہ تین آر پانچ ہے
تو یہ دو طرح سے ٹھیک ہے پھر آخری ہندسہ 0 سے 4 چھ آٹھ تک ہوسکتا ہے جو کہ پانچ طریقوں سے ہے اور پھر باقی دو ہندسوں کو آٹھ پی ٹو میں منتخب کیا جاسکتا ہے۔ آٹھ فیکٹوریل کو چھ فیکٹوریل بیس سے تقسیم کیا جاتا ہے
تو دو میں سے پانچ میں سے پچاس چھ میں طریقوں کی کل تعداد کیا ہے جو کہ پانچ سو ساٹھ ہے
تو اب آپ صرف ان دونوں کو جوڑیں
تو اضافی اصول کے مطابق مجموعی عدد کی تعداد 3000 اور 6000 کے درمیان تاکہ ہندسوں کو دہرایا نہ جائے دو دو چار جمع پانچ چھ صفر ہے
جو کہ سات سو چوراسی آہ ہے میں اس بیان کو یہاں دہراتا ہوں 3000 سے 6000 کے درمیان ہندسوں کے انٹیجرز کی کل تعداد جہاں ہندسوں کو دہرایا نہیں جاتا ہے ایک ہزار پانچ ہے ان میں سے ایک سو بارہ کتنے ایسے ہیں جہاں جفت اعداد ہیں
تو اس میں سے سات سو چوراسی ایسے ہیں جہاں اعداد بھی آہ ہیں اگلے لیکچر میں میں ترتیب اور امتزاج کے اس مسائل کے مختلف دیگر اطلاقات جاری رکھوں گا۔ آہ بنیادی طور پر ترتیب دیے گئے انتظامات کی ترتیب نمبر اور مجموعے میں غیر ترتیب شدہ انتظامات کی تعداد میں مختلف قسم کے مسائل ہو سکتے ہیں جہاں یہ چیزیں لاگو ہوں اس لیے ہم آپ کے اگلے لیکچر میں کچھ اور مسائل پر بات کریں گے۔

Prutor@IITK