پچھلے لیکچر میں میں نے گنتی کے موضوع کو متعارف کرایا تھا اور ہم نے اس کے تاریخی پہلوؤں پر تھوڑی سی بات کی تھی کہ اس موضوع
نے پچھلی چند صدیوں میں کس طرح ترقی کی اور پھر ہم نے گنتی کے بنیادی اصولوں پر بحث شروع کی۔ اصول ایک اضافی اصول تھا جو صرف
یہ کہتا ہے کہ اگر ایک قسم کے کام کرنے کے متعدد طریقے ہیں
تو دوسری چیز کو کرنے کے کئی طریقے ہیں
تو ان میں سے کسی ایک کو کرنے کے طریقوں کی کل تعداد کیا ہے لہذا یہ صرف شامل کر رہا ہے گنتی کے دوسرے بنیادی اصول کو ضرب کا
طریقوں سے ہوتا ہے اور m اصول کہا جاتا ہے جس میں ہم دو مختلف واقعات کے بیک وقت وقوع پذیر ہونے کو دیکھتے ہیں لہذا اگر ایک واقعہ
طریقوں سے ہوتا ہے n دوسرا واقعہ
تو یہ دونوں ایک ساتھ کتنے طریقوں سے واقع ہوتے ہیں؟ اس کا مطلب ہے کہ یا
o تو ہم کہتے ہیں کہ پہلے واقع ہوتا ہے پھر دوسرا واقع ہوتا ہے یا دوسرا واقع ہوتا ہے پھر پہلا ہوتا ہے یا یہ بالکل بیک وقت بھی ہوسکتا ہے۔
n میں m پھر یہ ضرب بن جاتا ہے جو کہ مراحل کی کل تعداد ہے
تو آئیے اس چیز کو واضح کرنے کے لیے کچھ مثالوں کو دیکھتے رہیں
ہندسہ پہلا نہیں ہے بلکہ پانچواں اور تیسرا ah تو اگلا مسئلہ یہ ہے کہ کتنے چھ ہندسوں کے قدرتی اعداد بن سکتے ہیں جن کا پہلا اور تیسرا
صفر ایک ہندسہ ہوسکتا ہے لہذا ہم یہاں بھی صفر g ہیں ہم فرض کرتے ہیں کہ صفر بھی ہے کیونکہ یہاں ah ہندسہ طاق ہے اور باقی ہندسے
فرض کرتے ہیں ah کو
تو آئیے حل کو دیکھتے ہیں۔ پہلا ہندسہ بھی ہے اس لیے امکانات ہیں 2 4 6 8 یعنی 4 طریقے ہیں ٹھیک ہے پہلا ہندسہ صفر نہیں ہو سکتا کیونکہ
ہم چھ ہندسوں کے نمبر کہہ رہے ہیں اس لیے پہلا ہندسہ صفر نہیں ہو سکتا اس لیے آہ چونکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ اسے کرنا ہے اس لیے بھی کہ
ہم نے شرط رکھی ہے کہ تیسرا اور پانچواں ہندسہ طاق ہے اس لیے پہلا دوسرا چوتھا اور چھٹا ہندسہ وہ برابر ہیں اس لیے پہلے ہندسے کو بھی
ہندسہ ہر ایک 0 2 چار چھ آٹھ میں سے کسی ایک سے ہو سکتا si xth چار مختلف طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے پھر دوسرا چوتھا اور
ہے یعنی پانچ میں سے پانچ میں پانچ طریقوں سے اس لیے میں نے یہاں ضرب کے اصول کو لاگو کیا ہے کہ دوسرا ہندسہ پانچ طریقوں سے
منتخب کیا جا سکتا ہے چوتھا ہندسہ پانچ طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے اور چھٹا ہندسہ پانچ طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے اور ان سب
کو ایک ساتھ ہونا ضروری ہے لہذا پانچ میں پانچ پانچ طریقوں سے اب ہم تیسرا دیکھتے ہیں تیسرا اور پانچواں ہندسہ یا
تو ایک تین پانچ سات یا نو ہو سکتا ہے یعنی پانچ۔ تیسرا ہندسہ منتخب کرنے کے مختلف طریقے اور پانچواں ہندسہ منتخب کرنے کے پانچ مختلف
طریقے جو کہ پانچ میں پانچ طریقے ہیں
تو اب ہم نے طے کر لیا ہے کہ پہلا ہندسہ چار طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے دوسرا تیسرا چوتھا پانچواں اور چھٹا ان میں سے ہر ایک کو
پانچ میں منتخب کیا جا سکتا ہے۔ طریقوں سے طریقوں کی کل تعداد اتنی بن جاتی ہے کہ اس طرح کے چھ ہندسوں کی کل تعداد چار سے پانچ کی
طاقت پانچ ہے یقیناً آپ اسے ضرب دے سکتے ہیں اور پھر دیکھیں جواب ہے بارہ ہزار پانچ سو اس طرح کے نمبر ہیں آہ مجھے صرف دہرانے دیں
یا مسئلہ کا جائزہ لیں وہاں چھ ہندسے ہیں جو ہم خاص انداز میں اس چھ ہندسوں کا انتخاب کرنا چاہتے تھے
تو ہم نے کہا کہ تیسرا اور پانچواں ہندسہ طاق ہے اور باقی ہندسے ہیں چاہے ہم کریں کہ پھر پہلا ہندسہ منتخب کرنے کے لیے ہمیں دو چار چھ
سو میں سے انتخاب کرنا ہوگا اس لیے اب کل طریقوں کی تعداد چار ہے باقی کے لیے ان میں سے ہر ایک کو پانچ مختلف طریقوں سے منتخب کیا
جاسکتا ہے اس لیے پانچ ہندسے جو کہ پہلا دوسرا آہ دوسرا تیسرا چوتھا پانچواں اور چھٹا ہندسہ ان کو پانچ سے طاقت پانچ طریقوں سے منتخب کیا
جاسکتا ہے لہذا امکانات کی کل تعداد چار میں پانچ سے طاقت پانچ ہے جو کہ کل ایسے بارہ 12500 نمبر ہیں آئیے ایک اور لیتے ہیں۔ ریاضی کی
ریاضی دان ہیں آہ یہ پتہ چلتا ہے کہ ہر ریاضی دان نے کانفرنس میں ہر دوسرے ریاضی دان کے ساتھ بالکل ایک مسئلہ پر n کانفرنس میں مسئلہ
تبادلہ خیال کیا
ریاضی دان ہوتے ہیں n مائنس ایک دوسرے ریاضی دانوں سے بحث کرتا ہے آہ وہاں کل n تو کتنے مسائل پر تبادلہ خیال کیا گیا تھا لہذا ہر ایک
مائنس ون پر بحث کرتا ہے n ہر ایک دوسرے سے
مائنس ون میں ہوتا ہے اب اس مخصوص گنتی میں ہر شخص کو دو بار شمار کیا جاتا ہے۔ کیونکہ مثال کے طور پر n تو یہ ضرب کے اصول سے
کے ساتھ بحث کرتا ہے b اگر میں کہتا ہوں کہ ریاضی دان ایک ریاضی دان
کے ساتھ بحث کرتا ہے a ریاضی دان b تو میں نے اسے ایک بار پھر شمار کر لیا ہے اب میں کہہ رہا ہوں کہ ریاضی دان
تو یہ دو بار ہوگا جبکہ میں یہ پابندی لگا رہا ہوں کہ ہر ایک دوسرے کے ساتھ بحث کرے۔ مسئلہ
مائنس ون میں شمار کیا گیا ہے لہذا ہمیں دو سے تقسیم کرنا پڑے گا تاہم یہاں ہر ایک کو n میں دو بار n تو اس کا مطلب ہے کہ اب ہر شخص کو
کی تھوڑی سی ترمیم کے ah شمار کیا گیا ہے اس لیے ہم نے اصل میں ضرب کے اصول کو لاگو کیا ہے لیکن اس خاص مسئلے میں ah دو بار
ساتھ آہ میں اس طرح کا ایک اور مسئلہ حل کرتا ہوں کہ 10 ہندسوں کے ٹیلی فون کوڈ کہاں بنائے جا سکتے ہیں۔ پہلے دو ہندسے نو اور چار ہیں
اور تیسرا ہندسہ صفر نہیں ہو سکتا اس لیے اگر آپ اس کو دیکھیں
تو پہلا ہندسہ نو کے طور پر مقرر ہے لہذا پہلا ہندسہ بالکل ایک طرح دوسرے ہندسے کے لیے آپ چار کے طور پر طے کر رہے ہیں لہذا اب
تیسرا ہندسہ نہیں ہے۔ صفر
تو تیسرا ہندسہ نمبر ایک سے دو تین سے نو تک ہو سکتا ہے
تو نو طریقے اور چوتھے مقام تک دسویں جگہ تک آپ کے پاس صفر ایک دو سے نو تک ہو سکتے ہیں
تو دس طریقے ہیں اب یہ سات ہیں
تو ضرب کے ذریعے اصول
جمع z جمع y جمع x تو ضرب کے اصول کے ذریعے کوڈز کی کل تعداد نو سے دس کی طاقت سات تک ہوتی ہے مثال کے طور پر اگر میں
سمجھوں کہتے ہیں کہ میں ایکس ون پلس ایکس ٹو پلس ایکس ایم آئی ون پلس وائی ٹو پلس ینز ون er جمع d جمع c جمع b کو ایک جمع t
پلس زیڈ ٹو پلس زیڈ ٹی اب آپ غور کر سکتے ہیں کہ کیا ہم یہاں پروڈکٹ کو دیکھتے ہیں یہ کچھ بھی نہیں ہے بلکہ یہ دو سیٹوں کے کارٹیشین
جس کے پہلے سیٹ میں چار عناصر ہیں اور دوسرے سیٹ میں پانچ عناصر ہیں کیونکہ ہر اصطلاح n پروڈکٹ سے بہت مشابہت رکھتا ہے۔
xa plus xb plus xc plus xd plus xe دوسری صورت میں ہر اصطلاح کے ساتھ بالکل ایک بار ظاہر ہوگی جیسے آپ کے پاس
وغیرہ tatbte وغیرہ کے ساتھ اور آخر میں yayb اسی طرح پھر
تو یہ بالکل دو سیٹوں کے کارٹیشین پروڈکٹ کے طور پر کام کر رہا ہے جن میں سے ایک چار عناصر پر مشتمل ہے اور دوسرا پانچ عناصر پر
کی b مشتمل ہے لہذا پہلی صورت میں اصطلاحات کی کل تعداد بالکل وہی ہے جو کارٹیشین پروڈکٹ میں ہے جہاں ایک کراس ہی 4 ہے اور
پانچ ہے cartesian product cardinality
کچھ نہیں بلکہ چار میں پانچ ہے جو کہ بیس کے برابر ہے لہذا اگر ہم اس دلیل کو دوسرے حصے میں اس cardinality کی b تو کراس
مسئلے کے دوسرے حصے تک بڑھاتے ہیں
پر 3 e عناصر پر مشتمل سیٹ t اور 2 e عناصر پر مشتمل سیٹ n پر 2 e عناصر پر مشتمل سیٹ m تو آپ دیکھ سکتے ہیں کہ آیا میں

غور کریں
کی پیداوار کے علاوہ کچھ نہیں بنتا ہے۔ دو کراس ای تھری e one cross e تو یہ
کو اگلی نوٹیشن متعارف ah ہے اب میں t ah میں n میں m تو ایک میں دی گئی استدلال کے بعد ہم کہہ سکتے ہیں کہ اصطلاحات کی تعداد
فیکٹوریل ہیں n قدرتی اعداد جو n فیکٹوریل پہلے کی پیداوار کو ظاہر کرتا ہے۔ n کرواتا ہوں جسے فیکٹوریل اشارے کہا جاتا ہے لہذا اشارے
n مائنس 1 میں n برابر ہیں 1 میں 2 میں 3 میں
تو مثال کے طور پر ہم کہتے ہیں کہ ایک فیکٹوریل ایک کے برابر ہے دو فیکٹوریل ایک کے برابر ہے دو میں دو تین فیکٹوریل ایک کے برابر ہے دو
میں تین جو کہ چھ کے برابر ہے اور اسی طرح ایک کنونشن کے طور پر ہم صفر فیکٹوریل کو ایک آہ قرار دیتے ہیں یہ ترتیب اور امتزاج کے کچھ
دوسرے اشارے کے ساتھ مستقل مزاجی کو برقرار رکھنے کے لیے ہے جسے میں بعد میں آہ میں استعمال کروں گا کہ یہ نکلے گا اگر ہم 0
فیکٹوریل کو 1 مانتے ہیں
تو اشارے کی مستقل مزاجی بھی برقرار رہے گی ہم منفی عدد کے فیکٹوریل کی وضاحت نہیں کرتے ہیں لہذا یہ صرف بنیادی طور پر مثبت عدد
فیکٹوریل n کے لیے ہے اور ہم 0 فیکٹوریل کو بطور خاص شامل کرتے ہیں۔ معاملہ اب ایک بہت ہی آسان چیز ہے جسے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ
جس کا ذکر میں نے شروع میں مشترکہ مضمون کی تاریخی ترقی کے بارے میں کیا تھا اس سے ایسے ah سے مائنس ون فیکٹوریل n برابر ہے
تاہم انہوں ah یہ قدرتی اعداد کی مسلسل پیداوار ہے ah اشارے ملتے ہیں کہ حقیقت میں یہ اشارے ہندوستانی ریاضی دانوں کو بھی معلوم تھا۔
کرسٹیئن کرام کے ah اصل میں 1808 میں n factorial وغیرہ یہ اشارے n factorial کا استعمال نہیں کیا اشارے ah نے
ذریعہ متعارف کرایا گیا تھا اس بات کے اشارے ملتے ہیں کہ قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں نے لگاتار قدرتی کی پیداوار کا تصور عدد جدید اشارے
فیکٹریل بڑھتا ہے۔ n اٹھارہ سو آٹھ ھ میں کرسچن کرام نے متعارف کرایا تھا مجھے صرف اس کی وضاحت کرنے دو ہم نوٹ کر سکتے ہیں کہ
بڑھتا ہے n بہت تیزی سے
تو مثال کے طور پر اگر میں غور کرتا ہوں کہ چار فیکٹوریل یہ چوبیس ہو جاتا ہے اگر میں پانچ فیکٹوریل پر غور کرتا ہوں
تو یہ پانچ میں چار فیکٹوریل بن جاتا ہے جو کہ ایک سو چھبیس فیکٹوریل چھ میں پانچ فیکٹوریل بن جاتا ہے جو سات سو بیس بنتا ہے پھر سات
فیکٹوریل سات سے سات سو بیس ہو جائے گا
تو آپ فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ تعداد سات فیکٹوریل سے بہت تیزی سے بڑھ رہی ہے ہم پانچ ہزار چالیس پر آ گئے ہیں اور پھر آپ دیکھ سکتے ہیں
کہ اگر میں آٹھ فیکٹوریل رکھتا ہوں
تو پھر مجھے اس آہ سے ضرب کرنا ہو گا۔ آٹھ
فیکٹوریل 10 فیکٹوریل n 9 تو میں چالیس ہزار جمع کسی چیز میں داخل ہو جاؤں گا تاکہ 4 سے 10 کی طاقت 3 قسم کی چیز ہو اور پھر اگر آپ
ah کہتے ہیں
تاہم یہ فیکٹوریل نوٹیشن ہے ان میں سے ایک آپ موجودہ ریاضی کی اصطلاحات کے اہم حصوں اور ہر ah تو تعداد بہت تیزی سے بڑھ رہی ہے
پہلو سے کہہ سکتے ہیں کہ آیا آپ امکانی تھیوری کر رہے ہیں یا
کر رہے ہیں یا آپ وہاں ہر جگہ کیلکولس کر رہے ہیں جہاں یہ فیکٹوریل اشارے بڑے پیمانے پر استعمال ہوتا ہے ah combinatorics تو آپ
کہا جاتا ہے permutation اب اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم اگلی اصطلاح پر آتے ہیں جسے
کہا جاتا ak permutation کے الگ الگ عناصر کا ترتیب شدہ ترتیب الگ الگ عناصر کو k کے سیٹ سے n کیا ہے permutation تو
کبھی کبھی اسے اس طرح بھی لکھا جاتا ہے npk معذرت npr کی کل تعداد کو نوٹیشن سے ظاہر کیا جاتا ہے k permutations ہے تمام
npk
تو مختلف کتابوں میں آپ کو مختلف اشارے نظر آئیں گے میں آہ یہ نوٹیشن استعمال کروں گا اب آئیے دیکھتے ہیں کیا اس کی قدر ہوگی یعنی اگر
الگ الگ عناصر پر مشتمل ایک سیٹ ہے n ہمارے پاس
کے الگ الگ عناصر کے کتنے ترتیب شدہ انتظامات لیے جا سکتے ہیں k تو وہاں سے
تین کے برابر ہے۔ n تو براہ کرم نوٹ کریں کہ یہاں میں ترتیب شدہ انتظامات کے بارے میں بات کر رہا ہوں فرض کریں کہ میں کہتا ہوں کہ
ہے اور میں یہاں دو a کہتا ہوں فرض کریں کہ میں یہاں تین عناصر پر غور کر رہا ہوں فرض کریں کہ یہ سیٹ abc تو فرض کریں کہ میں
کا انتخاب کر سکتا ہوں لیکن اگر میں آرڈر bc کا انتخاب کر سکتا ہوں aci کا انتخاب کر سکتا ہوں abi کہنے کا انتخاب کرنا چاہتا ہوں۔ میں
شدہ ترتیب کو دیکھ رہا ہوں
کو بھی شمار کروں گا لہذا اس طرح کے مجموعی انتظامات ایسے چھ معاملات بنتے ہیں cb تو میں باکا اور
آرڈر شدہ چیزوں کا انتخاب کر رہا ہوں k سے n تو عام طور پر اگر میں
کا اندازہ کرنے کے لیے ہم اس طرح آگے بڑھ سکتے ہیں npk دیا ہے آئیے ہم اس چیز کا حساب لگاتے ہیں npk تو کتنے لہذا میں نے نوٹیشن
kth مائنس 1 طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح n طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے دوسرے عنصر کو n پہلے عنصر کو
پلس ایک گلدان میں منتخب کیا جائے k مائنس n عنصر کر سکتے ہیں
تو اب آپ عام ضرب کے اصول کو لاگو کریں
جمع ایک تک ہے تاکہ k مائنس n مائنس ٹو اور اسی طرح n مائنس ون میں n میں n تو عام ضرب کے اصول سے طریقوں کی کل تعداد
npk ہے
مائنس ون لکھ سکتے ہیں n میں n کو npk کے لیے فارمولہ تیار کیا ہے ٹھیک ہے آہ ہم اسے دیکھ سکتے ہیں تاکہ ہم اصل میں npk تو ہم نے
مائنس ایک کو تین سے k مائنس skn سے سمجھتا ہوں n minu پلس ون تک لکھ سکتے ہیں اور میں ضرب کو k مائنس n اور اسی طرح
مائنس ایک میں اور اسی طرح تین دو ایک تک k مائنس n ہے k مائنس n ایک تک اور پھر اسی نمبر سے تقسیم کریں جو
ہے ایک npk فیکٹوریل ہے لہذا یہ k مائنس n فیکٹوریل بن جاتا ہے۔ اور ڈینومینیٹر n تو یہ نمبر کچھ نہیں ہے لیکن اگر آپ دیکھیں کہ عدد
n ah فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے تاکہ یہ اچھی طرح سے بیان کیا گیا ہو کہ آپ کے پاس k مائنس n فیکٹوریل کو n متبادل اظہار ہے
کا انتخاب کرتے ہیں n کو بھی شامل کرنے کا مطلب ہے کہ اگر آپ تمام n سے کم یا اس کے برابر ایک ہونا چاہئے یہاں اصل میں
مختلف n فیکٹریل ہو جائے گی لہذا میں صرف اس کی ایک بار پھر وضاحت کرتا ہوں تاکہ اگر ہم n تو اس طرح کی کتنی چیزیں ہوں گی یہ
عناصر کے تمام ممکنہ انتظامات پر غور کریں
فیکٹوریل n فیکٹریل ہے تقسیم صفر فیکٹوریل جو n فیکٹوریل جو n مائنس n فیکٹوریل تقسیم n کے برابر جو کہ npn تو یہ ہو جائے گا
ہے کیونکہ صفر فیکٹوریل میں ایک ہونے کو لے رہا ہوں
ہو گی اس کا مطلب ہے کہ 2 یا 2 abba پھر طریقوں کی تعداد b اور lements a تو مثال کے طور پر اگر میں دو ای پر غور کروں
پر غور کرتا ہوں abc فیکٹوریل اگر میں 3
بن جائے گا اس لیے کل نمبر چھ ہو جائے گا جو کہ تین فیکٹوریل کے سوا کچھ نہیں ہے کیونکہ تین میں cbc اور abcacbbcabaccab تو یہ
اگر ہم تکرار کی اجازت دیتے ہیں ah دو میں ایک

ہے k ah کی طاقت n لی گئی ایک وقت میں جہاں دہرانے کی اجازت ہے k مختلف اشیاء کی ترتیب کی تعداد n تو جواب بدل جائے گا لہذا
پر غور کر سکتا ہوں۔ کیونکہ دہرانے کی اجازت ہے n کو دوسری جگہ کسی بھی n کیونکہ پہلی جگہ میں
بن جاتی ہے اگر ہم یہاں غور کریں k کی طاقت n کے اوقات میں اس لیے یہ n تو
آئٹمز کو الگ سمجھا ہے لیکن اس بات کا امکان ہے کہ کچھ آئٹمز الگ الگ نہ ہوں n تو میں نے ان تمام
امتیازی ترتیب کی تعداد میں ترمیم کی جا سکتی ہے مثال کے طور پر ah اشیاء کے n مختلف اقسام کی k تو اس صورت میں اس فارمولے کو
درحقیقت ایک ہی نوعیت کا ہو ld ایک اشیاء اتحادی ہیں بنیادی طور پر وہ ملتے جلتے ہیں n جہاں
جمع n 2 جمع n1 ایک جیسے ہیں اور آپ کے پاس nk ایک جیسے ہیں اور اسی طرح n2 پسند کریں i تو مجھے ایک جیسا نہیں لکھنے دیں
کے برابر ہے nk n
ah کے فیکٹوریل n دو فیکٹوریل اور اسی طرح n ایک فیکٹوریل سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ n فیکٹوریل کو n تو امتیازی ترتیب کی تعداد
الگ الگ عناصر کے تمام ممکنہ انتظامات ہیں n مجھے اس استدلال کی وضاحت کرنے دو میں سمجھتا ہوں کہ اگر ہمارے پاس
مائنس دو ہیں اب الگ اگر ہم کسی ایسی پوزیشن پر n میں سے دو اشیاء ایک جیسے ہیں اور باقی n فیکٹریل ہے اب فرض کریں کہ اس n تو یہ
غور کر رہے ہیں جہاں یہ دونوں چیزیں ایک جیسی نظر آتی ہیں
تو وہ جس ترتیب سے بھی نظر آئیں ان میں فرق نہیں ہو گا اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر میں ان کو دو بار ن فیکٹوریل میں گن رہا ہوں
تو مجھے دو سے تقسیم کرنا چاہیے
فیکٹوریل بنیں اگر میں کہوں کہ تین آئٹمز ایک جیسے ہیں n تو جواب آئے گا۔ دو فیکٹوریل یا دو یکساں طور پر
تو وہ تین آئٹمز جہاں کہیں بھی نظر آئیں جس ترتیب میں بھی ہوں اس ترتیب سے کوئی فرق نہیں پڑے گا کیونکہ وہ ملتے جلتے ہیں یا ایک جیسے
ہیں اب ہم نے ان کو تین فیکٹوریل اوقات شمار کیا ہے جو کہ ایک سے دو میں تین ہے
فیکٹوریل کو تین فیکٹوریل سے تقسیم کیا جائے n تو نمبر بن جائے گا
تو اب اگر ہم اس دلیل کو بڑھاتے ہیں
ایک چیزیں ایک ہیں n تو اگر
دو قسم کی چیزیں یکساں ہیں n سے تقسیم کرنا چاہیے۔ ایک فیکٹوریل پھر دوسری n تو ہمیں
چیزیں ایک جیسی ہوں nk دو فیکٹوریل سے تقسیم کرنا چاہئے اور اسی طرح آخر میں جب n تو ہمیں
فیکٹوریل چیزوں کو بھی تقسیم کرنا ہوگا کیونکہ ترتیب شدہ ترتیبوں کی تعداد غیر ترتیب شدہ ترتیب کے برابر ہے۔ کیونکہ یہاں حکم دینے nk تو ان
یا ترتیب دینے سے کوئی فرق نہیں پڑتا کیونکہ تمام اشیاء ایک جیسی ہیں مثال کے طور پر میں صرف ایک لائیو چیز کے ذریعے دکھاتا ہوں
تو یہ دونوں قلم وہاں موجود ہیں تاکہ آپ دیکھ سکیں کہ وہ ایک جیسے ہیں
تو کیا میں اسے یہاں رکھتا ہوں اور یہ یہاں یا میں اسے یہاں رکھتا ہوں اور اسے یہاں رکھتا ہوں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا لیکن اگر میں اس
نیلے اور اس کالے کو سمجھتا ہوں
اور اگر میں ترتیب بدلتا ہوں ight تو اگر آپ دیکھیں کہ کیا میں اسے پہلے رکھتا ہوں اور اسے یہاں رکھتا ہوں جو بائیں اور آر ہے
تو یہ دو مختلف انتظامات ہیں
تو اب اگر آپ اب تین پر غور کریں اگر میرے پاس تین الگ چیزیں ہیں
تو مجھے صرف یہ تین الگ چیزیں لینے دیں
تو میرے پاس ایک دو تین ہو سکتے ہیں
تو کیا میں اسے یہاں رکھ سکتا ہوں یہ ایک اور انتظام ہے جسے میں یہاں رکھ سکتا ہوں یہ ایک اور انتظام ہے اور یہ میں یہاں رکھ سکتا ہوں یہ
ایک اور انتظام ہے پھر میں اسے یہاں رکھ سکتا ہوں یہ ایک اور انتظام ہے اور یہ میں یہاں رکھ سکتا ہوں یہ ایک اور انتظام ہے
تو کل چھ انتظامات ہیں لیکن اگر ان میں سے دو ایک جیسے ہیں
تو اب اگر میں اسے لوں
تو آئیے دیکھتے ہیں کہ کتنے انتظامات ہوں گے یہ یہاں ہے یا یہ یہاں ہے
تو کل تین انتظامات ہیں اب تین الگ الگ انتظامات ہیں کیوں کہ یہ دونوں آپ جس ترتیب میں بھی رکھیں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے
تو اس کا مطلب ہے کہ تین فیکٹریل کو دو سے تقسیم کیا گیا ہے کہ چھ کو دو سے تقسیم کیا گیا ہے جو آپ کو تین کا جواب دیتا ہے لہذا آپ کے پاس
ایک nk یکساں ہیں اور n2 ایک جیسے ہیں n1 الگ الگ آئٹمز ہیں جن میں سے n یہ عام فارمولا ہے اس کا مطلب ہے کہ اگر میرے پاس
جیسے ہیں
فیکٹوریل جو ڈینومینیٹر میں آ رہا nk دو فیکٹوریل اور n ایک فیکٹوریل سے تقسیم کیا جاتا ہے n فیکٹوریل کو n تو امتیازی ترتیبوں کی کل تعداد
ہے
a's three b's مجھے امید ہے کہ میں نے وضاحت بالکل واضح کر دی ہے آئیے ہم یہاں کچھ مثالوں کو دیکھتے ہیں کہ دو ah تو
کا استعمال کرتے ہوئے کتنے مختلف 10 حروف کوڈ بنائے جا سکتے ہیں میرے پاس کل دس حروف 's's's and three d''s ah
ہیں۔ دو سی اور تین ڈی a's three b's دستیاب ہیں جو کہ دو
میں سے دو ہیں لہذا میں جس ترتیب میں بھی رکھوں گا اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا a تو کل دس نمبر ہیں جیسا کہ آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں
ہیں جس ترتیب میں بھی رکھوں گا اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ تقریباً دو سی ایس اور اسی طرح تقریباً تین ڈی ایس اس لیے اس b وہاں تین
فارمولے کے ذریعے ترتیب کی کل تعداد الگ الگ کوڈز ہوں گے جو کہ 10 حرف ہیں تمام 10 یہاں استعمال کیے گئے ہیں جو کہ 10 فیکٹوریل کو 2
سے تقسیم کرنے کے برابر ہے۔ فیکٹوریل 3 فیکٹوریل ٹو فیکٹوریل تھری فیکٹوریل اس لیے کچھ آسان بنانے کے بعد اس نمبر کا اندازہ لگایا جا سکتا
ہے کہ یہ پچیس ہزار دو سو کوڈز ہیں جو ممکن ہیں آہ میں یہاں ایک اور مسئلہ لیتا ہوں کہ لفظ قوم کے تمام حروف کو استعمال کرتے ہوئے کتنے
الفاظ بنائے جا سکتے ہیں
تو ٹھیک ہے ہم اسے دیکھتے ہیں اگر مجھے تمام چھ حروف استعمال کرنے ہیں
جو واقع ہو رہا ہے t اور aion تو آپ دیکھیں کہ یہاں کتنے الگ الگ ہیں
ایک بار دہرایا جاتا ہے n تو 5 الگ الگ حروف ہیں جن میں
دو بار آتا ہے اس لیے فارمولے کے حساب سے ان چھ حروف کی ترتیب کی کل تعداد چھ فیکٹوریل کو n تو یہاں ہمارے پاس چھ حروف ہیں جہاں
دو فیکٹوریل سے تقسیم کر کے تین سو ساٹھ ہ کے برابر ہو جائے گی اسی طرح کا مسئلہ میں دیکھتا ہوں کہ لفظ احتمال کے کتنے الگ الگ 11
حروف کی ترتیب ہیں؟ بنایا جا سکتا ہے لہذا آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں کہ ہمارے پاس گیارہ حروف ہیں لہذا حروف کی کل تعداد اس میں سے گیارہ
بھی دو بار آتا ہے i یہ i دو ہوتا ہے آئس اور یہ بھی b ہے اگر آپ دیکھیں کہ
تو اس فارمولے سے ترتیب کی کل تعداد یہ ہو جائے گی گیارہ فیکٹوریل کو دو فیکٹوریل سے تقسیم کر کے دو فیکٹوریل آہ اس نمبر کا اندازہ لگایا جا
سکتا ہے یہ 99 لاکھ 79 ہزار دو سو ہ ہے جیسا کہ آپ یہاں دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ گیارہ فیکٹوریل ایک بہت بڑا عدد ہے

تو یہ اس کا چار گنا ہے جسے ہم نے چار سے تقسیم کیا
تو ہمیں مل رہا ہے
تو یہ اصل میں دسیوں ملین میں آ رہا ہے دراصل آہ اس عدد فیکٹوریل کی نوعیت یہ ہے کہ یہ بڑھتا ہے آہ بہت تیزی سے اب اس میں ہی اگر ہم مشاہدہ کریں کہ احتمال میں کچھ سر اور کچھ حروف موجود ہیں
تو فرض کریں کہ ہم اس ترتیب کو بھی دیکھنا چاہتے ہیں
تو میں یہاں صرف ایک مسئلہ پیش کرتا ہوں کہ ان میں سے کتنی ترتیبوں کو کہتے ہیں کہ حرف ظاہر ہوتے ہیں۔ ایک ساتھ
کو دو بار دہرایا جاتا ہے ٹھیک ہے b تو آئیے اس کو دیکھتے ہیں یہاں ہمارے پاس سات حرف ہیں جن میں
تو اب اگر ہم تمام حرفوں کو ایک ساتھ سمجھتے ہیں
وہ کبھی نہیں ہوتے ہیں وہ ایک ساتھ ظاہر ہوتے ہیں whe تو اس کا مطلب ہے
تو اصل میں یہاں بنیادی طور پر آٹھ آئٹمز ہیں جو کہ سات کنسوننٹس ہیں اور تمام سر ایک ساتھ ہیں لہذا ہم اسے ایک آئٹم کے طور پر مان سکتے ہیں کیونکہ چاروں سروں کو جہاں میں دہرایا جاتا ہے ایک ساتھ ظاہر ہونا پڑتا ہے ہمارے پاس کل آٹھ آئٹمز ہیں۔
اب یہاں ایک کیچ ہے یہ حرف اگرچہ ایک ساتھ ah کو دہرایا گیا ہے b تو ترتیب کی تعداد 8 فیکٹوریل کو 2 فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے کیونکہ ہو سکتے ہیں آپس میں اجازت vowels ممکن ہیں جب کہ ah لیے گئے ہیں لیکن وہ آپس میں بدل سکتے ہیں لہٰذا اس طرح کے کتنے انتظامات دی گئی اس طرح کے انتظامات کو 4 فیکٹوریل سے 2 فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے کیونکہ مجھے یہاں دہرایا گیا ہے لہذا یہ آہ بارہ کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا اب حتمی نمبر لفظ احتمال کے حروف سے الفاظ کی کل تعداد کے برابر ہوگا جہاں حرف ایک ساتھ ہوتے ہیں آٹھ فیکٹوریل بن جائے گا جس کو دو فیکٹوریل سے بارہ میں تقسیم کیا جائے گا
تو یقیناً آپ اس کا اندازہ لگا سکتے ہیں کہ یہ ہے چوبیس ھ دو لاکھ اکتالیس ہزار نو سو بیس ھ کے برابر ہم نے کیا کیا ہم نے ان تمام الفاظ کا حساب لگایا ہے جو لفظ احتمال سے بنتے ہیں ہم نے ان ترتیبوں کا بھی حساب لگایا ہے جہاں حرف اکٹھے ظاہر ہوتے ہیں لہذا ایک اضافی مسئلہ ہے جو آپ کر سکتے ہیں یہاں سے حل کریں فرض کریں کہ ہم کہتے ہیں کہ حرف ایک ساتھ ظاہر نہیں ہوتے ہیں
تو ان میں سے کتنے میں ایک ساتھ ظاہر نہیں ہوتے ہیں
تو یہ ترتیبوں کی کل تعداد سے ہوگا منفی ترتیب کی تعداد جس میں سر ایک ساتھ ہیں
تو آپ سوال کا جواب لیں۔ نمبر تین کو سوال نمبر چار کا جواب مائنس کریں
تو وہ نمبر بن جائے گا ننانوے لاکھ ستر اناسی ہزار دو سو مائنس دو لاکھ اکتالیس ہزار نو سو بیس یعنی ستاون لاکھ سینتیس ہزار دو سو اسی
تو میں ایک اور مسئلہ حل کرتا ہوں۔ مماثل نوعیت کے لفظ کے حروف
تولیہ کو کتنے طریقوں سے ترتیب دیا جا سکتا ہے تاکہ تمام سر ایک ساتھ ہو جائیں وہاں اور تمام حروف ایک ساتھ ہوتے ہیں
ہیں e اور o ہیں اسی طرح دو حرف l اور tw تو آئیے اس آہ کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہاں کتنے حرف ہیں تین حرف ہیں جو کہ
تو وہ بھی الگ الگ ہیں لہذا بنیادی طور پر اگر میں کہہ رہا ہوں کنسوننٹس ایک ساتھ ظاہر ہوتے ہیں پھر اسے ایک ہستی سمجھا جاتا ہے اور دو حرف ایک ساتھ ہوتے ہیں پھر اسے بھی ایک ہستی سمجھا جاتا ہے لہذا بنیادی طور پر ان کی ترتیب یا
تو سب سے پہلے تمام تلفظ ہو سکتے ہیں پھر تمام حرف اس کے الٹ ہیں لہذا بنیادی طور پر دو امکانات ہیں لیکن اب آپ دیکھیں کہ اس حرف کو خود ترتیب دیا جا سکتا ہے اور یہ سب الگ الگ ہیں
تو ان میں سے تین ہیں
تو یہ تین فیکٹوریل ہو جاتا ہے اسی طرح تمام سروں کو بھی آپس میں اجازت دی جا سکتی ہے
تو یہ دو فیکٹوریل ہے
تو آپ کے پاس طریقوں کی تعداد ہو گی۔ 2 میں 3 فیکٹوریل میں 2 فیکٹوریل ہوں گے
تو یہ 24 کے برابر ہے لہذا
تمام کنوننٹس ظاہر ہوتے ہیں ایک ساتھ اور تمام حرف ایک ساتھ ظاہر ہوتے ہیں لہذا میں یہاں ترتیب کے i تولیہ کے کل 24 حروف ہیں جہاں عنوان میں صرف دہراؤں گا ہم اصل میں آئٹمز کے ترتیب شدہ انتظامات کو دیکھ رہے ہیں جس کا مطلب ہے کہ اگر میں آہ پوزیشنوں پر غور کر رہا ہوں
تو ان کو طے کرنا ہوگا اگر میں ان کی پوزیشنوں کو تبدیل کرتا ہوں۔ آئٹمز پھر اب اسے ایک اور ترتیب سمجھا جاتا ہے اگر ہم اس چیز کو خارج کر دیں جس کا مطلب ہے کہ اگر میں اس ترتیب کو اور اس ترتیب کو ایک جیسا سمجھتا ہوں یعنی میں غیر ترتیب شدہ انتظام کو سمجھتا ہوں
الگ الگ آئٹمز کے سیٹ n کی غیر ترتیب شدہ ترتیب۔ k distinct تو اسے مجموعہ کہتے ہیں اس لیے میں اب ایک نئی تعریف پیش کرتا ہوں سے ظاہر کیا جاتا ہے یا کوئی اور نوٹیشن ہے جو عام طور nck کے مجموعوں کی کل تعداد کو k امتزاج کہا جاتا ہے تمام ak سے آئٹمز کو کے طور پر بھی اس طرح لکھا جاتا ہے لہذا مختلف کتابوں میں آپ کے مختلف اشارے ہوں nck کبھی کبھی اسے nck پر استعمال کیا جاتا ہے سے کم یا برابر ہے۔ k less t اس طرح یا اس طرح دوبارہ استعمال کریں گے آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں کہ ایک nck گے . عام طور پر کے برابر ہے ہم اس طرح nck جو کہ x کے برابر اب آئیے ہم اس کی قدر کا پتہ لگاتے ہیں تاکہ اندازہ کرنے کے لیے کہ n ah یا han آگے بڑھتے ہیں، لہذا اگر ہم ترتیب شدہ انتظامات پر غور کریں
فیکٹوریل ایسی چیزیں ہیں لیکن اب اگر ہم کہیں کہ ترتیب k چیزوں کے لیے k ہے اس npk ah کے آرڈر شدہ ترتیبوں کی تعداد npk تو دینا اہم نہیں ہے
کہوں ba اور ab so ab تو یہ تمام چیزیں ایک جیسی سمجھی جائیں گی، مثال کے طور پر اگر میں
تو وہ الگ الگ ہیں اگر میں ترتیب شدہ ترتیب پر غور کر رہا ہوں لیکن اگر میں غیر ترتیب شدہ سمجھتا ہوں
اور abcbca ایک ہی ہیں اس کا مطلب ہے کہ آپ کو نمبر کو دو سے دو سے تقسیم کرنا ہوگا اسی طرح اگر میں تین چیزوں کو ba اور ab تو اسی طرح سمجھتا ہوں
تو میرے پاس تین فیکٹریل چیزیں ہیں اب میں ان سب پر غور کروں گا۔ ایک کے طور پر
تو مجھے نمبر کو تین فیکٹوریل سے تقسیم کرنا ہوگا لہذا اگر میں اس کو دیکھوں
k کی تقسیم pk ہونا چاہئے n اشیاء میں سے ایک جیسا سمجھا جائے گا لہذا آپ کے پاس k فیکٹوریل پرمیوٹیشنز ہیں اب ان سب کو ان k تو ہے nck فیکٹوریل کے برابر ہے جو کہ
فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے k کو npk کچھ نہیں ہے مگر nck تو یہ وہ فارمولہ ہے جو اب آپ کو مل گیا ہے
حقیقت میں میں 0 پر بھی k مائنس n فیکٹوریل سے تقسیم کیا گیا ہے k فیکٹوریل کو n کچھ نہیں ہے مگر nck تو اس کا مطلب یہ ہے کہ غور کر سکتا ہوں کیونکہ 0 فیکٹریل ہم نے ایک تاریخی نوٹس کی تعریف کی ہے کہ تاریخی طور پر ام اس قسم کا فارمولا ہندوستانی ریاضی دان میں بہت سارے nck اور npk کے کام میں ظاہر ہوتا ہے ٹائم لائن 114 سے 1185 کے قریب ہے اصل میں یہ اصطلاحات ii بھاسکراچار کے k مائنس nck ncn تعلقات ہیں اور بہت ساری خصوصیات ہیں لہذا میں یہاں ان میں سے کچھ کا احاطہ کروں گا لہذا مثال کے طور پر

فیکٹوریل تقسیم شدہ n برابر ہے k مائنس nc n برابر ہے اس کا ثبوت بہت آسان ہے کیونکہ یہ صرف اس پر مبنی ہے جو آپ لکھ رہے ہیں ۔
n مائنس k فیکٹوریل سے 1 پھر مگر ہے نہیں بھی کچھ جو nck ah
تو دوس
تو اصل میں ہم نے گنتی کے چار بڑے اصولوں پر تبادلہ خیال کیا ہے ایک آہ جمع کرنے کا بنیادی اصول دوسرا ضرب کا اصول تیسرا ترتیب شدہ کے ذریعے ظاہر کر رہے ہیں اور چوتھا ایک غیر ترتیب شدہ انتظامات کی تعداد ہے جسے ہم اگلی npk ترتیبوں کی کل تعداد ہے جسے ہم ترتیب کے ذریعے بیان کر رہے ہیں، میں اس کی خصوصیات اور اس پر مبنی مختلف مسائل کو بیان کرتا رہوں گا، میں آپ کو nck ah کلاسوں میں اگلے چند لیکچرز میں حل کروں گا۔