ویں جڑ کے مسائل پر خاص طور پر اتحاد کے مکعبn بیلو طلباء کو پیچیدہ نمبروں پر لیکچرز میں خوش آمدید آخری لیکچر میں ہم نے اتحاد کے
عمودی تکون کے ساتھ ایک t جڑوں کے مسائل پر بات کی، مجھے وہ آخری نتیجہ یاد کرنے دیں جس پر ہم نے کلاس میں بحث کی تھی کہ اگر
جو گھڑی کی مخالف سمت پر مبنی ہے abc مساوی مثلث ہے۔
صفر کے برابر ہے جہاں اومیگا اتحاد کا مکعب جڑ ہے c تو یہ مندرجہ ذیل مساوات کو پورا کرتا ہے جو کہ ایک جمع اومیگا بی جمع اومیگا مربع
اور اگر یہ مساوی مثلث ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب وہ اس مساوات کو پورا کرتا ہے۔ اس کے ساتھ ساتھ یہ دوسری مساوات کو بھی
عمودی کے t ہے آئیے ہم ایک سادہ مسئلہ کرتے ہیں ca جمع bc جمع ab مربع برابر c مربع جمع b پورا کرتا ہے جو ایک مربع جمع
کے نام سے پکاریں۔ خاصیت کہ ان کا ماڈیولس برابر ہے اور ان کا مجموعہ 0 ہے z1 z2 z3 ساتھ مثلث ہے آئیے اسے پیچیدہ اعداد میں
ایک مساوی مثلث ہے t تو ہمیں یہ دکھانا ہوگا کہ
تو ہمیں جو دیا گیا ہے وہ برابر کی شدت کے ساتھ تین عمودی ہیں اور ان کا مجموعہ صفر ہے جو کہ اتحاد کی خاصیت کے مکعب جڑ کی ترتیب
کے تقریباً برابر ہے لیکن جو ہم جانتے ہیں کہ اتحاد کا مکعب جڑ ہے ان کا ماڈیولس اتنا مساوی ہے جو ایک ہے لیکن یہاں یہ نہیں کہا گیا کہ یہ کہنا
،ہے کہ یہ صرف دیا گیا ہے۔ ماڈیولس برابر ہیں جو ہم نہیں جانتے کہ آیا یہ یونٹ کے دائرے پر واقع ہے یا یونٹ کے دائرے سے زیادہ
تو آئیے ہم تصور کرنے کی کوشش کریں کہ ہمیں کیا دیا گیا ہے کیونکہ ان کے ماڈیولس برابر ہیں اس لیے وہ ایک دائرے پر پڑے ہیں جس کے
کے طور پر r رداس کو ہم کہہ سکتے ہیں۔ یہ
تین پر تقسیم ہوتے ہیں جو ہمیں دیا جاتا ہے ان کا مجموعہ صفر ہے اس مساوات سے جو فیکٹر دیا گیا ہے ان تینوں z دو z ایک z تو وہ دائرے
پیچیدہ نمبروں کا مجموعہ صفر ہے اگر ہم کنجگیشن کو لیں
دو بار جمع z بار جمع z 1 تو یہ ہے اسی مساوات کو پورا کرنے جا رہا ہے لہذا کنجگیشن کو لے لو یہ 0 ہے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ
تین بار ہے یہ صفر کے برابر ہے اب اس حقیقت کو استعمال کریں کہ ان کے ماڈیولس برابر ہیں لہذا ہم تقسیم کر سکتے ہیں موڈ زیڈ 1 اسکوا z
ایک مربع سے تقسیم کرتے ہیں mod z سے تقسیم کریں۔ اگر ہم
تین مربع کے برابر ہے mod z دو مربع کے ساتھ ساتھ mod z تو یہ قدر بہرحال
لکھا جا سکتا ہے۔ زیڈ ون بار پلس زیڈ ٹو بار کو z one مربع سے تقسیم کیا جا سکتا ہے جیسے mod z one کو z one bar تو ہمیں یہاں
موڈ زیڈ ایک مربع میں تقسیم کیا گیا جو کہ موڈ زیڈ ٹو اسکوائر جیسا ہی ہے لہذا اس کو زیڈ ٹو میں زیڈ ٹو بار پلس زیڈ 3 بار کو زیڈ 3 سے زیڈ 3 میں
دو جمع ایک بذریعہ z ایک جمع ایک ہے z تقسیم کیا جاسکتا ہے یہ برابر ہے 0. اس لیے ہم مندرجہ ذیل مساوات پر پہنچتے ہیں جو ایک بذریعہ
ہے اس فیکٹر کے لیے مشترکہ ضرب کے طور پر ہم z1 z2 z3 تین یہ صفر کے برابر ہے اور ہم فیکٹر سے ضرب کر سکتے ہیں جو کہ z
ملتا ہے z two z three مندرجہ ذیل مساوات پر پہنچتے ہیں ہمیں یہاں
ہے ہم درج ذیل مساوات پر پہنچتے ہیں یہ صفر کے z one z two z three تو ہم اس مساوات کو فیکٹر سے ضرب کرتے ہیں جو کہ
کی قیمت 0 ہے z 3 جمع z 2 ایک جمع z برابر ہے آئیے اسے مساوات کے طور پر کہتے ہیں اور پھر سے دی گئی مساوات ہمارے پاس
تین مربع z دو مربع جمع z جو دوبارہ 0 ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ پھیلنے سے ہمیں ایکسپریشن سیٹ 1 مربع جمع e پھر اس کا مربع لیں
یہ 0 کے برابر ہے اور مساوات کے مطابق 1 یہ عنصر 0 ہے z3 z1 جمع z2 z3 دو جمع z ایک z جمع فیکٹر ملتا ہے جو دو گنا
تین مربع صفر ہے آئیے ہم اسے مساوات ایک اور دو سے مساوات دو کہتے ہیں z دو مربع جمع z ایک مربع جمع z تو ہم حاصل کرتے ہیں کہ
اب ہم اس تجویز کو z3 z1 جمع z2 z3 جمع z2 کے برابر z1 تین مربع یہ ہے z دو مربع جمع z ایک مربع جمع z ہم دیکھتے ہیں کہ
کے ساتھ مثلث ہے abc یاد کرتے ہیں جو ہم نے پہلے ثابت کیا تھا کہ اگر آپ کے پاس عمودی
مربع برابر ab c مربع جمع ہے b تو یہ مساوی مثلث ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ مساوات کو پورا کرتا ہے جو ایک مربع جمع
م t اس نتیجے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ca جمع bc جمع
اس مساوات کو پورا کرتا ہے z one z two z three تواتر مثلث ہے لہذا ہم نے دیے گئے مسئلے کو ثابت کیا ہے کہ اگر
ایک اور مسئلہ جس میں اسی طرح کا مفروضہ ہے وہ یہ ہے کہ ہمیں تین پیچیدہ اعداد d o تو ہم نے ثابت کیا کہ یہ ایک مساوی مثلث ہے ہمیں
تین ایسے دیئے گئے ہیں جن کا ماڈیولس ایک کی قدر کے ساتھ برابر ہے اور ان کا مجموعہ صفر کے برابر نہیں ہے بلکہ ان کا z دو z ایک z
مربع 0 کے برابر ہے پھر ہمیں یہ دکھانا ہوگا کہ کسی بھی عدد z 3 دو مربع جمع z ایک مربع جمع z مربع مجموعہ صفر کے برابر ہے۔ n
کی طاقت ہے z 3 جمع n سے طاقت z جمع n کی طاقت z 1 کے لیے 2 سے بڑا یا اس کے برابر درج ذیل اظہار پر غور کریں جو کہ
اس کی وسعت کا حساب لگائیں جو ہمیشہ یا
ٹھیک ہو گا r 1 r 2 r 3 تو 0
تو آئیے ہم اس نتیجے کو ثابت کرنے کی کوشش کریں
تین مربع الگ الگ ہیں فرض کریں کہ وہ نہیں ہیں۔ واضح کریں کہ کیا ہوتا z دو مربع z ایک مربع z تو پہلا مشاہدہ ہم کریں گے کہ پیچیدہ اعداد
مربع کے برابر ہے z 2 مربع z 1 ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر ہم یہ کہتے ہیں کہ
کا z 3 s wh ایک مربع کا دو گنا جو فوراً بتاتا ہے کہ z مائنس s تین مربع z تو فوری طور پر اس مفروضے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
تھری کا ماڈیولس ایک ٹھیک ہے لہذا ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ z مربع بنیادی طور پر 2 ہے جو ہمارے اس قیاس کے خلاف ہے کہ ose ماڈیولس
وہ الگ ہیں اور وہ یونٹ کے دائرے پر پڑے ہیں جس کا مطلب ہے کہ وہ اس طرح نہیں z one z two z three دیئے گئے کمپلیکس نمبرز
ہیں ایک لکیر پر لیٹیں
کے طور پر عمودی کے ساتھ ایک سہ رخی مثلث رکھ سکتے ہیں اور پچھلا نتیجہ فوری طور پر بتائے گا z1 z2 z3 تو اس کا مطلب ہے کہ ہم
مربع ہے مجھے پچھلے نتیجہ کو یاد کرنے دیں جو ہم نے دکھایا تھا اگر z3 مربع z2 مربع z1 کہ یہ ایک مساوی مثلث ہے جس کے عمودی
طول و عرض برابر ہیں اور ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے
تین ایک مساوی مثلث بناتا ہے اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث z ایک صفر دو z تو ہم نے دکھایا کہ مثلث عمودی کے ساتھ
تھری مربع ایک مساوی مثلث ہے اور نوٹ کریں کہ ایک اور کہتے ہیں ایک نوٹ ہم دیکھتے z ہے۔ دو مربع z ایک مربع z عمودی کے ساتھ t
مربع جس کا ماڈیولس ایک ہے اس کا مطلب ہے کہ وہ ایک اکائی کے دائرے پر پڑے mod z3 دو مربع mod z ایک مربع اور mod z ہیں کہ
ہیں اور متعلقہ عمودی ہمیں ایک مساوی مثلث کو جنم دیتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ پیچیدہ اعداد کو اومیگا کے ذریعے جوڑا جا سکتا ہے یعنی ہم
مربع کے ساتھ اتحاد کا اور ہم دوسرے z 1 ڈگری کو گھما کر ایک چوٹی حاصل کر سکتے ہیں جسے کیوب جڑ سے ضرب دیا جاتا ہے۔ 120
ایک مربع z تین مربع سے ضرب کر کے مزید کہتے ہیں کہ اومیگا اس مقدار کو جو کہ اومیگا اسکوائر z ورٹیکس کو حاصل کر سکتے ہیں جو
ہے
تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اومیگا کو اومیگا پاور فور لکھا جا سکتا ہے جس کا مطلب ہے اسی ایکسپریشن کو اومیگا پاور فور کے طور پر لکھا جا سکتا
ٹو اس عنصر کے مربع جڑ سے دیا گیا ہے جو ہمیں جمع z ایک مربع کے ساتھ ضرب یہاں ہم اسی طرح رکھتے ہیں پھر ہم دیکھتے ہیں کہ z ہے
ایک پاور z ایک اب یاد کریں کہ ہم کیا حساب لگانا چاہتے ہیں ہم z دیتا ہے۔ مائنس اومیگا ٹائمز r تین جمع z ایک اور z یا مائنس اومیگا مربع
n پاور z 3 پلس n سے پاور nz پاور z 1 کا حساب لگائیں ٹوپی ہے t اب ایکسپریشن n تھری پاور z جمع n ٹو پاور z پلس n

کو عام طور پر نکالا جا سکتا ہے n پاور z 1 یہ اس کے برابر ہے ہم دیکھتے ہیں کہ
حاصل کرتے ہیں اب ہمیں اس کی شدت کا حساب n مائنس اومیگا پاور r دوبارہ پلس n مائنس اومیگا اسکوائر پاور psa تو ہم یہاں 1 پلس
کا ماڈیولس ایک ہے z لگانے کی ضرورت ہے کیونکہ
مائنس اومیگا r ایک ہے لہذا ہم صرف مندرجہ ذیل کمپلیکس نمبر کی شدت کا حساب لگاتے ہیں جو کہ 1 جمع n ایک کا ماڈیولس ایک پاور z تو
اس طرح فوری طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تین سے کم یا مساوی ہے لیکن omega power n مائنس ہے r جمع n پاور 2 پاور
ہمارا ارادہ یہ ظاہر کرنا ہے کہ قدر قطعی طور پر یا
تو 0 1 2 3 ٹھیک ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ عدد کے علاوہ کوئی دوسرا حقیقی نمبر نہیں لے گا۔ جو کہ صفر سے تین کے درمیان ہے
اومیگا n تو اس کا آسانی سے ادراک کیا جا سکتا ہے کیونکہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی قدر کے لیے یہ اظہار برابر ہوگا یعنی اومیگا پاور 2
پاور کے برابر ہوگا
ایک ہے n اومیگا پاور wh en تو ہمارا سوال یہ ہے کہ یہ کب برابر ہوگا؟ برابر ہو جائے گا صرف
کو عددی قدر 2 3 کے طور پر لیتا ہوں اور اسی طرح جب یہ 3 ملٹیپل ہو n تو اس کا مطلب ہے کہ اگر میں
بھی آپ کو ملے گی۔ ایک ہی قدر جو ایک ہے ورنہ آپ ہمیشہ n ہے اور ساتھ ہی اومیگا پاور n تو آپ کو یہاں وہی قدر ملے گی جو اومیگا پاور ٹو
یہاں حاصل کرتے ہیں جو ایک مختلف عنصر ہے جو یہاں ہے آپ کو اومیگا مربع مل سکتا ہے اس صورت میں آپ کو یہاں اومیگا آر ایک ملتا ہے
کے متعدد سے مختلف ہو n اسی طرح اگر
تو کوئی برابر عنصر نہیں ہوگا ۔ تین
تو اس مشاہدے کے ساتھ ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں یہاں صرف امکان ملتا ہے لہذا امکانات اومیگا اومیگا اسکوائر ہیں ہمیں مائنس اومیگا اسکوائر کے
ساتھ اومیگا کا مجموعہ یا مائنس اومیگا اسکوائر کی ضرورت ہے لہذا اگر میں دوبارہ یاد کرنے کی کوشش کروں
تو میں صرف اس اظہار میں سے کچھ پر
توجہ مرکوز کر رہا ہوں لہذا یہاں مائنس اومیگا اومیگا مربع اور دیگر امکان مائنس اومیگا مائنس اومیگا مربع لہذا اس امکان کے تحت آپ دیکھ سکتے
ہیں کہ ان کا مجموعہ ہمیشہ ایک عدد عدد ہوگا لہذا اگر میں ہر جگہ ایک کو لے لوں
تو ان کا مجموعہ آسانی سے تصدیق کرسکتا ہے کہ ان کا مجموعہ صرف 0 1 2 ہوگا اور 3. لہذا میں اسے اس تصدیق کے لیے ایک مشق کے
طور پر چھوڑتا ہوں، آئیے ایک اور مسئلہ کرتے ہیں مندرجہ ذیل اظہار کی قدر کو یہاں دوبارہ گنتے ہیں اومیگا اتحاد کا کیوب روٹ ہے لہذا ہمیں
جمع اظہار کی قدر کا حساب لگانا ہے لہذا خصوصیات کو یاد کرنے کی کوشش کریں۔ اومیگا ون کا ایک جمع اومیگا اسکوائر ہے یہ صفر ہے اور
اگر یہ تین کا متعدد ہے پاور تین یا تین کا تین ملٹی ضرب ہے n اومیگا پاور
تین کا ضرب ہے n کے طور پر لکھ سکتے ہیں ایک اگر n تو آپ کو عام طور پر ایک ملتا ہے ہم اسے اومیگا پاور
تو جس کا مطلب ہے بقیہ اگر میں تین بقیہ صفر سے تقسیم کرتا ہوں
آپ تین سے تقسیم کرتے ہیں اگر بقیہ ایک ہے n تو قدر ایک اومیگا ہے اگر
کو تین سے تقسیم کریں گے۔ ٹھیک ہے n تو آپ کو قدر ملے گی اومیگا اومیگا مربع اگر بقیہ دو ہے جب ہم
تو اب یہاں کچھ نمونہ دیکھنے کی کوشش کریں وہ یہ ہے کہ اگر میں ایک مائنس اومیگا اسکوائر کو مائنس اومیگا کے برابر سمجھتا ہوں اور 1 پلس
اومیگا اسکوائر کو دوبارہ مائنس اومیگا سے بدل دیا جاتا ہے
تو ہمیں مائنس 2 اوم ملتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر میں اگلے ایکسپریشن پر غور کروں جو 1 مائنس اومیگا اسکوائر پلس اومیگا پاور 4 ہے جو اومیگا
کے سوا کچھ نہیں ہے
تو جو ایک مائنس اومیگا اسکوائر پلس اومیگا ہے
تو ویلیو ایک پلس اومیگا کو مائنس اومیگا اسکوائر سے بدل دیں
تو ہمیں مائنس ٹو اومیگا اسکوائر ملے گا۔ اگر میں اگلی اگلی ایکسپریشن پر جاتا ہوں جو کہ تین جمع چھ ہے
تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ فوراً ایک ہے
تین کا متعدد ہے اور ہمیں مائنس ملے گا۔ 2 n ہمیں ایکسپریشن ایک ملے گا اگر n جمع اومیگا پاور ٹو n تو عام مشاہدہ ہے ایک مائنس اومیگا پاور
کو تین سے تقسیم کرتے ہیں n موڈ 3 کے برابر ہے اور مائنس دو اومیگا مربع اگر بقیہ اصطلاح دو ہے جب ہم 1 n اومیگا اگر
تو اس مشاہدے کے ساتھ اب مصنوعہ آسان ہو گیا ہے لہذا اب ہم کیا کر سکتے ہیں اس مشاہدے سے آپ کر سکتے ہیں تین اصطلاحات کو لگاتار
جوڑیں جس کا مطلب ہے کہ پہلی تین اصطلاحات پروڈکٹ پر غور کریں
تو پہلی تین ٹرم پروڈکٹ جو ہم حاصل کرتے ہیں جو تیز تر اصطلاح ہے مائنس ٹو اومیگا اور اگلی اصطلاح دو اومیگا مربع اور وہ ہے۔ اگلی
اصطلاح ایک ہے
تو قیمت دو مربع ہے باقی اومیگا کیوب ہے جو کہ ایک ہے اگر میں تین کے دوسرے سیٹ کو دوبارہ لیتا ہوں
تین کا متعدد ہے n تو آپ کو دو مربع مل جائے گا اس مشاہدے سے مصنوعات کی قیمت درج ذیل اظہار کے ذریعہ دی گئی ہے فرض کریں کہ
n تو ہم تین تین اصطلاحات کو ایک دوسرے سے جوڑ سکتے ہیں اور پھر جس مصنوع کو ہم 2 مربع حاصل کرنے جا رہے ہیں اور جس تعداد کو آپ
کو تین جمع ایک کا کثیر کہتے ہیں n تین کا ضرب ہو اور جب n سے 3 سے ضرب دیں گے یہ اس وقت ہوتا ہے جب
تو جب ہم تین تین اصطلاحات کو جوڑتے ہیں
تو ہم ایک ٹرم کے ساتھ چھوڑ دیں گے جو اس اصطلاح سے آئے گا جو ایک مائنس اومیگا پلس اومیگا مربع ہے
تو آپ کو جو اظہار ملتا ہے وہ دو مربع طاقت ہے جو کیا آپ 3 سے تقسیم کرتے ہیں اس کا حصہ لیں اور پھر ایک اور عنصر ہے جسے ہم نے تین
جمع 2 کہا جائے k کو 3 n اصطلاحات میں جمع نہیں کیا جو کہ مائنس ٹو اومیگا ہے اور اگر
سے تین ضرب ہے n ملتا ہے ۔ مائنس ٹو اومیگا اور مائنس 2 اومیگا اسکوائر کے ساتھ اس کا t تو اسی طرح کی دلیل کے ساتھ ہمیں 2 مربع
تو اب اس اظہار کو آسان کرتے ہوئے ہمیں پروڈکٹ فیکٹر کی قدر ملتی ہے اب آئیے ہم ہندسی آبجیکٹ کا مطالعہ کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو
سیدھی لکیر کی طرح ہے اور پھر ہم جائیں گے۔ ایک دائرہ
تو آئیے پہلے ہم اس بات پر بحث کریں کہ پیچیدہ طیارے میں سیدھی لکیر کی مساوات کیا ہے
جمع بیٹا صفر کے برابر ہے جہاں الفا ایک نان زیرو z بار جمع الفا z تو ہم دکھائیں گے کہ پیچیدہ طیارے میں سیدھی لکیر کی مساوات الفا بار
کمپلیکس نمبر ہے اور بیٹا ایک حقیقی نمبر ہونا چاہیے
صفر کے برابر دی ax plus by plus c تو آئیے ہم اسے اخذ کریں تاکہ کارٹیشین کوآرڈینیٹ سسٹم میں سیدھی لکیر کی عمومی مساوات
کسی لکیر کو ظاہر کرنے کے لیے حقیقی نمبر ہوتے ہیں۔ اس شرط کو شامل کرنے کے لیے یا abc جائے جہاں
کا کوئی بھی جوڑا اس مساوات کو پورا کرتا ہے اب اس xy مربع کا غیر صفر ہونا چاہیے b مربع جمع a کا نان صفر ہونا چاہیے b یا a تو
xy کو کارٹیشین جہاز میں ٹریس کریں
کہتے ہیں x کے اس جوڑے کے لیے ہم ایک کمپلیکس نمبر کو جوڑ سکتے ہیں جس کا نام ہے xy لائن اب ght تو ہمیں ایک سٹرائی ملے گی۔

Prutor@IITK

let z برابر x plus iy پھر x کو z جمع z بار 2 کے ذریعے دیا جاتا ہے اور y کو z مائنس z بار 2 کے ذریعے دیا جاتا ہے۔
اب مجھے یاد ہے کہ ہم نے کیا کیا ہے ہم صرف کارٹیشین طیارے میں عنصر کے جوڑے کی فطری ایسوسی ایشن کو کمپلیکس نمبر کے ساتھ کر
رہے ہیں لہذا کارٹیشین جہاز میں عنصر xy جو ہم کمپلیکس نمبر کو جوڑ دیتے ہیں x کے ایک جوڑے کو دیکھتے ہوئے جمع iy ہے
کا جوڑا ایک سیدھی لکیر xy کیا ہے اب اگر عنصر y بار کے لحاظ سے z اور z کیا ہے اور x تو ہم ہیں یہ دیکھنے کے قابل ہے کہ یہ
میں ہوتا ہے
z مائنس z بار z جمع z بار 2 ملتا ہے جمع ہی بار z جمع z تو یہ اس مساوات کو پورا کرتا ہے لہذا اس کا مطلب یہ ہے کہ ہمیں ایک بار
ib بار کے عدد کو یکجا کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک جمع z صفر کے برابر ہے اور صرف یہ کہتے ہیں کہ c جمع i بار 2
ضرب صفر ہے اگر ہم الفا کو اس نمبر کے طور پر سمجھتے ہیں c بذریعہ دو جمع ib بار ایک مائنس z بذریعہ 2 اور
کے طور پر دو سے بدل دیں ib تو ہم مزید آسان کر سکتے ہیں کہ چلو الفا کو مائنس
مربع غیر صفر ہے b کے ساتھ ضرب دیتے ہیں اب صفر کے برابر ہے کیونکہ ایک مربع جمع c جمع z بار کو الفا بار کے ساتھ الفا z تو ہم
دوسرا نوڈ ہے کہیے کہ مشاہدہ c جس کا مطلب یہ ہے کہ موڈ الفا نان زیرو ہے جو کہ الفا کے برابر ہے۔ ایک غیر صفر کمپلیکس نمبر اور جہاں
ہے
ایک حقیقی نمبر ہے c تو اگر میں صرف خلاصہ کروں الفا ایک غیر صفر کمپلیکس نمبر ہے اور
تو ہمیں مندرجہ ذیل مساوات ملتی ہے جو پیچیدہ جہاز میں سیدھی لکیر کو بیان کرتی ہے۔ پوچھیں کہ اس لکیر کی ڈھلوان کیا ہے اور اگر آپ دی گئی
لکیر کی ڈھلوان پر غور کریں جو کہ ax plus by plus c 0 کے برابر ہے
غیر صفر ہے b ہے آپ فرض کریں گے m as minus a by b تو ہمیں ڈھلوان ملے گا کیونکہ یہ
تو ہم کر سکتے ہیں آسانی سے اخذ کریں کہ الفا کے لحاظ سے اس مساوات کی ڈھلوان کیا ہے
کو الفا بار مائنس الفا b تو مساوات کی ڈھلوان ایک کی ہمیں ضرورت ہے چونکہ الفا ہے اس طرح الفا جمع الفا بار سے حاصل کیا جاسکتا ہے اور
گنا الفا پلس الفا بار سے الفا مائنس الفا بار سے تقسیم کیا گیا ہے لہذا اس معیاری i کو m یہ دیکھیں کہ ڈھلوان c سے دیا جاتا ہے اس سے ہم
مساوات سے کوئی بھی آسانی سے سیدھی لکیروں کی خصوصیات حاصل کرسکتا ہے جیسے کہ جب دو سیدھی لکیریں م
توازی ہوں گی اور ساتھ ساتھ کھڑے لکیروں کا مطالعہ کریں یہ سیدھی لکیر کے متعلقہ گتانکوں کا مطالعہ کرکے کیا جا سکتا ہے میں اسے ایک
مشق کے طور پر دیتا ہوں کہ ہمیں دو سیدھی لکیریں دی گئی ہیں یہ دونوں لائنیں م
توازی ہیں اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ اس مساوات کو پورا کرتی ہے اگر آپ کارٹیشین میں یاد کرتے ہیں کوآرڈینیٹ سسٹم آپ دو لائنوں
دو m ایک m کے لئے ایک ڈھلوان ہے لائن دو کے لئے ایک ڈھلوان ہے اگر m2 ایک لائن ایک m کی ان ڈھلوانوں کو لیتے ہیں ہم کہتے ہیں کہ
کے برابر ہے
تو آپ کہیں گے کہ دونوں لائنیں م
توازی ہیں اب ہم ایک جیسے ہو رہے ہیں اس کے لیے الفا 1 بار بذریعہ الفا 1 ہے آپ اسے پیچیدہ طیارے کی طرح میں کسی قسم کی ڈھلوان
سمجھتے ہیں اگر وہ برابر ہیں
تو آپ کو معلوم ہوگا کہ یہ م
توازی ہے اور اسی طرح ہمارے پاس ایک اور ایکسپریس ہے آئن کھڑے ہونے کو بیان کرنے کے لیے اس لیے ہم کہتے ہیں کہ دو لکیریں کھڑی ہیں
اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ ڈھلوان عنصر جسے ہم الفا ایک بار سے الفا ون سے ظاہر کرتے ہیں وہ تناسب اور دوسرا ڈھلوان عنصر ان
کا مجموعہ صفر کے برابر ہونا چاہیے
تو ہم کہتے ہیں کہ یہ دو لائنیں عمودی ہیں
تو آئیے ہم پیچیدہ جہاز میں دائرے کی مساوات کا مطالعہ کرنے کی کوشش کریں
تو ہم نے جو مطالعہ کیا وہ سب سے آسان ہے جو اکائی کا دائرہ ہے جسے پیچیدہ جہاز میں ایک کے برابر موڈز کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے لہذا
رداس طے ہوتا ہے جو ایک ہے آپ ان پوائنٹس کو ٹریس کرتے ہیں جن کا مرکز ہمیں 0 اور رداس 1 ہے اور اگر ہم ایک پیرامیٹرک مساوات کے طور
پر لکھنے کی کوشش کرتے ہیں
کا z اور pi کے ساتھ تھیٹا 0 سے 2 i sin theta ہے اور cos theta کے برابر ملتا ہے جو cis theta برابر z تو ہمیں
کے mod z کے طور پر سمجھتا ہوں جس کی وضاحت r ماڈیولس مختلف ہوتا ہے۔ ایک ہے اگر میں اسی طرح مرکز کو اصلیت اور رداس کو
تک pi تھیٹا جہاں تھیٹا صفر سے cis فکسڈ ہے اور z کے برابر r کے برابر ہے اور یہاں آپ کو پیرامیٹرائزیشن ملتا ہے جیسا کہ r
مختلف ہوتا ہے
کے ساتھ ہے اب کوئی پوچھ سکتا r تو تھی میں اس صورت میں ہم اسے کہتے ہیں کیونکہ یہ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ہے جس کی ابتدا رداس
ہے کہ اس پیچیدہ طیارے میں ایک عام دائرے کی مساوات کو کیسے بیان کیا جائے لہذا اگر ہم اسے اس طرح کہتے ہیں
تو یہاں دو صورتیں جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ ہے خاص طور پر اصل میں مرکز ہے لہذا یہاں کہتے ہیں کہ مرکز مقرر ہے اور جو کچھ
بھی ہم نے بیان کیا ہے وہ دائرے ہیں صرف رداس مختلف ہوتے ہیں اگر میں کسی جنرل کو بیان کرنے کی کوشش کرتا ہوں جس کا مطلب ہے کہ
مجھے صرف مرکز کو کسی اور جگہ منتقل کرنے کی ضرورت ہے ٹھیک ہے لہذا میری دلچسپی بیان کرنے میں کیا ہوگا دائرہ کی مساوات اگر میں
ہوائی جہاز میں کسی بھی نقطہ پر غور کرتا ہوں
کہتے ہیں اس کی مساوات کیا ہے ہم نے ایسا ہی ایک مسئلہ دیکھا ہے r کو radius کہتے ہیں اور z nought تو ہمیں مرکز کے طور پر
کی طرف سے منتقل ہوتا ہوں z جو صرف یہ کہتا ہے کہ ہمیں اس مخصوص کو منتقل کرنے کی ضرورت ہے اصل کی طرف جو کہ اگر میں
کے ساتھ شروع ہوتا ہے جس کا مطلب ہے کہ جو ہو رہا ہے یہ صرف r تو پورے پوائنٹس اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ مرکز رداس کے ساتھ
کی طرف سے دیئے گئے دائرے کو مکمل طور پر منتقل کریں اب ہم نے اسے z کے طور پر صرف ed ایک دائرے کی عمومی مساوات ہے
اصل کی طرف منتقل کر دیا ہے اور جو ہم نے یہاں بیان کیا ہے وہ یہ ہے کہ اگر مرکز کے ساتھ کوئی دائرہ اصل کے طور پر ہے
r کے ذریعہ اب اس دائرے کو z nought تو اسے اس پیرامیٹرائزیشن میں دیا گیا ہے اب میں نے اپنے دائرے کو اصل میں منتقل کر دیا ہے۔
صفر سے دو پائی تک ہے اب آئیے s یہاں تھیٹا r کا ماڈیولس ہے z naught مائنس z تھیٹا کے ذریعہ پیرامیٹرائز کیا گیا ہے جو کہ cis
پھر iy کے برابر کوئی نہیں جمع r کا ماڈیولس لکھ رہا ہوں z مائنس z اس مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں ہم دائرے کی عمومی مساوات میں
مربع ٹھیک r پورا مربع برابر y naught d مائنس y پورا مربع جمع x naught مائنس x مربع کا ماڈیولس z naught مائنس z
ہے
تو اس مساوات سے یہ واضح ہے کہ پیچیدہ نمبر سے ہوائی جہاز کے کارٹیشین جہاز سے تعلق ہم دیکھتے ہیں کہ یہ جو بھی مساوات ہے جو
دائرے کی عمومی مساوات کو بیان کرتی ہے
پروڈکٹ کے طور z naught مائنس z بار کے ساتھ z naught مائنس z تو آئیے اس مساوات کا مزید جائزہ لیں تاکہ ستارے کو دوبارہ
ہے اور z میں z مربع ہے اور جو ہمیں ایکسپریشن کے طور پر ملتا ہے جو کہ r پر لکھا جا سکے لہذا یہ ہر ایک ہے ایک کنجوجیشن جو

مربع برابر 0. r مربع مائنس mod z naught پلس z bar z naught مائنس z naught bar میں z دوسری اصطلاحات ہیں
بار zz naught مائنس zz bar تو اب یہ تھوڑا سا لگتا ہے ناظرین کو عام اس معنی میں کہو کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ فارم کی مساوات
صفر کے برابر ہے لہذا جو درج ذیل شرط کے ساتھ فراہم کردہ دائرے کی نشاندہی کرتا ہے لہذا ہم sum c جمع z bar z naught مائنس
پر cc اسے مساوات کہتے ہیں۔ جیسا کہ کہتے ہیں کہ ایک دائرے کی وضاحت کرتا ہے اگر شرط ہے کہ ہمیں صرف
توجہ مرکوز کرنے کی ضرورت ہے
مربع اب صرف ٹریس بیک کریں ہمیں صرف اس اصطلاح کی ضرورت ہے۔ r مربع مائنس c is mod z nought تو کچھ نہیں ہے لیکن
کے طور پر r کے ساتھ حاصل کرنے کے لیے z مربع کا 0 سے بڑا ہونا ضروری ہے یہی شرط ہے کہ عام دائرے کو مرکز کے ساتھ er
mod مربع کو r مربع سے r کو اس اظہار سے ظاہر کیا گیا ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ اس c رداس کے ساتھ کوئی چیز نہیں ہے لہذا یہاں
سے کم mod z ایک حقیقی نمبر ہے c اس طرح صفر سے بڑا ہونا چاہیے جو کہ c اسکوائر مائنس nought کے ذریعے دیا گیا ہے۔ z
کوئی نہیں مربع ٹھیک ہے لہذا اگر میں صرف ایک خلاصہ کروں
اس شرط کو پورا کرتا ہے c اس شرط کو پورا کرتا ہے ٹھیک ہے لہذا اگر c تو دائرے کی مساوات کو ظاہر کرتا ہے بشرطیکہ
پر مرکز کے ساتھ دائرے کی وضاحت کرتی ہے لیکن ہمیں رداس حاصل کرنے کے لئے جوڑ z naught تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مساوات
ہے آئیے ایک سادہ مسئلے پر بات کریں فرض کریں کہ تمام پیچیدہ نمبروں کا سیٹ کچھ فکسڈ الفا اور بیٹا اور ایک r توڑ کرنے کی ضرورت ہے جو
پھر یہ دائرے کی نمائندگی کرتا ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب الفا اور بیٹا سے k مستقل کے لیے اس مساوات کو پورا کرتا ہے۔
سے کم ہونا چاہیے k فاصلہ ہو جس کا مربع دو
مائنس الفا مربع پلس mod z تو آئیے اس نتیجے کو ثابت کرنے کی کوشش کریں فرض کریں کہ ایک پیچیدہ عدد اس کو پورا کرتا ہے۔ مساوات پھر
مائنس بیٹا مصنوعات کے z بار الفا بار پلس z مائنس الفا ضرب کے ساتھ z کے برابر ہے پھر یہ اسی طرح ہے k مائنس بیٹا پورا مربع یہ z
کے برابر ہے پچھلا نتیجہ یاد کریں ہمیں ایک دائرے کی نمائندگی کرنے کی ضرورت ہے جو ہمیں اس k مائنس بیٹا پوری بار جو کہ اب z ساتھ
مخصوص شکل میں حاصل کرنے کی ضرورت ہے
بار ایک فیکٹر یہاں سے دوسرا عنصر ہے۔ اس اظہار z میں z تو آئیے ہم اس مخصوص شکل میں آسان بنانے کی کوشش کریں تاکہ ہمارے پاس
بار بیٹا z بیٹا بار z بار الفا اور پھر پلس موڈ الفا مربع اور دیگر اصطلاحات z الفا بار مائنس z بار میں اور مائنس z کے دو بار z سے ہم
بار zz کے برابر ہے اور اب ہمارے پاس ہے k پلس موڈ بیٹا مربع یہ
mod بار الفا پلس بیٹا ہے اور آئیے ہم تمام مستقلات کو جمع کریں z کے عدد کو جوڑنے کی کوشش کریں جو کہ الفا بار پلس بیٹا بار مائنس z تو
پچھلے d جو ظاہر ہوتا ہے c یہ صفر کے برابر ہے یہ ہمارا مستقل ہے جیسا کہ k اسکوائر مائنس mod beta اسکوائر پلس alpha
ایک میں اب سینٹر پوائنٹ کچھ بھی نہیں ہے مگر الفا پلس بیٹا 2 سے
اب کہتے ہیں۔ یہ ایک c بار الفا پلس بیٹا بذریعہ 2 اور آئیے اسے مستقل z الفا بار بیٹا بار 2 مائنس z بار مائنس z از z تو ہم دیکھتے ہیں کہ
دائرے کی نمائندگی کرے گا اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ ستاروں کے دائرے کی وضاحت کرتا ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب
کو الفا جمع بیٹا دو کے ذریعے دیا گیا ہے z naught اسکوائر کے ماڈیولس سے کم ہونا چاہیے جہاں c z naught ہمارا مستقل
تو جو کہ الفا جمع بیٹا ہے مربع
تو ہمارے پاس ہے
کیا ہے اور ہم نے تمام k موڈ الفا مربع پلس موڈ بیٹا مربع مائنس ccs الفا پلس بیٹا کے ماڈیولس سے دو سے کم ہے پورا مربع یاد کریں c تو
اظہار کے لئے دو سے تقسیم کیا
اس طرح ہے اور پھر یہ کم ہے ایک سے چار موڈ الفا اسکوائر موڈ بیٹا اسکوائر پلس الفا بیٹا بار پلس الفا بار بیٹا اب اس عدم مساوات کو آسان c تو
کریں
اس سے کم ملے گا جو ہم نے کہا ہے کہ الفا اسکوائر موڈ الفا اسکوائر کے دو بار پلس موڈ بیٹا اسکوائر کا دو بار ہم لاتے ہیں۔ k تو ہمیں مائنس
دائیں ہاتھ اس طرف ہمیں مائنس موڈ الفا اسکوائر مائنس موڈ بیٹا اسکوائر اور پلس الفا بیٹا بار پلس الفا بار بیٹا اب دونوں اطراف کے مائنس سائن سے
ضرب کریں
ہے لہذا یہ نتیجہ اخذ k تو ہمیں الٹا عدم مساوات ملتی ہے جو الفا مائنس بیٹا کا ماڈیولس ہے پورا مربع جو ایک سے کم ہے۔ غلطی یہ دو سے کم دو
اس کو پورا کرتا ہے k اس مساوات کو پورا کرتا ہے اور مستقل الفا بیٹا z کرتا ہے کہ مطلوبہ نتیجہ جب بھی
تو ہمیں ایک دائرہ ملتا ہے اور جب بھی ہمیں اس مخصوص مساوات سے کوئی دائرہ ملتا ہے
اس مساوات کو پورا کرتا ہے جہاں الفا اور z کو مطمئن کرنا چاہئے۔ یہ شرط میں آپ کو کچھ آسان مشقیں دیتا ہوں فرض کریں کہ k تو الفا بیٹا
ایک مثبت حقیقی نمبر ہے جو ایک سے مختلف ہے k بیٹا پیچیدہ نمبر ہیں اور
تو ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ ایک دائرے کی نمائندگی کرتا ہے اور ایک اور مشق فرض کریں ایک پیچیدہ عدد الفا جو دائرے میں ہوتا ہے ذرا غور کریں
اور فرض کریں کہ الفا le ہے اور الفا دائرے پر ہے r پر ہے جس کا رداس x naught y naught کہ یہ ایک دائرہ ہے جس کا مرکز
مربع ہے r بار کے ساتھ الفا بار دوسرے دائرے پر ہے لیکن مرکز ایک ہی ہے لیکن رداس چار
مربع جمع دو کے ذریعے دیا جائے r مربع کا ماڈیولس z naught تو اس شرط کے ساتھ کہ
تو پھر ہم تعین کر سکتے ہیں۔ الفا کی قدر
تو میں جواب لکھوں گا
تو براہ کرم اس کی تصدیق کریں مجھے خلاصہ کرنے دیں کہ ہم نے پہلے ایک کمپلیکس نمبر سسٹم متعارف کرایا جہاں ہم پلس آپریشن کے ساتھ
ساتھ پروڈکٹ آپریشن بھی متعارف کراتے ہیں اس کے بعد ہم متعارف کراتے ہیں کہ کمپلیکس کا ماڈیولس کیا ہے ایک پیچیدہ عدد کا عدد اور
کنجوجیشن اور پھر ہم نے کئی عدم مساوات کا مطالعہ کیا اس کے بعد ہم نے وحدت کی نویں جڑ کا مطالعہ کیا اور اس کی بنیاد پر کئی خصوصیات
اور مسائل کا مطالعہ کیا خاص طور پر ہم وحدت کی مکعب جڑ اور اس کی بنیاد پر کئی ہندسی مسائل کا مطالعہ کرتے ہیں اور اس میں آخری لیکچر
میں ہم متعدد جیومیٹریکل اشیاء پر بحث کرتے ہیں جیسے سیدھی لکیر کے دائرے پیچیدہ جہاز میں اس کی نمائندگی کیسے کی جا سکتی ہے اور یہ
ایک طرح کی مثال دیتا ہے۔ کہ کسی بھی ہندسی مسئلہ کو پیچیدہ طیارے میں محسوس کیا جا سکتا ہے اور پیچیدہ جہاز میں موجود مسائل کو ہندسی
مسئلے میں منتقل کیا جا سکتا ہے اور اس سے کسی مسئلے کو مختلف نقطہ نظر میں حل کرنے کی ایک طرح کی آزادی ملتی ہے، اس کے ساتھ ہم
اپنے لیکچرز کو ختم کرتے ہیں۔ پیچیدہ نمبر آپ کا شکریہ