ہیلو طلباء کو پیچیدہ نمبروں پر سا
توین لیکچر میں خوش آمدید پچھلے لیکچر میں ہم نے اتحاد کی نویں جڑ پر بحث کی تھی اور اس کی بنیاد پر ہم نے کئی شناختیں ثابت کی ہیں آئیے اس
pi by مائنس ایک n sine n pi by دو n sine بحث کو جاری رکھیں ہم نے ایک شناخت کو ثابت کیا ہے جو کہ سائن پائی ہے۔ بذریعہ
مائنس ایک آئیے دیکھتے ہیں کہ یہ کچھ مسائل کو حل کرنے میں کس طرح ہماری مدد کرتا ہے n by two to the power n قدر ہے n
درج ذیل اظہار کی قدر معلوم کریں اظہار سائن دس ڈگری ہے سائین بیس ڈگری پروڈکٹ کے ساتھ سائن اسّی ڈگری تک ہم اس ایکسپریشن کی مصنوع
تلاش کرنا چاہیں گے
تو آئیے اس ایکسپریشن کی قدر معلوم کرنے کے لیے اوپر کی شناخت کو استعمال کرنے کی کوشش کریں جس چیز کا ہم مشاہدہ کرتے ہیں اسے
ہے اور pi by two کے برابر دو پھر ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ تب تک نشان n قدر دی جاتی ہے آئیے ہم کہتے ہیں n کوئی بھی
کی قدر لیتا ہوں n اگر میں
تو دس کہتے ہیں
تو پھر بھی کہتے ہیں کہ پہلی قیمت سائن پائی بائی دس ہوگی جو کہ سائن اٹھارہ ہے اور جب تک یہ سائن نہیں جاتا ہے نائن بائی نائن پائی بائی دس
ٹھیک ہے
تو اگر میں پہلی اصطلاح کے ساتھ شناخت کرنے کی کوشش کرتا ہوں جہاں یہ سائن 10 ڈگری سے شروع ہوتا ہے بہت قدرتی طور پر میں دیکھتا
کو 18 کے طور پر لیتا ہوں n ہوں کہ اگر میں
تو میں فیکٹر کو پہلا فیکٹر حاصل کرنے کے قابل ہوں جو سائن ہے 10 ڈگری
سے شروع کرنے کی کوشش کریں n تو جس کا مطلب ہے کہ آئیے 18 کے برابر
کو 18 کے برابر سمجھتا ہوں n تو میں مذکورہ شناخت سے اظہار کے حصے کے ساتھ موافقت کرنے کے قابل ہوں لہذا اگر میں
ہے اور دوسرا جو سائن بیس ڈگری ہے جو سائن ٹو بائی دو پائی بائی اٹھارہ ہے pi by 18 تو مجھے یہاں کیا ملے گا یہ سائن 10 ڈگری ہے
اور یہ سائن سترہ پائی بائی اٹھارہ تک جاتا ہے جس کی قیمت ہمارے پاس اٹھارہ بائی دو کی طاقت ستر ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم اسے مزید
کو 9 کے برابر لیتا k کی قیمت نو لیتے ہیں یا نویں اصطلاح جو یہاں کہتے ہیں اگر میں k آسان بنا سکتے ہیں۔ پہلا مشاہدہ یہ ہے کہ اگر ہم یہاں
ملتا ہے۔ بذریعہ 2 جو 1 ہے۔ pi لیتا ہے 9 کے برابر ہمیں سائن sine k by 18 i k ہوں جہاں میرا اظہار عام اصطلاح سے اوپر ہے
تو اس کا مطلب ہے کہ نویں اصطلاح میں اس اظہار کی نویں اصطلاح کی قدر ایک ہے لیکن دوسرا مشاہدہ یہ ہے کہ یہ مشاہدہ ایک ہے اور دوسرا
بائی اٹھارہ کے برابر ہے درحقیقت آپ کا ایک عمومی مشاہدہ ہے k کو اٹھارہ سمجھیں جو کہ سائن k pi مشاہدہ ہے اگر ہم نشانی اٹھارہ مائنس
sine pi by 18 کی قدر کے برابر ہے ہمارے پاس sine k by nk تک n یہ 1 سے k pi by n جو کہ سائن این مائنس ہے۔
جو کہ اٹھارہ بائی دو طاقت سترہ ہے ہم مشاہدہ کرتے ہیں۔ نویں اصطلاح ایک ہے اور pi by 18 تک سائن سترہ sine two pi by 18
کے برابر ہے pi by 18 پر دستخط کریں جو سائن pi by 18 باقی دیگر اصطلاحات اس معنی میں دہرائی جانے والی ہیں کہ 17
مربع ملتا ہے جو کہ ہم کہتے ہیں۔ عام اصطلاح کو منسوخ کر سکتے ہیں جو کہ نو pi x 18 تک سائن 8 x 18 تو ہمیں مربع سائن مربع 2
ضرب دو قوت سولہ ہے اب یہ اصطلاح کچھ نہیں بلکہ ہماری مطلوبہ اظہار ہے جو سائن 10 ڈگری سائن 20 ڈگری اور سائن 80 ڈگری ہے اور
بذریعہ n پورا مربع اس طرح ہے اور اب آپ اسے لیں مربع جڑ ہمیں 3 بذریعہ 2 پاور 8 ملتا ہے ایک قدر اب شناخت سے ملتی جلتی ہے جو ہمیں
اصطلاح پر مشتمل ایک شناخت حاصل کر سکتے ہیں جو cos مائنس ایک ملتی ہے اس سے ملتی جلتی ہم n دو پاور cos pi by n cos
مائنس ایک m کے مربع جڑ کے برابر ہے بذریعہ دو قوت m جو pi by n مائنس ون cos m تک n ہے two pi by
تو اب اس شناخت کو کیسے ثابت کیا جائے اگر مجھے یاد آئے کہ جب ہم نے شناخت کو ثابت کیا تھا جس میں علامتی اصطلاح شامل تھی جو ہم نے
ویں جڑ کا استعمال کرتےn مائنس 1 تک اس جمع 1 تک اس کثیر الثانی کو اتحاد کی n طاقت z استعمال کی تھی وہ یہ تھی کہ کثیر الجہتی
کی قدر کو 1 سمجھا ہے پھر ہمیں یہ ایکسپریشن ملا پھر ایک بار جب آپ اس کی ماڈیولس ویلیو لیں z ہوئے فیکٹرائز کیا گیا ہے اور ہم نے
کو مائنس 1 کے برابر کہیں اور اسی طرح کا طریقہ کار کریں z تو ہمیں علامت کا اظہار ملا ہے اب اشارہ استعمال کرتے ہیں اس شناخت میں
سے فاصلے کا حساب لگا رہے ہوں جو کہ 1 پلس الفا پاور کے ماڈیولس کے برابر ہے k تاکہ جب آپ مائنس 1 مائنس الفا پاور
تو اسی طرح کا طریقہ کار کریں جہاں آپ کو کاسٹ ملے گا۔ مدت اس اشارے کا استعمال کرتے ہوئے دائیں طرف آپ یہ دکھا سکتے ہیں کہ یہاں
طاق ہو n ایک یکساں نمبر ہے اگر n پروڈکٹ کی اصطلاح جس میں کوزائن شامل ہے یہ قدر دیتی ہے اور جہاں
تو آپ کو یہ اظہار ملتا ہے اور سائن اور کوزائن شناخ
توں کو ملا کر آپ شناخت حاصل کر سکتے ہیں جس میں شامل ہے ٹینجنٹ ٹرم ٹھیک ہے
کے برابر 3 جس کو کیوب روٹ آف n ویں جڑ پر بحث کریں گے خاص کیسn تو میں ثبوت کو ایک مشق کے طور پر چھوڑتا ہوں اب ہم اتحاد کی
کو 3 سمجھتے ہیں اور ہم پوچھ رہے ہیں کہ تمام پیچیدہ کیا ہیں؟ نمبر جس کی تیسری طاقت 1 ہے ہم جانتے ہیں کہ n یونٹی کہا جاتا ہے لہذا ہم
ہمیں وہ اصطلاح ملتی ہے جو ایک کہتی ہے کہ زاویہ دو پائی ضرب تین ہے اور دوسری اصطلاح جو چار پائی ضرب تین ہے پیچیدہ عدد جو اس
مساوات کو پورا کرتا ہے کیا یہ اعداد ٹھیک ہیں
سائن ٹو i ٹو پائی بائی تھری اور پلس cos ٹو پائی بائی تھری کہتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ cis تو ایک خاص اشارے ہے جو اومیگا ہے جسے
روٹ 3 بائی 2 کی قدر ملتی ہے اور جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے اگلی اصطلاح کچھ نہیں i پائی بائی تھری کی قدر کیا ہے ہمیں مائنس ہاف پلس
جو کہ ہمارے اومیگا اسکوائر pi by 3 صرف حاصل کی گئی ہے جیسا کہ کہتے ہیں cis 4 pi by 3 2 بلکہ اومیگا اسکوائر ہے جو کہ
کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا اس اشارے کا استعمال کرتے ہوئے اومیگا جو ہم مشاہدہ کرتے ہیں وہ ہے ایک اومیگا مربع آر مکعب جڑیں اتحاد کی ہم
بہت آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ ایک جمع اومیگا جمع اومیگا مربع کی قدر صفر ہے کیونکہ آپ یہ بھی مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ اومیگا اسکوائر
کچھ نہیں بلکہ اومیگا جوڑ ہے اب یہ ہے کہ ایک بار جب آپ اومیگا اومیگا مربع کو جمع کریں
تو خیالی حصہ اومیگا کا حقیقی حصہ منسوخ کر دیتا ہے۔ مائنس آدھا
تو آپ کو حقیقی حصے کے دو گنا ملیں گے جو مائنس ایک ہے
تو رقم صفر ہے
کہاں ہے 3 کیا ہم n تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ریمارک ایک اور اس سے ملتا جلتا ہے جو ہم نے اتحاد اومیگا پاور کی نویں جڑ میں کیا ہے کہو کہ
اسے صرف ایک ٹھیک کے طور پر حاصل کرتے ہیں لہذا کوئی صرف اس کی طاقت تین کو بڑھانے کا حساب لگا سکتا ہے جو یہاں ہے مثال کے
تین بنیادی طور پر دلیل میں ضرب میں جاتا ہے آپ کو صرف دو پائی ملتی ہے ایک cis جو کہ cis two pi by three cube طور پر
ٹھیک ہے یا ہم اس کے لیے جیومیٹرک تشریح بھی دیکھ سکتے ہیں آئیے ہم یونٹ کے دائرے 1 پر غور کریں اور اومیگا کو 120 ڈگری گھومنے کے
ذریعے رکھا گیا ہے اور اومیگا اسکوائر کو دوبارہ آپ بیس ڈگری سے گھماتے ہیں جو حقیقت میں کنجوجیشن ہے جو کہ اومیگا مربع ہے اس کا
مطلب یہ ہے کہ اومیگا سے ضرب کرنا جو کہ اس مخصوص ویکٹر میں 120 ڈگری زاویہ جوڑنے کے مترادف ہے اب آپ ایک اور 120 ڈگری
جوڑتے ہیں جسے اومیگا سے ضرب کیا جاتا ہے آپ ایک تک پہنچ جاتے ہیں
یہ اومیگا پاور 3 پاور کی n تو ہم دیکھتے ہیں کہ اومیگا کیوب ایک ہے اور عام طور پر اگر آپ اومیگا پاور پر غور کرتے ہیں۔ کہتے ہیں کہ 3 پاور

ہے کوئی بھی انٹیجر ہوسکتا ہے لہذا مشاہدہ یہ ہے کہ اگر ہمارے پاس اومیگا پاور تھری ملٹیلز ہے n یہ n 1 طرح ہے
تو یہ ایک ہے اور ایک اور مشاہدہ جو ہم نے بنایا ہے وہ اتحاد کے مکعب جڑوں کا مجموعہ ہے۔ صفر ہے جیسے عام طور پر ہمارے پاس اتحاد کی
نویں جڑ ہے آپ اس کا خلاصہ کرتے ہیں آپ صفر حاصل کرتے ہیں آئیے ایک آسان مسئلہ کرتے ہیں اس اظہار کی قدر تلاش کریں یا اس طرح
کی شکل میں کم ہو جائے۔ اظہار جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ اصطلاح ہمارے اومیگا کے سوا کچھ نہیں ib آسان کریں کہ یہ ایک جمع
ہے لہذا اومیگا کی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے ہم اسے آسانی سے آسان بنا سکتے ہیں لہذا اس اصطلاح کو چار جمع پانچ اومیگا پاور تین سو
چونتیس جمع تین گنا اومیگا پاور تین سو پینسٹھ پر غور کریں جیسا کہ ہم نے پہلے دیکھا تھا۔ اس اصطلاح کو اومیگا پاور 3 ملٹیپلز کے طور پر لکھا
جا سکتا ہے جو 300 تینتیس ضرب ہے اور اومیگا پلس کے ساتھ تین بار پھر ہم پاور کو اس طرح تقسیم کر سکتے ہیں کہ ایک تین ملٹیپل ہے جو تین
سو پینسٹھ ہے یہ اومیگا مربع ہے
تو یہ اصطلاح ایک ہے ایک بار پھر یہ عنصر ایک ہے
تو ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے چار جمع پانچ اومیگا جمع تین اومیگا مربع اب دوبارہ اس حقیقت کو استعمال کریں کہ اتحاد کی مکعب جڑوں کا مجموعہ 0
ہے اس سے ہمیں اومیگا مربع مائنس اومیگا مائنس 1 ملتا ہے اب اس میں متبادل ہے مساوات ہم اسے حاصل کرتے ہیں جیسا کہ کہتے ہیں جمع پانچ
اومیگا اور پھر مائنس تھری اومیگا مائنس تھری ہمیں ایک جمع دو اومیگا ملتا ہے اب صرف یہ دیکھیں کہ اومیگا کی قیمت کیا ہے جو مائنس آدھا ہے
تھری روٹ تھری بائے ٹو جو کہ آسان بنانے کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں ہمیں ایک مائنس ون ملتا ہے اور ایک کے ساتھ کینسل ہوتا ہے i پلس
گنا روٹ تھری ہے i تو باقی فیکٹر
تو ایسا لگتا ہے کہ جب ہم کہتے ہیں کہ اظہار اومیگا کی طاق
توں کے ساتھ آتا ہے۔ اومیگا کی خصوصیات کو استعمال کرکے آسانی سے کم کیا جا سکتا ہے آئیے ایک اور مسئلہ کرتے ہیں اب ہمیں یہ بتانا ہوگا
ہونے کے n جمع 1 سے ضرب دیا جاتا ہے جو کہ ہر n تین سے ضرب کیا جاتا ہے اسے دو mul کہ اس کمپلیکس نمبر کی طاقت جس کو
لیے ہمیشہ مائنس 1 ہوتا ہے۔ انٹیجر
بذریعہ جڑ 3 مائنس میں i تو آئیے ہم یہ دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں کہ یہ ایکسپریشن کیا ہے پہلے اس ایکسپریشن پر غور کریں جڑ 3 پلس
جڑ 3 سے ضرب کرتے ہیں اور ہم یہاں حاصل کرتے ہیں i آئیے براہ راست آسان کریں جس کا مطلب ہے کہ آپ اس کے کنجوگیٹ جڑ 3 جمع
پورے مربع کو اس سے تقسیم کیا گیا ہے تین جمع ایک ہمیں ایک اصطلاح ملتی ہے جو چار ہے اب یاد کریں اومیگا اومیگا کی i جو جڑ تین ہے پلس
نکال i جڑ 3 بائے 2 اب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ اظہار تقریباً اس کے قریب ہے جڑ تین کے برابر ہم عام طور پر i قدر مائنس نصف ہے اور
مربع ہے i کو باہر نکالتے ہیں جو i سکتے ہیں اگر آپ
تو ہم مربع اصطلاح کے اندر چار لے سکتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ ہم یہاں ایک مائنس دو سے حاصل کرتے ہیں اب یہ وہی ہے جیسا کہ یہ
مائنس ایک ہے اور یہ ہے مائنس اومیگا کے سوا کچھ نہیں جو کہ ہم اسے اومیگا اسکوائر کے طور پر دیکھتے ہیں
تین گنا ٹو این پلس ون کو بڑھاتے ہیں اور جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے i بائی روٹ تھری مائنس i تو اب اگر ہم پاور کو تین گنا روٹ تھری پلس
کہ یہاں مائنس اومیگا اسکوائر پاور تھری ہے۔ متعدد دو این جمع ایک یہ ہے مائنس ون پاور سکس این پلس تھری اور اومیگا اسکوائر ہم اسے سکس
پاور ٹو این پلس ون کے طور پر لکھ سکتے ہیں یہ ہمیں مائنس ون دیتا ہے اور یہ ہمیں صرف ایک دیتا ہے کیونکہ یہ تین کا ضرب ہے جو ہمیشہ ایک
تلاش کرنا چاہیں گے جو اس مساوات n ہوتا ہے۔ ہم اپنے بیان کی تصدیق کرنے کے قابل ہیں ہمیں ایک اور مسئلہ کرنے دیں ہم کم از کم مثبت عدد
کی کم سے کم قدر دینے کی ضرورت ہے۔ کونسا یہ n ہو سکتے ہیں لیکن ہمیں n کو پورا کرتا ہے لہذا اس شناخت کو پورا کرنے کے لیے کئی
مساوات پوری ہوتی ہے اس لیے اس اظہار کے ذریعے ہم استعمال کر سکتے ہیں کہ ایک جمع اومیگا اسکوائر ایس مائنس اومیگا اور اومیگا پاور فور
جو کہ صرف اومیگا کیوب کو اومیگا کے ساتھ ضرب دیا گیا جو کہ صرف اومیگا ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ اظہار ہمیں 1 جمع اومیگا اسکوائر پاور
ہے اور یہ اصطلاح n 1 پلس اس طرح مطمئن ہوتا ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ مائنس اومیگا پاور n 1 کے طور پر ملتا ہے۔
بطور اومیگا پاور n ہے اور یہ مطمئن ہوتا ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب اومیگا پاور n پلس اومیگا ہے جو مائنس اومیگا اسکوائر پاور
کے برابر ہے n 1 اس طرح مطمئن ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اومیگا پاور n 2
n کی کم سے کم قیمت کیا ہے جو اس کو پورا کرتی ہے جو کہ صرف n ہم پوچھ رہے ہیں کہ n تو ہم صرف اومیگا پاور کو منسوخ کرتے ہیں
ہے تین ہے آئیے ایک مسئلے پر بات کرنے کی کوشش کریں جو قدرے مختلف ہے ہم پوچھنا چاہیں گے کہ کیا ہے؟ وہ تمام پیچیدہ اعداد ہیں جو اس
کو صفر کے برابر لیتے ہیں z مساوات کو پورا کرتے ہیں لہذا جس لمحے ہم اسے دیکھتے ہیں اگر ہم
o غیر صفر ہے اور ہم پوچھتے ہیں کہ کیا کوئی غیر صفر ہے؟ z تو ایک مطمئن ہوجاتا ہے جو ایک معمولی حل ہے اب آئیے فرض کریں کہ
کمپلیکس نمبر اس مساوات کو مطمئن کرتا ہے جب یہ غیر صفر ہوتا ہے
مربع سے تقسیم کر mod z مربع کو z کا ماڈیولس بھی ہوتا ہے جو کہ غیر صفر ہے ہم اس پورے اظہار میں z تو اس میں الٹا ہوتا ہے یا
حاصل ہوتا ہے۔ یہاں ایک موڈ زیڈ کو کینسل کر دیا گیا اور ہمیں ایک مل گیا یہ صفر z مربع جمع mod z مربع بذریعہ z سکتے ہیں لہذا ہمیں
ہے پورا مربع اور ایک اور پیچیدہ نمبر جمع mod z بذریعہ z کے برابر ہے اب کسی نہ کسی طرح یہ واقف مساوات کے قریب آ گیا ہے جو کہ
ایک صفر کے برابر ہے جو بالکل وہی اومیگا ہے جہاں یہ ہے اس مساوات کو پورا کرتا ہے لہذا اب ہم اپنا سوال دوبارہ پوچھتے ہیں ہم ایک غیر
سمجھتا ہوں z صفر پیچیدہ عدد کی تلاش کر رہے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتا ہے لہذا اگر میں ایک عدد اومیگا کو
تو اومیگا کو اس مساوات کو پورا کرنا چاہئے اور ہم جانتے ہیں کہ دو ہیں اس مساوات کا انوکھا حل جو اتحاد کی مکعب جڑ کے سوا کچھ نہیں ہے
جسے ہم نے اومیگا سو اور اومیگا اسکوائر کہا ہے
z کہتے ہیں۔ میگا اور اومیگا اسکوائر اب اگر ہم o جسے ہم pi by 3 ہیں اور کہتے ہیں 4 cis 2 pi by 3 تو اس کے دو حل ہیں جو
ہے a کو لیمبڈا ٹائمز اومیگا سمجھتے ہیں جہاں لیمبڈا
بذریعہ موڈ لیمبڈا کو اومیگا کے طور پر منتخب کر سکتے ہیں یہ z تو آپ کو اس مساوات سے کیا حاصل ہوتا ہے لہذا ہم حاصل کرتے ہیں کہ ہم
کی قدر ڈالیں موڈ زیڈ جو اومیگا ہے جہاں موڈ زیڈ کو اب صوابدیدی طور پر منتخب کیا جاسکتا ہے z اس مساوات کو پورا کرتا ہے لہذا ہم صرف
جہاں لیمبڈا r لہذا جس کا مطلب ہے کہ زیڈ کو لیمبڈا ٹائمز اومیگا کے طور پر لکھا جاسکتا ہے اور دوسرے کہتے ہیں لیمبڈا ٹائمز اومیگا اسکوائر
غیر منفی ہے لہذا ہمارے حل ایک میں دوبارہ دہرائیں جو ہمارے پاس ہے پہلے ہم نے مشاہدہ کیا کہ صفر کے برابر ایک حل ہے اور پھر ہم ایک غیر
غیر صفر ہے z صفر حل تلاش کرتے ہیں جب ہم فرض کر لیتے ہیں کہ
سے تقسیم کرنے کے قابل ہو جاتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ ہماری مساوات کو یونٹ کے دائرے پر سکیل کیا جاتا ہے کیونکہ کوئی mod z تو ہم
بھی پیچیدہ عدد جو اس کو پورا کرتا ہے۔ مساوات جس کا ماڈیولس ایک ٹھیک ہے لہذا ہم ایک پیچیدہ عدد کی تلاش کر رہے ہیں جو یونٹ کے دائرے پر
ہے اور اس مساوات کو پورا کرتا ہے اور یہ اتحاد کے مکعب جڑ کے سوا کچھ نہیں ہے اور اس سے ہم نے باقی تمام چیزیں اخذ کی ہیں۔ آئیے اب
ہم ہندسی پہلو کے لحاظ سے اس پیچیدہ اعداد کے فائدے پر بات کرنے کی کوشش کرتے ہیں تاکہ اتحاد کے مکعب کی جڑیں اس کی ہندسی تشریح
ہوتی ہے جو کہ جب ہم یونٹ کے دائرے کو لیتے ہیں
تو ہم یہاں 1 رکھتے ہیں اور اومیگا کو 120 ڈگری زاویہ کے ساتھ مثبت اصلی محور اور دوسرے آپ ایک ہی ویکٹر کے ذریعے 120 ڈگری گھمائیں

تو ہمیں اومیگا مربع ملتا ہے جو ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایک کثیرالاضلاع کو عمودی کے ساتھ رکھیں کیونکہ یہاں اتحاد کے اس مکعب کی جڑیں تین
اطراف کے ساتھ کثیرالاضلاع ہیں جو کہ مثلث کے علاوہ کچھ نہیں ہے جو باقاعدہ ہے یہاں باقاعدہ اس کا مطلب یہ ہے کہ ہمیں ایک مساوی مثلث
مل رہی ہے
تو آئیے ہم یہ یاد کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ مساوی مثلث کیا ہے اس لیے تمام اطراف والی مثلث برابر ہیں جو کہتے ہیں کہ ہم اسے کہتے ہیں
ہے اور اس طرح اگر یہ مساوی ہے b اور دوسری لمبائی a کیونکہ یہ اطراف کی لمبائی ہے
تو تمام اطراف برابر ہیں اور تمام زاویے بھی برابر ہیں نہ صرف یہ کہ ہم یہاں مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ م
آرتھو سینٹر کے ساتھ ساتھ طواف کے مرکز کے ساتھ بھی موافق ہے لہذا ہم اس وقت م d توازی مثلث سینٹروئی
توازی مثلث کے لیے متعدد خصوصیات کی فہرست بنا سکتے ہیں آئیے ہم صرف ایک تعریف کو لے لیں جو کہ تمام اطراف برابر ہیں اور تمام زاویے
برابر ہیں ان میں سے کوئی بھی آپ لے سکتے ہیں۔ تعریف کے طور پر یہ دونوں برابر ہیں کہ یہ کہنا کہ ایک مثلث مساوی مثلث ہے اب اس بات
کی تصدیق کرنا بہت آسان ہے کہ ہم یہاں جو تکون حاصل کرتے ہیں وہ ایک مساوی مثلث ہے صرف یہ دیکھ کر کہ اطراف کی لمبائی کے اطراف
کی لمبائی کیا ہے وہ ایک مائنس اومیگا یو ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ اومیگا مائنس اومیگا اسکوائر جیسا ہی ہے کیوں کہ اس کو اومیگا کے طور
پر لکھا جا سکتا ہے عام طور پر لیا جا سکتا ہے اور جو آپ کو ملتا ہے وہ 1 مائنس اومیگا کے ساتھ اومیگا پروڈکٹ ہے اور ماڈیولس ہر فیکٹر کے
لیے لیا جا سکتا ہے موڈ اومیگا ایک ہے لہذا آپ کو ملے گا۔ کہ یہ ایک مائنس اومیگا ہے جس کا مطلب ہے کہ سائیڈ اور اس سائیڈ کی لمبائی برابر
ہے اسی طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ بھی 1 مائنس اومیگا اسکوائر کے برابر ہے جو آپ صرف کر سکتے ہیں موڈ اومیگا سے ضرب کریں پھر
آپ دیکھیں گے کہ یہ فوراً دوسری طرف کے برابر ہے ٹھیک ہے لہذا ہم براہ راست تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایک اومیگا اومیگا مربع کے طور پر
عمودی کے ساتھ رکھا ہوا مثلث ہمیں مساوی مثلث دیتا ہے اب اتحاد کے مکعب جڑ کی اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ہم ثابت کریں گے۔ م
abc سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں abc کو t توازی مثلث کی کچھ خصوصیات ہم مندرجہ ذیل کو ثابت کرتے ہیں کہ عمودی کے ساتھ ایک مثلث
مساوی مثلث ہے اگر یہ سیٹ کسی ایک شرط کو پورا کرتا ہے ورنہ اگر کوئی ایک حالت مطمئن t پیچیدہ اعداد میں ہوتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ
ہے
تو t م
کے ساتھ ضرب دیا گیا ان کا مجموعہ صفر ہے اور c جمع اومیگا مربع کو b تواتر مثلث ہے آئیے پڑھیں یہ کیا شرط ہے ایک جمع اومیگا ٹائمز
اگر یہ مساوات مطمئن ہو جاتی ہے ca جمع کے برابر ہے bc جمع ab مربع ہے جو c مربع جمع b دوسری مساوات ایک مربع جمع
ایک مساوی مثلث ہے abc تو ہم دعویٰ کر سکتے ہیں کہ عمودی کے ساتھ مشابہ مثلث بطور
مساوی مثلث ہے t تو آئیے کوشش کریں اس نتیجے کو ثابت کرتا ہوں پہلے میں یہ ثابت کرتا ہوں کہ اگر
تو ہم یہ ظاہر کرتے ہیں کہ یہ اس مساوات کو پورا کرتا ہے اور اسی طرح اگر مساوات مطمئن ہو جاتی ہے
تو ہم دعویٰ کر سکتے ہیں کہ یہ مساوی مثلث ہے
تو ہم دکھائیں گے کہ 1 اور 2 مساوی بیانات 1 اور 2 ہیں۔ مساوی بیانات ہیں لہذا ہمیں جو دیا جاتا ہے ہمیں ایک مثلث کے ساتھ دیا جاتا ہے جو عضو
ہوتا ہے اورینٹیشن کے ساتھ مخالف سمت میں واقفیت کو نوٹ کرنے کی abc کے طول میں کہیں رکھا جاتا ہے جس میں عمودی کے ساتھ
ضرورت ہوتی ہے جب یہ دیا جاتا ہے کہ یہ مساوی ہے مثلث جو ہم جانتے ہیں کہ زاویہ برابر ہیں کیا ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ ہر طرف کی
لمبائی وہ برابر ہیں اب میں مشاہدہ کرنے جا رہا ہوں کہ کیا یہ واقعی ایسا ہے کہ کیا میں مثلث کا مطالعہ کر کے کسی اور نقطہ پر منتقل کر سکتا
ہوں ٹھیک ہے وہی نتیجہ کیا میں اس مثلث کو کسی اور مقام پر منتقل کر کے وہاں پر مسئلہ حل کر سکتا ہوں اور کیا میں واپس آ سکتا ہوں ٹھیک ہے
جسے قدرتی طور پر شفٹنگ پراپرٹی کہا جاتا ہے اگر میں ایسا کرتا ہوں
تو ہمارا دعویٰ کیا ہے؟ اب پہلے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ ایک مساوی مثلث ہے پھر ہم دکھاتے ہیں کہ دوسرا حصہ کیا ہے دوسرا حصہ یہ ایک
صفر کے برابر ہے ہم اسے دکھانا چاہیں گے c جمع اومیگا مربع اوقات b جمع اومیگا ٹائمز
تو اگر میں اس مثلث کو تبدیل کروں اس کا مطلب یہ ہے کہ میں تمام پوائنٹس میں کچھ پیچیدہ نمبر کا اضافہ کرنے جا رہا ہوں بصورت دیگر آپ اس
مخصوص مثلث میں ہر ایک پوائنٹ سے ایک پوائنٹ کو گھٹائیں گے یعنی ہم صرف اس بات پر غور کریں کہ ہم یہ کہتے ہیں کہ آپ کے پاس عمودی
مثلث ہے جیسا کہ ہم کہتے ہیں کہ یہ ہے ایک کوما ایک اور چلو یہ کہتے ہیں کہ یہ تین کوما ہے ایک اور ہم یہ کہتے ہیں کہ دو کوما ایک اور آدھا
ٹھیک ہے
تو میں کیا کر سکتا ہوں کہ میں ایک کوما سے گھٹا سکتا ہوں پھر پوری چیز کو اصل نقطہ پر منتقل کیا جا سکتا ہے ٹھیک ہے آپ اس مثلث کے ہر
نقطے پر 1 کوما 1 کو گھٹا دیتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ میں یہاں ایک نیا مثلث بنا سکتا ہوں بغیر کسی واقفیت اور ساتھ ہی ساتھ سائیڈ کی لمبائی کو
صرف ایک مثلث لے کر اسے e w تبدیل کیے بغیر کسی جیومیٹریکل پراپرٹی کو تبدیل کیے بغیر ہم صرف شفٹ کر سکتے ہیں جس کا مطلب ہے
دوسری جگہ رکھ سکتا ہوں ٹھیک ہے
تو میں جو دیکھ سکتا ہوں وہ یہ ہے کہ اگر میں شفٹ کرتا ہوں
تو کیا یہ اب بھی یہ مساوات رہے گی کہ آیا یہ غیر متزلزل ہو گی ٹھیک ہے کہ فرض کریں کہ مساوات مطمئن ہے فرض کریں فرض کریں کہ
کوئی مطمئن ہے ٹھیک ہے
تو کیا یہ ایک دوسرے مثلث کے لیے بھی درست ہوگا جس کی جگہ کسی اور نقطہ پر آ گئی تھی ٹھیک ہے جس کا مطلب ہے کہ میرا نیا پوائنٹ ایک
سے شفٹ ہوا تھا ٹھیک ہے اب میں پوچھ رہا ہوں کہ آیا مساوات z ہے وہ ایک نیا مثلث بناتے ہیں جو ابھی z مائنس zc مائنس zb مائنس
مطمئن ہو جائے گی بس اس کو اس مخصوص نقطہ کی مساوات میں عمودی کے طور پر تبدیل کرنے کی کوشش کریں اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ
ہے جو کہ پلس اومیگا ہی پلس اومیگا اسکوائر سی کے برابر ہے۔ z مائنس c پلس اومیگا اسکوائر z مائنس b پلس اومیگا ٹائمز z ایک مائنس
کے لیے مساوات مطمئن ہے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ abc بطور عام فیکٹر ون پلس اومیگا پلس اومیگا اسکوائر جو کہ صفر ہے اور چونکہ z مائنس
صفر ہے
ایک کو مطمئن کرتا ہے abc تو اب ہم جو مشاہدہ کرتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر
سے گھٹانے سے دوسری طرف یہ اس مساوات کو پورا کرے گا z تو آپ اسے کسی دوسرے میں منتقل کر سکتے ہیں۔ جگہ صرف
تو یہ اس کے برعکس ہے اگر یہ خاص صفر کے برابر مطمئن ہے
تو آپ حقیقت میں دکھا سکتے ہیں کہ ایک مطمئن ہے
تو یہ اس طرح ہے کہ اسے دو کہتے ہیں۔
تو جو ہم مشاہدہ کرتے ہیں وہ ایک ہے اور دو برابر ہیں اس مشاہدے سے ہم جو کرنے جا رہے ہیں وہ یہ ہے کہ ہم عمومیت کے نقصان کے بغیر جا
رہے ہیں ہم اپنے مثلث کو ایک اصل کی طرف منتقل کرنے جا رہے ہیں جیسا کہ مثلث میں سنٹراڈ اس کا مطلب ہے کہ میں جا رہا ہوں میرے مثلث
کو منتقل کرنے کے لیے اس طرح کہ اصل کو سنٹرائیڈ کے طور پر جو ہم جانتے ہیں کہ م
توازی مثلث کی خاصیت اصل ہے کہتے ہیں کہ سنٹرائڈ اور سرکسینٹر برابر ہیں لہذا ہم جو جانتے ہیں وہ ہے کہ لہذا ہم نے اصل میں شفٹ کیا ہے
اسے کہتے ہیں کیونکہ یہ ایک اشارے کی زیادتی ہے لیکن صرف یہ کیا ایک خاصیت اس شفٹ کے تحت غیر متغیر ہے میں اسے دوبارہ کہتا ہوں

ہے جسے ہم ان ہر ایک چوٹی کے درمیان زاویہ دیکھتے ہیں جو 120 بناتا ہے کیونکہ یہ زاویہ جو 60 ہے وہ برابر زاویہ ہیں کیونکہ abc یہ اب
ہے اور چونکہ مرکز وہی ہے جو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سنٹرائڈ ہے اور ساتھ ہی سرک سینٹر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ اس زاویہ se مساوی مثلث کا
کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے کیا یہ مخصوص لائن ہمارے اصل زاویہ کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے لہذا اس کا مطلب ہے کہ یہ 30 ہے
اور دوسرا ہے 30
تو باقی رہے گا 120
ہے اگر آپ 120 ڈگری کے زاویے سے گھمائیں a مائنس b تو اس مشاہدے سے جو ہم دیکھ سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ سائیڈ ویکٹر جو
تو اگر آپ 120 ڈگری کے زاویے سے گھمائیں گے
ہے b مائنس c تو یہ اس طرف پہنچ جائے گا جو
تو اب یہ مشاہدہ ہمیں یہ بتاتا ہے کہ درحقیقت یہ م
کو 120 ڈگری کے زاویے سے گھمانے سے a مائنس b کو b مائنس c توازی مثلث ہو گی اگر اور صرف اس صورت میں جب میری سائیڈ
حاصل کیا جائے
کچھ b مائنس c کا مساوی ہے اگر اور صرف اگر ہم حاصل کریں۔ گردش کو گھمانے سے ہماری طرف ts مثلث t تو اس کا مطلب ہے کہ
پلس اے اومیگا c نہیں سوائے اومیگا سے ضرب کرنے کے اس طرح یہ وہی ہے جیسا کہ اب ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات کو آسان کرنے سے جو
ہے اور پھر مائنس بی ون پلس اومیگا یہ صفر اور ویں کے برابر ہے۔ یہ ایک اومیگا بی اومیگا اسکوائر پلس سی کے برابر ہے یہ صفر کے برابر
ہے اب ہماری مساوات کو اومیگا اسکوائر سے ضرب دیں
تو ہم یہاں حاصل کریں گے یہ اومیگا کیوب ہے جو ایک ہے یہاں آپ کو اومیگا پاور فور ملے گا جو اومیگا ہے اس طرح یہ یہ نتیجہ اخذ کرتا ہے
م t کہ پہلا تبصرہ جو ہم حاصل کرنے کے قابل ہیں کہ
م t تواتر مثلث ہے اگر ایک صرف اس صورت میں جب وہ اس شرط کو پورا کرتا ہے اب ہم دوسرے کو ثابت کرنا چاہیں گے کہ
مساوی ہو جس کا مطلب ہے یہ خود بخود اس مساوات کو پورا کرتا ہے t توازی مثلث ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب اس طرح ایک بار
لہذا ہم صرف یہ دکھائیں گے کہ یہ دونوں مساواتیں مساوی ہیں
تو آیئے ثابت کریں کہ دو تین کے مساوی ہیں یا جو ہم بنیادی طور پر مساوی مثلث کی طرح ہیں اگر اور صرف اس صورت میں جب شرط تین دوبارہ
مطمئن ہو جائے
کو شفٹ کرتے ہیں جو کہ abc ایک بار پھر شفٹنگ شفٹ کی خاصیت دوبارہ رکھتی ہے کہ اگر آپ vertices تو کوئی دیکھ سکتا ہے کہ اگر
سے ایک مثلث ہے z
z مائنس b پلس z مائنس zb پورے مربع یہ ایک مائنس z مائنس c مربع جمع z مائنس b تو اگر یہ مطمئن ہے اگر صرف ایک اگر
پلس کے برابر ہوگا z مائنس c پلس z مائنس c پروڈکٹ کے ساتھ
تو اب پھر ہم کیا کرنے جا رہے ہیں ہم تھوڑی سی سہولت کرنے جا رہے ہیں تاکہ ہماری مساوات بہت آسان نظر آئے سب سے آسان انتخاب ہم
کو اس طرح شفٹ کریں کہ کسی ایک عمودی کو صفر اوکے کے طور پر جس t کے برابر تبدیلی کریں گے جس کا مطلب ہے کہ مثلث z صرف
عمودی فرض کر سکتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ یہ اس کو مطمئن کرتا bcr کے صفر t کا مطلب ہے کہ عمومیت کے نقصان کے بغیر ہم اب
اب ہمارا دعویٰ کیا ہے جو ہم دعویٰ کرنا چاہیں گے کیا یہ شرط دو کو bc مربع برابر c مربع جمع b ہے۔ مساوات جو ہمیں دی گئی ہے کہ
پورا کرنے کے مترادف ہے مجھے یاد کرنے دو شرط دو کیا ہے
ہیں abc تو اگر عمودی
صفر ہے جس کا مطلب ہے کہ ہم مساوات کو کم کرتے ہیں یہ کہنے کے برابر ہے کہ a تو یہ مساوات مطمئن ہو جاتی ہے اب ہمارا ورٹیکس
اومیگا ٹائمز بی پلس اومیگا اسکوائر سی یہ صفر کے برابر ہونا چاہیے اب پوچھیں کیا ہے اس کا مطلب یہ کہنے کے مترادف ہے کہ ہمیں یہ کہنے
کے برابر ہے یہ ایک bc مربع c مربع جمع b یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ c بذریعہ b کی ضرورت ہے کہ یہاں صرف اومیگا ایس مائنس
b اتحاد کا مکعب جڑ ہے اب یہ مساوات جو ہمیں دیتی ہے وہ ہے c کو دکھانے کے لیے ابلتا ہے۔ b مزے کا ایک پتی ہے اب یہ اس مائنس
ایک مائنس cs بذریعہ b کا اظہار ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ c بذریعہ b یہ اس سے ایک ہے ہمارے پاس b بذریعہ c جمع c بذریعہ
اتحاد کا مکعب جڑ ہے c سی اب ہم کوشش کر سکتے ہیں ب کے بارے میں دعویٰ بذریعہ
مکعب ایک ہے c بذریعہ b تو اس کے لیے ہمارا دعویٰ مائنس
ہے 1 c بذریعہ b لیکن c بذریعہ b پروڈکٹ کے ساتھ c بذریعہ b مربع سے شروع ہوتا ہے جو c بذریعہ b تو اس کے لیے مائنس
c by b مائنس s مائنس 1 c کی طرف b مائنس 1 ملتا ہے اب دوبارہ اظہار c بذریعہ b اب نوٹ کریں کہ یہ ہمیں c by b مائنس
سے زیادہ تیز تر اصطلاح ہم نے c سے b مربع سے ضرب مائنس c کو b کیوب ایک ہے مائنس b by c مائنس y اب یہ واضح ہے کہ
b کے ساتھ حاصل کیا جو ایک ہے اس لیے ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ مائنس c سے b اور پروڈکٹ کو مائنس b سے c اسے مائنس
اتحاد کی مکعب جڑ کے طور پر اس لیے ہم یہ ظاہر کرنے کے قابل ہیں کہ درج ذیل مساوات اس بات کو پورا کرتی ہے کہ اصل کے c بذریعہ
یہ مساوی مثلث ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ دونوں مساواتیں ہوں مطمئن bc ساتھ مثلث ہے جیسا کہ ایک مساوی دوسری مساوی
لیکن ہم جانتے ہیں کہ ایک بار جب یہ مساوات پوری ہو جاتی ہے
مساوی مثلث ہے اگر ایک پتے t تو مثلث لازمی مثلث ہونا چاہیے جس کا ہم نے پہلے دعویٰ کیا تھا اس لیے ہم نے ثابت کیا کہ مندرجہ ذیل دعویٰ
پر یہ کسی ایک شرط کو پورا کرتا ہے
تو اس لیکچر میں ہم نے بحث کی۔ اتحاد کے مکعب جڑ کے متعدد خواص اور ہم نے اتحاد کے مکعب کی جڑ پر مبنی کئی مسائل پر تبادلہ خیال کیا
اور ہم اگلے لیکچر میں کچھ اور مسائل پر تبادلہ خیال کریں گے شکریہ