

નમસ્તે વિદ્યાર્થીઓનું સ્વાગત છે જટિલ સંખ્યાઓ પરના સાતમા વ્યાખ્યાનમાં છેલ્લા લેક્ચરમાં અમે એકતાના  $n$ મા મૂળની ચર્ચા કરી હતી અને તેના આધારે અમે ઘણી ઓળખ સાબિત કરી છે, ચાલો આ ચર્ચા ચાલુ રાખીએ, અમે એક ઓળખ સાબિત કરી છે જે સાઈન પાઈ છે.

બાય  $n$  સાઈન બે પાઈ બાય  $n$  સાઈન  $n$  માઈનસ એક પાઈ બાય  $n$  ની કિંમત  $n$  બાય બે ની ઘાત  $n$  માઈનસ વન ચાલો જોઈએ કે આ આપણને અમુક સમસ્યાઓ હલ કરવામાં કેવી રીતે મદદ કરે છે તે નીચેની અભિવ્યક્તિનું મૂલ્ય શોધવા માટે અભિવ્યક્તિ સાઈન દસ ડિગ્રી છે સાઈન એસી ડિગ્રી સુધી સાઈન વીસ ડિગ્રી ઉત્પાદન સાથેનું ઉત્પાદન આપણે આ અભિવ્યક્તિનું ઉત્પાદન શોધવા માંગીએ છીએ

તેથી ચાલો આ અભિવ્યક્તિનું મૂલ્ય શોધવા માટે ઉપરોક્ત ઓળખનો ઉપયોગ કરવાનો પ્રયાસ કરીએ જે આપણે અવલોકન કરીએ છીએ તે કોઈપણ  $n$  મૂલ્ય આપવામાં આવે છે ચાલો આપણે  $n$  બરાબર કહીએ બે પછી આપણે જે જોઈએ છીએ તે એ છે કે આ ત્યાં સુધી સાઈન  $\pi$  બાય બે છે અને જો હું  $n$  ની કિંમત લઉં તો દસ કહીએ તો પણ કહે છે કે પ્રથમ મૂલ્ય સાઈન પાઈ બાય દસ હશે જે સાઈન અઢાર છે અને જ્યાં સુધી તે સાઈન ન જાય ત્યાં સુધી નવ બાય નવ પાઈ બાય દસ બરાબર

તેથી જો હું પ્રથમ પદ સાથે ઓળખવાનો પ્રયત્ન કરું જ્યાં તે સાઈન 10 ડિગ્રીથી શરૂ થાય છે ખૂબ જ સ્વાભાવિક રીતે હું જોઉં છું કે જો હું  $n$  ને 18 તરીકે લઉં તો હું પ્રથમ અવયવ જે સાઈન છે તે મેળવી શકું છું.

10 ડિગ્રી એટલે કે ચાલો આપણે  $n$  બરાબર 18 થી શરૂ કરવાનો પ્રયાસ કરીએ

તો હું ઉપરોક્ત ઓળખમાંથી અભિવ્યક્તિના ભાગ સાથે એકરૂપ થવા સક્ષમ છું

તેથી જો હું  $n$  ને 18 ની બરાબર ગણું તો મને અહીં શું મળશે તે સાઈન 10 ડિગ્રી છે પાઈ બાય 18 છે અને અન્ય જે સાઈન વીસ ડિગ્રી છે જે સાઈન બે બાય બે પાઈ બાય અઢાર છે અને તે સાઈન સત્તર પાઈ બાય અઢાર સુધી જાય છે જેની કિંમત આપણી પાસે અઢાર બાય બેની ઘાત સિત્તર છે ચાલો જોઈએ કે આપણે તેને વધુ સરળ બનાવી શકીએ પ્રથમ અવલોકન એ છે કે જો આપણે અહીં  $k$  ની કિંમત નવ લઈએ અથવા નવમી પદ કે જે અહીં કહે છે કે જો હું  $k$  ને 9 ની બરાબર લઈએ તો જ્યાં મારી અભિવ્યક્તિ સામાન્ય પદની ઉપર છે સાઈન  $k$  બાય 18 હું  $k$  ને 9 ની બરાબર લઈએ તો આપણને સાઈન પાઈ મળે છે.

2 દ્વારા જે 1 છે.

તેથી તેનો અર્થ છે કે નવમી પદ આ અભિવ્યક્તિ નવમી પદની કિંમત એક છે પરંતુ અન્ય અવલોકન છે આ અવલોકન એક છે અને બીજું અવલોકન છે જો આપણે સાઈન અઢાર ઓછા  $k$   $\pi$  બાય અઢાર ગણીએ જે સાઈન  $k$  બાય અઢાર સમાન છે હકીકતમાં તમારી પાસે સામાન્ય અવલોકન છે જે સાઈન એન માઈનસ છે  $k$   $\pi$  બાય  $n$  આ 1 થી  $n$  સુધીના સાઈન  $k$  બાય  $n$   $k$  મૂલ્ય સમાન છે અમારી પાસે આપેલ અભિવ્યક્તિ છે અમારી પાસે સાઈન પાઈ બાય 18 સાઈન બે પાઈ બાય અઢાર સુધી સાઈન સત્તર પાઈ બાય અઢાર જે અઢાર બાય બે પાવર સત્તર છે આપણે અવલોકન કરીએ છીએ નવમી પદ એક છે અને બાકીના અન્ય પદો એ અર્થમાં પુનરાવર્તિત થાય છે કે 17 પાઈ બાય 18 જે સાઈન પાઈ બાય 18 સમાન છે

તેથી આપણને સાઈન સ્ક્વેર 2 બાય 18 સુધી સાઈન 8 પાઈ બાય 18 સ્ક્વેર મળે છે જે આપણે કહીએ છીએ સામાન્ય શબ્દ કે જે નવ બાય બે ઘાત સોળ છે તે રદ કરી શકે છે હવે આ શબ્દ બીજું કંઈ નથી પરંતુ આપણી આવશ્યક અભિવ્યક્તિ છે જે સાઈન 10 ડિગ્રી સાઈન 20 ડિગ્રી અને સાઈન 80 ડિગ્રી છે અને આખો ચોરસ છે અને હવે તમે આ લો વર્ગમૂળ આપણને મળે છે 3 બાય 2 ઘાત 8 એક મૂલ્ય તરીકે હવે ઓળખ સમાન છે જે સાઈન પ્રોડક્ટ્સ આપણને મળે છે  $n$  બાય બે ઘાત  $n$  ઓછા એક આના સમાન આપણે  $\cos$  ટર્મને સમાવતા ઓળખ મેળવી શકીએ છીએ જે  $\cos \pi$  by  $n$   $\cos 2\pi$  છે  $n$  સુધી  $\cos m$  માઈનસ વન  $\pi$  બાય  $n$  જે  $m$  ના વર્ગમૂળ બાય બે ઘાત  $m$  માઈનસ વન બરાબર છે તો હવે આ ઓળખ કેવી રીતે સાબિત કરવી જો મને યાદ છે કે જ્યારે આપણે સાઈન ટર્મ સાથેની ઓળખ સાબિત કરી હતી ત્યારે આપણે જે બહુપદી  $z$  નો ઉપયોગ કર્યો હતો.

ઘાત  $n$  માઈનસ 1 સુધી આ વત્તા 1 સુધી આ બહુપદીને એકતાના  $n$ મા મૂળનો ઉપયોગ કરીને અવયવિત કરવામાં આવે છે અને અમે  $z$  ની કિંમત 1 તરીકે ગણી છે પછી અમને આ અભિવ્યક્તિ મળી છે પછી એકવાર તમે તેની મોડ્યુલસ મૂલ્ય લો પછી અમને સંકેત અભિવ્યક્તિ મળી છે હવે સંકેતો ઉપયોગ કરે છે.

આ ઓળખમાં  $z$  ને માઈનસ 1 ની બરાબર કહો

અને સમાન પ્રક્રિયા કરો જેથી જ્યારે તમે માઈનસ 1 માઈનસ આલ્ફા પાવર  $k$  થી અંતરની ગણતરી કરી રહ્યા હો ત્યારે સમાન પ્રક્રિયા કરો જે 1 વત્તા આલ્ફા પાવર  $k$  મોડ્યુલસ જેટલું છે જ્યાં તમને કાસ્ટ મળશે મુદત આ સંકેતનો ઉપયોગ કરીને જમણી બાજુએ તમે બતાવી શકો છો કે અહીં કોસાઇનનો સમાવેશ થતો ઉત્પાદન શબ્દ આ મૂલ્ય આપે છે અને જ્યાં  $n$  એ બેકી સંખ્યા હોય તો તમને આ અભિવ્યક્તિ મળે છે અને સાઇન અને કોસાઇન ઓળખને સંયોજિત કરીને તમે ઓળખ મેળવી શકો છો .

સ્પર્શક શબ્દ બરાબર છે

તેથી હું એક કવાયત તરીકે સાબિતી છોડી દઉં છું હવે આપણે ચોક્કસ કેસ  $n$  ની બરાબર 3 સાથે એકતાના  $n$ મા મૂળની ચર્ચા કરીશું જેને એકતાનું ઘનમૂળ કહેવામાં

આવે છે

તેથી આપણે  $n$  ને 3 ગણીએ છીએ અને અમે પૂછીએ છીએ કે બધા જટિલ શું છે સંખ્યા જેની ત્રીજી ઘાત 1 છે આપણે જાણીએ છીએ કે આપણને તે પદ મળે છે જે એક કહે છે કોણ બે પાઈ બાય ત્રણ છે અને બીજો શબ્દ જે ચાર પાઈ બાય ત્રણ છે જટિલ સંખ્યા જે આ સમીકરણને સંતોષે છે તે આ સંખ્યાઓ બરાબર છે

તેથી ત્યાં એક વિશિષ્ટ સંકેત છે જે ઓમેગા છે જેને  $\omega$  ટુ પાઈ બાય થ્રી કહેવામાં આવે છે આપણે જાણીએ છીએ કે કોસ ટુ પાઈ બાય થ્રી અને વત્તા  $i$  સાઈન ટુ પાઈ બાય થ્રીની કિંમત શું છે તે આપણને માઈનસ હાફ વત્તા  $i$  રૂટ 3 બાય 2 તરીકે મૂલ્ય મળે છે અને આપણે જે જોઈએ છીએ તે છે આગળનો શબ્દ કંઈ નથી પણ ઓમેગા સ્ક્વેર છે જે સીઆઈએસ 4 પાઈ બાય 3 છે તે ફક્ત 2 પાઈ બાય 3 કહે છે તે રીતે મેળવવામાં આવે છે

જે આપણા ઓમેગા સ્કવેર સિવાય બીજું કંઈ નથી

તેથી આ નોટેશન ઓમેગાનો ઉપયોગ કરીને આપણે જે અવલોકન કરીએ છીએ તે એક ઓમેગા ઓમેગા સ્કવેર આર ક્યુબ મૂળ છે. એકતાની એકતા ખૂબ જ સરળતાથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે એક વત્તા ઓમેગા વત્તા ઓમેગા સ્કવેરનું મૂલ્ય શૂન્ય છે કારણ કે તમે એ પણ અવલોકન કરી શકો છો કે ઓમેગા સ્કવેર એ ઓમેગા જોડાણ સિવાય બીજું કંઈ નથી હવે તે એકવાર તમે ઓમેગા ઓમેગા સ્કવેરનો સરવાળો કરો તો કાલ્પનિક ભાગ ઓમેગાનો વાસ્તવિક ભાગ રદ કરે છે.

માઈનસ અડધો

તેથી તમને વાસ્તવિક ભાગના બે ગણા મળશે જે માઈનસ એક છે

તેથી સરવાળો શૂન્ય છે

તેથી આપણે જોઈએ છીએ કે આ ટીપ્પણી એક અને સમાન કહે છે કે આપણે એકતાના  $n$  મા મૂળમાં શું કર્યું છે ઓમેગા પાવર કહો  $n$  જ્યાં  $n > 3$  છે જે આપણે તેને માત્ર એક બરાબર તરીકે મેળવીએ છીએ

તેથી એક માત્ર તેની શક્તિ ત્રણ વધારવાની ગણતરી કરી શકે છે જે અહીં છે ઉદાહરણ તરીકે  $cis\ 2\pi$  બાય થ્રી ક્યુબ જે  $cis$  ત્રણ છે મૂળભૂત રીતે દલીલમાં ગુણાકારમાં જાય છે તમને માત્ર બે પાઇ મળે છે એક બરાબર છે અથવા આપણે આ માટે ભૌમિતિક અર્થઘટન પણ જોઈ શકીએ છીએ યાલો એકમ વર્તુળ  $n$  ને ધ્યાનમાં લઈએ અને ઓમેગા મૂકવામાં આવે છે એમ કહીને 120 ડિગ્રી ફેરવો અને ઓમેગા સ્કવેર ફરીથી તમે એક વીસ ડિગ્રીથી ફેરવો જે વાસ્તવમાં જોડાણ છે જે ઓમેગા ચોરસ છે મતલબ કે ઓમેગા વડે ગુણાકાર કરવો જે આ ચોક્કસ વેક્ટરમાં 120 ડિગ્રી એંગલ ઉમેરવા જેટલો જ છે હવે તમે એક વધુ 120 ડિગ્રી ઉમેરો કે જે ઓમેગા વડે ગુણાકાર કરવામાં આવે તો તમે પાછા એક પર પહોંચો છો

તેથી આપણે જોઈએ છીએ કે ઓમેગા ક્યુબ એક છે અને સામાન્ય રીતે જો તમે ઓમેગા પાવરને ધ્યાનમાં લો કહો 3 પાવર  $n$  આ ઓમેગા પાવર 3 પાવર  $n$  આ 1  $n$  છે તે કોઈપણ પૂર્ણાંક હોઈ શકે છે

તેથી અવલોકન એ છે કે જો આપણી પાસે ઓમેગા પાવર ત્રણ ગુણાકાર હોય તો તે એક છે અને વધુ એક અવલોકન આપણે કર્યું છે તે એકતાના ઘનમૂળનો સરવાળો છે સામાન્ય રીતે શૂન્ય છે જેમ કે આપણી પાસે એકતાનું  $n$  મૂળ છે તમે તેનો સરવાળો કરો તો તમે શૂન્ય મેળવો છો યાલો આપણે એક સરળ સમસ્યા કરીએ આ અભિવ્યક્તિનું મૂલ્ય શોધીએ અથવા તેને સરળ બનાવીએ જેથી તે એક વત્તા  $ib$  ધ ફોર્મમાં ઘટે અભિવ્યક્તિ આપણે જે જોઈએ છીએ તે એ છે કે આ શબ્દ આપણા ઓમેગા સિવાય બીજું કંઈ નથી

તેથી ઓમેગાના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેને સરળ બનાવી શકીએ છીએ

તેથી આ શબ્દ ચાર વત્તા પાંચ ઓમેગા પાવર ત્રણનો ચોત્રીસ વત્તા ત્રણ વખત ઓમેગા પાવર ત્રણનો પંચાવનને ધ્યાનમાં લો જેમ આપણે પહેલા નોંધ્યું છે.

આ શબ્દને

ઓમેગા પાવર 3 ગુણાંક તરીકે લખી શકાય છે જે 300 તેત્રીસ છે જે ઓમેગા વત્તા સાથે ત્રણ વખત ગુણાકાર છે ફરીથી આપણે પાવરને એવી રીતે વિભાજિત કરી શકીએ છીએ કે એક છે ત્રણ ગુણાંક જે ત્રણનો સાઇઠ ત્રણ છે આ ઓમેગા ચોરસ છે

તેથી આ શબ્દ એક છે ફરીથી આ પરિબલ એક છે

તેથી આપણને જે મળે છે તે છે આ ચાર વત્તા પાંચ ઓમેગા વત્તા ત્રણ ઓમેગા ચોરસ હવે ફરીથી એ હકીકતનો ઉપયોગ કરો કે એકતાના ઘનમૂળનો સરવાળો 0 છે આમાંથી આપણને ઓમેગા ચોરસ માઈનસ ઓમેગા માઈનસ 1 મળે છે હવે આમાં અવેજી છે.

સમીકરણ આપણે કહી કે વત્તા ફાઈવ ઓમેગા અને પછી માઈનસ થ્રી ઓમેગા માઈનસ ત્રણ આપણને એક વત્તા બે ઓમેગા મળે છે.

વત્તા  $i$  થ્રી રૂટ ત્રણ બાય ટુ જે સરળ કર્યા પછી આપણે જોઈએ છીએ કે અહીં આપણને માઈનસ વન મળે છે અને એક સાથે રદ થાય છે

તેથી બાકીનું પરિબલ  $i$  ગુણ્યા રૂટ ત્રણ છે

તેથી એવું લાગે છે કે જ્યારે આપણે કહીએ છીએ કે અભિવ્યક્તિ ઓમેગાની શક્તિઓ સાથે આવે છે ઓમેગાના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને આસાનીથી ઘટાડી શકાય છે, યાલો આપણે એક વધુ સમસ્યા કરીએ હવે આપણે બતાવવાની જરૂર છે કે આ જટિલ સંખ્યાની શક્તિ કે જે  $mu1$  ત્રણ વડે વધે છે તેને બે  $n$  વત્તા 1 સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે છે જે દરેક  $n$  હોવા માટે હંમેશા ઓછા 1 હોય છે.

પૂર્ણાંક તો યાલો આપણે જોવાનો પ્રયાસ કરીએ કે આ અભિવ્યક્તિ શું છે પહેલા આ અભિવ્યક્તિ રૂટ 3 વત્તા  $i$  રૂટ 3 ઓછાને ધ્યાનમાં લઈએ, યાલો આપણે સીધા જ સરળ બનાવીએ જેનો અર્થ છે કે તમે તેના સંયોજક મૂળ 3 વત્તા  $i$  રૂટ 3 વત્તા હું અહીં મેળવીએ છીએ જે મૂળ ત્રણ છે.

વત્તા  $i$  આખો ચોરસ આનાથી વિભાજિત થાય છે ત્રણ વત્તા એક આપણને એક શબ્દ મળે છે જે ચાર છે હવે યાદ કરો ઓમેગા ઓમેગાની કિંમત માઈનસ હાફ છે વત્તા  $i$  રૂટ 3 બાય 2 હવે આપણે જોઈએ છીએ કે આ અભિવ્યક્તિ લગભગ આની નજીક છે રૂટ ત્રણની બરાબર અમે  $i$  બહાર કાઢી શકીએ છીએ જો તમે  $i$  બહાર કાઢો જે  $i$  ચોરસ છે તો આપણે ચોરસ શબ્દની અંદર ચાર લઈ શકીએ છીએ જેનો અર્થ છે કે આપણે અહીં એક ઓછા બાય બે મેળવીએ છીએ હવે આ સમાન છે આ માઈનસ વન છે અને આ છે માઈનસ ઓમેગા સિવાય બીજું કંઈ નથી જે આપણે તેને ઓમેગા સ્કવેર તરીકે જોઈએ છીએ

તેથી હવે જો આપણે ત્રણ ગુણ્યા રૂટ ત્રણ વત્તા  $i$  બાય રૂટ ત્રણ માઈનસ  $i$  ત્રણ ગુણ્યા બે  $n$  વત્તા એક વધારીએ અને આપણે જે જોઈએ છીએ તે એ છે કે અહીં ઓમેગા સ્કવેર પાવર ત્રણનો ઘટાડો થાય છે.

બહુવિધ બે એન વત્તા એક આ માઈનસ વન પાવર સિક્સ એન વત્તા ત્રણ છે અને ઓમેગા સ્કવેર આપણે તેને છ પાવર ટુ એન વત્તા વન તરીકે લખી શકીએ છીએ આ આપણને માઈનસ વન આપે છે અને આ આપણને માત્ર એક આપે છે કારણ કે તે ત્રણનો બહુવિધ છે જે હંમેશા એક છે અમે અમારા નિવેદનને ચકાસવામાં સક્ષમ છીએ યાલો એક વધુ સમસ્યા કરીએ અમે ઓછામાં ઓછા સકારાત્મક પૂર્ણાંક  $n$  શોધવા માંગીએ છીએ જે આ સમીકરણને સંતોષે છે

તેથી ત્યાં ઘણા  $n$  હોઈ શકે છે જે આ ઓળખને સંતોષશે પરંતુ અમારે  $n$  નું ઓછામાં ઓછું મૂલ્ય આપવાની જરૂર છે જે આ સમીકરણ સંતુષ્ટ થાય છે

તેથી આ અભિવ્યક્તિ દ્વારા આપણે તે એક વત્તા ઓમેગા સ્કેવર  $s$  માઈનસ ઓમેગા અને ઓમેગા પાવર ચારનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ જે ફક્ત ઓમેગા ક્યુબને ઓમેગા સાથે ગુણાકાર કરે છે જે ફક્ત ઓમેગા છે એટલે કે આ અભિવ્યક્તિ આપણને 1 વત્તા ઓમેગા સ્કેવર પાવર તરીકે મળે છે.

$n$  1 વત્તા આમ આ સંતુષ્ટ થાય છે જો અને માત્ર જો આ માઈનસ ઓમેગા પાવર  $n$  હોય અને આ શબ્દ 1 વત્તા ઓમેગા છે જે માઈનસ ઓમેગા સ્કેવર પાવર  $n$  છે અને આ સંતુષ્ટ થાય છે જો અને માત્ર જો ઓમેગા પાવર  $n$  તરીકે ઓમેગા પાવર 2  $n$  આમ સંતુષ્ટ થાય છે જો અને માત્ર જો ઓમેગા પાવર  $n$  1 ની બરાબર હોય તો આપણે ફક્ત ઓમેગા પાવરને રદ કરીએ છીએ  $n$  અમે પૂછીએ છીએ કે  $n$  નું ઓછામાં ઓછું મૂલ્ય શું છે જે આને સંતોષે છે જે ફક્ત  $n$  છે ત્રણ છે ચાલો આપણે એક સમસ્યાની ચર્ચા કરવાનો પ્રયાસ કરીએ જે થોડી અલગ છે અમે શું પૂછવા માંગીએ છીએ બધી જટિલ સંખ્યાઓ છે જે આ સમીકરણને સંતોષે છે તેથી જે ક્ષણે આપણે આ જોઈએ છીએ જો આપણે શૂન્યની બરાબર  $z$  લઈએ તો સંતુષ્ટ થાય છે જે એક નજીવો ઉકેલ છે હવે ચાલો ધારીએ કે  $z$  બિન-શૂન્ય છે અને આપણે પૂછીએ છીએ કે શું કોઈ બિન-ઝીર છે?  $o$  જટિલ સંખ્યા આ સમીકરણ બિન શૂન્યને સંતોષે છે એકવાર તે શૂન્ય ન હોય તો તેમાં વ્યસ્ત હોય અથવા  $z$  નું મોડ્યુલસ પણ હોય જે શૂન્ય ન હોય તો આપણે આ સમગ્ર સમીકરણમાં મોડ  $z$  ચોરસ વડે ભાગી શકીએ છીએ જેથી આપણને મોડ  $z$  દ્વારા  $z$  ચોરસ વત્તા  $z$  દ્વારા મોડ  $z$  મળે છે.

અહીં કહો કે એક મોડ  $z$  રદ થયો અને અમને એક મળે છે આ શૂન્ય બરાબર છે હવે કોઈક રીતે તે હવે પરિચિત સમીકરણની નજીક આવે છે જે મોડ  $z$  દ્વારા સમગ્ર ચોરસ છે અને બીજી જટિલ સંખ્યા વત્તા એક શૂન્ય બરાબર છે જે બરાબર ઓમેગા છે જ્યાં તે આ સમીકરણને સંતોષે છે તો ચાલો હવે ફરીથી અમારો પ્રશ્ન પૂછીએ અમે એક બિન-શૂન્ય જટિલ સંખ્યા શોધી રહ્યા છીએ જે આ સમીકરણને સંતોષે છે

તેથી જો હું ઓમેગા નંબરને  $z$  તરીકે ગણું તો ઓમેગાએ આ સમીકરણને સંતોષવું જોઈએ અને આપણે જાણીએ છીએ કે ત્યાં બે છે. આ સમીકરણનો અનન્ય ઉકેલ જે એકતાના ઘનમૂળ સિવાય બીજું કંઈ નથી જેને આપણે ઓમેગા સો અને ઓમેગા સ્કેવર તરીકે ઓળખીએ છીએ

તેથી તેના બે ઉકેલો છે જે  $\pm 2\pi i$  બાય 3 છે અને  $4\pi i$  બાય 3 કહે છે જેને આપણે  $o$  તરીકે ઓળખીએ છીએ.

મેગા અને ઓમેગા સ્કેવર હવે જો આપણે  $z$  ને લેમ્બડા ગણો ઓમેગા ગણીએ જ્યાં લેમ્બડા એ છે તો આ સમીકરણમાંથી તમને શું મળે છે

તેથી અમે મેળવીએ છીએ કે અમે ઓમેગા તરીકે મોડ લેમ્બડા દ્વારા  $z$  પસંદ કરી શકીએ છીએ તે આ સમીકરણને સંતોષે છે

તેથી અમે ફક્ત  $z$  માટે મૂલ્ય મૂકીએ છીએ મોડ  $z$  જે ઓમેગા છે જ્યાં મોડ  $z$  ને હવે મનસ્વી રીતે પસંદ કરી શકાય છે

તેથી જેનો અર્થ થાય છે કે  $z$  ને લેમ્બડા ટાઇમ્સ ઓમેગા તરીકે લખી શકાય છે અને અન્ય કહે છે કે લેમ્બડા ટાઇમ્સ ઓમેગા સ્કેવર  $n$  જ્યાં લેમ્બડા નોન નેગેટિવ છે

તેથી અમારા ઉકેલો

તેથી એકમાં મને ફરીથી પુનરાવર્તન કરવા દો કે અમારી પાસે શું છે પહેલા આપણે અવલોકન કર્યું કે શૂન્યની બરાબર એ ઉકેલ છે અને પછી આપણે બિન શૂન્ય સોલ્યુશન શોધીએ છીએ જ્યારે આપણે  $z$  એ શૂન્ય સિવાયનું છે એમ ધારીએ ત્યારે આપણે મોડ  $z$  વડે ભાગવામાં સક્ષમ છીએ જેનો અર્થ છે કે આપણું સમીકરણ એકમ વર્તુળ પર માપવામાં આવે છે કારણ કે ગમે તે જટિલ સંખ્યા જે આને સંતોષે છે.

સમીકરણ કે જેનું મોડ્યુલસ એક બરાબર છે

તેથી આપણે એક જટિલ સંખ્યા શોધી રહ્યા છીએ જે એકમ વર્તુળ પર સ્થિત છે અને આ સમીકરણને સંતોષે છે અને તે એકતાના ઘનમૂળ સિવાય બીજું કંઈ નથી અને તેમાંથી આપણે બીજા બધા મેળવ્યા છે.

Lutions હવે ચાલો આપણે ભૌમિતિક પાસાની

દ્રષ્ટિએ આ જટિલ સંખ્યાઓના ફાયદા પર ચર્ચા કરવાનો પ્રયાસ કરીએ જેથી એકતાના ઘનમૂળનું ભૌમિતિક અર્થઘટન હોય છે એટલે કે જ્યારે આપણે એકમ વર્તુળ લઈએ છીએ ત્યારે આપણે અહીં 1 મૂકીએ છીએ અને ઓમેગાને 120 ડિગ્રીના ખૂણા સાથે ઘન વાસ્તવિક અક્ષ અને અન્ય તમે સમાન વેક્ટર દ્વારા 120 ડિગ્રી ફેરવો તો અમને ઓમેગા ચોરસ મળે છે જે આપણે જાણીએ છીએ જો આપણે શિરોબિંદુ સાથે બહુકોણ મૂકીએ કારણ કે એકતાના આ ઘનમૂળ અહીં ત્રણ બાજુઓ સાથે બહુકોણ છે જે ત્રિકોણ સિવાય બીજું કંઈ નથી જે નિયમિત છે અહીં નિયમિત તેનો અર્થ એ છે કે આપણને એક સમભુજ ત્રિકોણ મળી રહ્યું છે

તેથી સમભાજુ ત્રિકોણ શું છે તે યાદ કરવાનો પ્રયાસ કરીએ

જેથી બધી બાજુઓ સાથેનો ત્રિકોણ સમાન હોય તે કહીએ કે ચાલો તેને કહીએ કારણ કે આ બાજુની લંબાઈ છે અને બીજી લંબાઈ  $b$  છે અને આમ જો તે સમભુજ હોય તો બધી બાજુઓ સમાન હોય છે અને બધા ખૂણા પણ સમાન હોય છે એટલું જ નહીં આપણે અહીં અવલોકન કરીએ છીએ કે આ સમભાજુ ત્રિકોણ સેન્ટ્રીય  $d$  એ ઓર્થો સેન્ટર તેમજ પરિઘ કેન્દ્ર સાથે એકરુપ છે

તેથી અમે અત્યારે સમભુજ ત્રિકોણ માટે ઘણી મિલકતોની યાદી બનાવી શકીએ છીએ, ચાલો આપણે ફક્ત એક વ્યાખ્યા લઈએ કે જે બધી બાજુઓ સમાન હોય અને બધા ખૂણા સમાન હોય તેમાંથી તમે કોઈપણ એક લઈ શકો.

વ્યાખ્યા તરીકે આ બંને સમાન છે એમ કહેવા માટે કે ત્રિકોણ એ સમભાજુ ત્રિકોણ છે હવે તે ચકાસવું ખૂબ જ સરળ છે કે આપણે અહીં જે ત્રિકોણ મેળવીએ છીએ તે સમભાજુ ત્રિકોણ છે તે ફક્ત બાજુઓની લંબાઈ બાજુઓની લંબાઈ શું છે તે જોઈને તે એક ઓછા ઓમેગા તમે તમે જોઈ શકો છો કે આ ઓમેગા માઈનસ ઓમેગા સ્કેવર જેવું જ છે કેમ કે આને ઓમેગા તરીકે લખી શકાય છે સામાન્ય રીતે લઈ શકાય છે અને તમે જે મેળવો છો તે 1 માઈનસ ઓમેગા સાથે ઓમેગા પ્રોડક્ટ છે અને દરેક ફેક્ટર મોડ્યુલસ માટે લઈ શકાય છે ઓમેગા એક છે

તેથી તમે મેળવો છો કે આ એક માઈનસ ઓમેગા છે જેનો અર્થ છે કે બાજુ અને આ બાજુની લંબાઈ સમાન છે તે જ રીતે તમે જોઈ શકો છો કે આ પણ 1 માઈનસ ઓમેગા સ્કેવરની બરાબર છે જે તમે કરી શકો છો મોડ ઓમેગા વડે ગુણાકાર કરો તો તમે જોશો કે

તરત જ તે બીજી બાજુ બરાબર છે

તેથી અમે સીધું જ ચકાસી શકીએ છીએ કે શિરોબિંદુઓ સાથે મૂકવામાં આવેલ ત્રિકોણ એક ઓમેગા ઓમેગા ચોરસ તરીકે આપણને સમબાજુ ત્રિકોણ આપે છે હવે એકતાના ઘનમૂળના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને અમે સાબિત કરીશું.

સમભુજ ત્રિકોણની કેટલીક લાક્ષણિકતા અમે નીચે દર્શાવેલ સાબિત કરીએ છીએ કે શિરોબિંદુઓ સાથેનો ત્રિકોણ  $t$  એ  $abc$  દ્વારા સૂચવવામાં આવે છે જ્યાં  $abc$  જટિલ સંખ્યામાં હોય છે અને અમે કહીએ છીએ કે  $t$  એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે જો તે કોઈ પણ એક સ્થિતિને સંતોષે છે અન્યથા જો કોઈ એક શરત સંતુષ્ટ છે તો  $t$  એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે યાવો આપણે વાંચીએ કે આ સ્થિતિ શું છે એક વત્તા ઓમેગા ગુણ્યા  $b$  વત્તા ઓમેગા ચોરસ  $c$  સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે છે તેનો સરવાળો શૂન્ય છે અને અન્ય સમીકરણ એ ચોરસ વત્તા  $b$  વર્ગ વત્તા  $c$  વર્ગ છે જે  $ab$  વત્તા  $bc$  વત્તા બરાબર છે  $ca$  જો આ સમીકરણ સંતુષ્ટ થાય તો આપણે દાવો કરી શકીએ કે શિરોબિંદુઓ સાથે અનુરૂપ ત્રિકોણ  $abc$  તરીકે સમબાજુ ત્રિકોણ છે

તેથી યાવો આપણે પ્રયત્ન કરીએ આ પરિણામને સાબિત કરવા દો પહેલા હું સાબિત કરું કે જો  $t$  સમબાજુ ત્રિકોણ છે તો આપણે બતાવીએ છીએ કે તે આ સમીકરણને સંતોષે છે અને તે જ રીતે જો સમીકરણ સંતુષ્ટ થાય તો આપણે દાવો કરી શકીએ કે તે સમબાજુ ત્રિકોણ છે

તેથી આપણે બતાવીશું કે 1 અને 2 સમકક્ષ વિધાન 1 અને 2 છે.

સમકક્ષ વિધાનો છે

તેથી આપણને જે આપવામાં આવે છે તે ત્રિકોણ સાથે આપવામાં આવે છે જે અંગના સમતલમાં ક્યાંક મુકવામાં આવે છે અને શિરોબિંદુઓ સાથે  $abc$  હોય છે

ઓરિએન્ટેશન સાથે એ ઓરિએન્ટેશન પર ધ્યાન આપવું જરૂરી છે

હવે જ્યારે તે આપવામાં આવે છે કે તે સમભુજ છે ત્રિકોણ જે આપણે જાણીએ છીએ તે ખૂણાઓ સમાન છે શું આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે દરેક બાજુની લંબાઈ તેઓ સમાન છે હવે હું અવલોકન કરવા જઈ રહ્યો છું કે શું તે ખરેખર એવું છે કે શું હું કોઈ બીજા બિંદુ પર જઈને ત્રિકોણનો અભ્યાસ કરી શકું છું બરાબર એ જ પરિણામ શું હું આ ત્રિકોણને અન્ય કોઈ બિંદુ પર ખસેડી શકું છું અને ત્યાં સમસ્યાનું નિરાકરણ કરી શકું છું અને શું હું બરાબર પાછો આવી શકું છું જેને કુદરતી રીતે સ્થાનાંતરિત મિલકત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે જો હું આમ કરું તો અમારો દાવો શું છે? હવે પહેલા આપણે ધારીએ છીએ કે તે એક સમભુજ ત્રિકોણ છે પછી આપણે બતાવીએ છીએ કે બીજો ભાગ શું છે તે બીજો ભાગ શું છે આ એક વત્તા ઓમેગા ગુણ્યા  $b$  વત્તા ઓમેગા ચોરસ ગણો  $c$  બરાબર શૂન્ય છે આપણે આ બતાવવા માંગીએ છીએ

તેથી જો હું આ ત્રિકોણને બદલીશ મતલબ કે હું તમામ બિંદુઓમાં અમુક જટિલ સંખ્યા દ્વારા ઉમેરવા જઈ રહ્યો છું અન્યથા તમે આ ચોક્કસ ત્રિકોણના દરેક બિંદુઓ દ્વારા એક બિંદુ દ્વારા બાદબાકી કરો એટલે કે આપણે ફક્ત ધ્યાનમાં લઈએ કે યાવો કહીએ કે તમારી પાસે શિરોબિંદુઓ સાથેનો ત્રિકોણ છે કારણ કે આપણે કહીએ કે તે છે એક અલ્પવિરામ એક અને યાવો કહીએ કે આ ત્રણ અલ્પવિરામ છે એક અને યાવો આપણે કહીએ કે આ છે બે અલ્પવિરામ દોઢ અને અડધો ઠીક છે

તેથી હું શું કરી શકું તે હું એક અલ્પવિરામ દ્વારા બાદબાકી કરી શકું તો આખી વસ્તુ

મૂળ બિંદુ પર ખસેડી શકાય છે.

તમે આ ત્રિકોણના દરેક બિંદુ પર 1 અલ્પવિરામ 1 બાદ કરો એટલે કે હું અહીં

કોઈ પણ દિશા અને બાજુની લંબાઈ બદલ્યા વિના નવો ત્રિકોણ બનાવી શકું છું જેથી કોઈ પણ ભૌમિતિક ગુણધર્મ બદલ્યા વિના આપણે ફક્ત શિફ્ટ કરી શકીએ જેનો અર્થ  $w$ .

$e$  હું ફક્ત એક ત્રિકોણ લઈ શકું છું અને તેને બીજી જગ્યાએ મૂકી શકું છું ઠીક છે

તેથી હું શું જોઈ શકું છું કે જો હું શિફ્ટ કરીશ તો શું તે હજુ પણ આ સમીકરણ હશે કે શું તે અવ્યવસ્થિત હશે બરાબર કે ધારો કે સમીકરણ સંતુષ્ટ છે ધારો કે ધારો કે કોઈ સંતુષ્ટ છે ઠીક છે તો શું તે બીજા ત્રિકોણ માટે સાચું હશે જે બીજા કોઈ બિંદુ પર બદલાઈ ગયું છે ઓકે જેનો અર્થ છે કે મારો નવો બિંદુ માઈનસ  $zb$  માઈનસ  $zc$  માઈનસ  $z$  છે તેઓ એક નવો ત્રિકોણ બનાવે છે જે હમણાં જ  $z$  દ્વારા ખસેડવામાં આવ્યો હતો ઠીક છે હવે હું પૂછું છું કે શું? સમીકરણ સંતુષ્ટ થશે ફક્ત તેને આ ચોક્કસ બિંદુ માટે સમીકરણમાં શિરોબિંદુ તરીકે અવેજી કરવાનો પ્રયાસ કરો એટલે કે તે માઈનસ  $z$  વત્તા ઓમેગા ટાઈમ્સ  $b$  માઈનસ  $z$  વત્તા ઓમેગા સ્ક્વેર  $c$  માઈનસ  $z$  છે જે વત્તા ઓમેગા બી વત્તા ઓમેગા સ્ક્વેર  $c$  સમાન છે માઈનસ  $z$  એક સામાન્ય પરિબળ તરીકે વન વત્તા ઓમેગા વત્તા ઓમેગા સ્ક્વેર જે શૂન્ય છે અને એબીસી માટે સમીકરણ સંતુષ્ટ હોવાથી આપણે જોઈએ છીએ કે આ શૂન્ય છે

તેથી હવે આપણે જે અવલોકન કરીએ છીએ તે એ છે કે જો એબીસી સંતોષે છે તો તમે તેને અન્ય કોઈપણમાં બદલી શકો છો ફક્ત  $z$  વડે બાદબાકી કરીને ફરીથી મૂકો તે બીજી તરફ આ સમીકરણને સંતોષશે

તેથી તે ઊલટું છે જો આ ચોક્કસ એક શૂન્યની બરાબર સંતુષ્ટ હોય તો તમે ખરેખર બતાવી શકો છો કે એક સંતુષ્ટ છે

તેથી તે આના જેવું છે તેને બે તરીકે બોલાવો

તેથી આપણે જે અવલોકન કરીએ છીએ તે એક છે અને બે સમાન છે આ અવલોકનમાંથી આપણે શું કરવા જઈ રહ્યા છીએ તે છે કે આપણે સામાન્યતા ગુમાવ્યા વિના આપણા ત્રિકોણને મૂળ તરફ સ્થાનાંતરિત કરવા જઈ રહ્યા છીએ કારણ કે ત્રિકોણમાં સેન્ટ્રોઇડ તરીકે તેનો અર્થ એ છે કે હું જાઉં છું મારા ત્રિકોણને સ્થાનાંતરિત કરવા માટે, જેમ કે મૂળ કેન્દ્ર તરીકે જે આપણે જાણીએ છીએ કે સમભુજ ત્રિકોણની મિલકત મૂળ છે તે કહે છે કે કેન્દ્ર અને પરિઘ સમાન છે

તેથી આપણે જે જાણીએ છીએ તે છે

તેથી આપણે ખરેખર સ્થળાંતર કર્યું છે, યાવો તેને કહીએ કારણ કે તે સંકેતનો દુરુપયોગ છે પરંતુ માત્ર તે શું આ પાળી હેઠળ ગુણધર્મ અપરિવર્તનશીલ છે હું તેને ફરીથી એબીસી કહીશ સમભુજ ત્રિકોણનો  $se$  અને કારણ કે કેન્દ્ર એ છે જે આપણે જોઈએ છીએ તે એ છે કે તે સેન્ટ્રોઇડ છે તેમજ પરિપત્ર કેન્દ્ર આપણે જોઈએ છીએ કે તે આ ખૂણાને દ્વિભાજિત કરે છે આ ચોક્કસ રેખા આપણા મૂળ કોણ  $d$  ને દ્વિભાજિત કરે છે

તેથી જેનો અર્થ થાય છે કે આ 30 છે અને બીજો એક છે 30 તો બાકી 120 હશે

તેથી આ અવલોકન પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આ બાજુનો વેક્ટર જે b માઈનસ a છે જો તમે 120 અંશના ખૂણે ફેરવો તો જો તમે 120 ડિગ્રીના ખૂણે ફેરવો તો તે બાજુએ પહોંચશે જે c માઈનસ b છે

તેથી હવે આ અવલોકન આપણને આપે છે કે વાસ્તવમાં તે સમભુજ ત્રિકોણ હશે જો અને માત્ર જો મારી બાજુ c માઈનસ b ને b માઈનસ a ને 120 અંશના ખૂણે ફેરવીને હાંસલ કરવામાં આવે તો જેનો અર્થ છે કે t ત્રિકોણ ts સમભુજ છે જો અને માત્ર જો આપણે મેળવીએ પરિભ્રમણને ફેરવવાથી આપણી બાજુ c માઈનસ b એ ઓમેગા વડે ગુણાકાર કરવા સિવાય બીજું કંઈ નથી તેથી આ હવે જેવું છે જે આપણે જોઈએ છીએ કે સમીકરણને સરળ બનાવીને જે c વત્તા ઓમેગા છે અને પછી માઈનસ b વન વત્તા ઓમેગા છે આ શૂન્ય અને th ની બરાબર છે.

એ ઓમેગા બી ઓમેગા સ્કેલર વત્તા c સમાન છે આ શૂન્ય બરાબર છે હવે આપણા સમીકરણને ઓમેગા સ્કેલર વડે ગુણાકાર કરીએ તો આપણે અહીં મેળવીશું તે ઓમેગા ક્યુબ છે જે એક છે અહીં તમને ઓમેગા પાવર ફોર મળશે જે ઓમેગા છે આમ આમ આ નિષ્કર્ષ પર આવે છે કે આપણે જે પ્રથમ ટીપ્પણી હાંસલ કરવામાં સક્ષમ છીએ તે t સમભુજ ત્રિકોણ છે જો એક માત્ર જો તે આ સ્થિતિને સંતોષે તો હવે આપણે બીજાને સાબિત કરવા માંગીએ છીએ કે t સમબાજુ ત્રિકોણ છે જો અને માત્ર જો આમ એકવાર t સમભુજ છે જેનો અર્થ થાય છે તે આપમેળે આ સમીકરણને સંતુષ્ટ કરે છે

તેથી અમે ફક્ત બતાવીશું કે આ બે સમીકરણો સમકક્ષ છે

તેથી યાવો સાબિત કરીએ કે બે ત્રણના સમકક્ષ છે અથવા આપણે મૂળભૂત રીતે સમભુજ ત્રિકોણ જેવા છીએ જો અને માત્ર જો સ્થિતિ ત્રણ ફરીથી સંતુષ્ટ થાય તો જ કોઈ નોંધ કરી શકે છે કે જો શિફ્ટિંગ શિફ્ટ પ્રોપર્ટી ફરીથી ધારણ કરે છે કે જો તમે એબીસીને શિફ્ટ કરો છો જે z દ્વારા ત્રિકોણ છે

તેથી જો આ સંતુષ્ટ છે જો એક માત્ર જો b ઓછા z ચોરસ વત્તા c ઓછા z સમગ્ર ચોરસ આ એક માઈનસ z b માઈનસ z વત્તા b માઈનસ z ઉત્પાદન સાથે c માઈનસ z વત્તા c માઈનસ z પ્લસની બરાબર હશે તો હવે ફરીથી આપણે શું કરવા જઈ રહ્યા છીએ તે આપણે થોડી સગવડ કરીશું જેથી આપણું સમીકરણ ખૂબ જ સરળ લાગે.

સૌથી સરળ પસંદગી આપણે ફક્ત z ને a ની બરાબરી દ્વારા ફેરફાર કરીશું જેનો અર્થ થાય છે કે ત્રિકોણ t ને એવી રીતે ખસેડો કે શિરોબિંદુમાંથી એક શૂન્ય બરાબર છે, જેનો અર્થ થાય છે કે સામાન્યતા ગુમાવ્યા વિના આપણે હવે t ના શૂન્ય bcr શિરોબિંદુઓ ધારી શકીએ છીએ જેનો અર્થ છે કે તે સંતુષ્ટ કરે છે.

અમને જે સમીકરણ આપવામાં આવ્યું છે કે જે b ચોરસ વત્તા c ચોરસ બરાબર bc છે હવે અમારો દાવો શું છે જે અમે દાવો કરવા માંગીએ છીએ તે શું છે તે શરત બેને સંતોષવા સમાન છે મને યાદ કરવા દો શરત બે શું છે

તેથી જો શિરોબિંદુ એબીસી છે તો આ સમીકરણ સંતોષે છે હવે આપણું શિરોબિંદુ a શૂન્ય છે

તેથી જેનો અર્થ છે કે આપણે સમીકરણમાં ઘટાડો કરીએ છીએ આ તે કહેવાના સમકક્ષ છે કે ઓમેગા ટાઇમ્સ b વત્તા ઓમેગા ચોરસ c આ શૂન્યની બરાબર હોવું જોઈએ હવે પૂછો શું છે આનો મતલબ આ કહેવાની સમકક્ષ છે કે આપણે કહેવાની જરૂર છે કે અહીં ફક્ત ઓમેગા ઓ માઈનસ b બાય c દર્શાવવા માટે કે b ચોરસ વત્તા c ચોરસ બરાબર bc આ એક મજાનું એક પાંદડું છે હવે તે માઈનસ b બાય બતાવવા માટે ઉકળે છે.

c એ એકતાનું ઘનમૂળ છે હવે આ સમીકરણ તે આપણને જે આપે છે તે b બાય c વત્તા c બાય b આ એક છે આમાંથી આપણી પાસે b બાય c માટે અભિવ્યક્તિ છે આ સૂચવે છે કે b દ્વારા cs એક બાદ c બાય હવે આપણે પ્રયાસ કરી શકીએ છીએ c દ્વારા b વિશેનો દાવો એ એકતાનું ઘનમૂળ છે

તેથી આ માટે અમારો દાવો છે માઈનસ b બાય c ક્યુબ એ એક છે

તેથી આ માટે આની શરૂઆત માઈનસ b બાય c સ્કેલર સાથે છે જે b બાય c સાથે b બાય c સાથે સમાન છે પરંતુ b બાય c b દ્વારા 1 ઓછા c છે હવે નોંધ લો કે આ આપણને b દ્વારા c ઓછા 1 તરીકે મળે છે હવે ફરીથી b દ્વારા c ઓછા 1 s ઓછા c દ્વારા b પર પાછા જાઓ હવે તે સ્પષ્ટ છે કે y માઈનસ b બાય c ક્યુબ એક છે

તેથી બાદબાકી b બાય c ચોરસનો ગુણાકાર માઈનસ b વડે c સાથે વધુ ઝડપી શબ્દ આપણને તે માઈનસ c બાય b અને ગુણાંક b બાય c સાથે મળે છે જે એક છે

તેથી અમે તારણ કાઢ્યું કે એકતાના ઘનમૂળ તરીકે c બાય માઈનસ b આથી અમે બતાવવા માટે સક્ષમ છીએ કે નીચેનું સમીકરણ સંતોષે છે કે મૂળ સાથેનો ત્રિકોણ એક શિરોબિંદુ અન્ય શિરોબિંદુ બીસી તરીકે છે તે સમબાજુ ત્રિકોણ છે જો અને માત્ર જો આ બે સમીકરણો હોય સંતુષ્ટ થાય છે પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે એકવાર આ સમીકરણ સંતુષ્ટ થઈ જાય પછી ત્રિકોણ એ સમબાજુ ત્રિકોણ હોવો જોઈએ જેનો આપણે પહેલા દાવો કર્યો હતો

તેથી અમે સાબિત કર્યું કે નીચેનું નિવેદન t સમબાજુ ત્રિકોણ છે જો એક પાન પર તે કોઈપણ એક સ્થિતિને સંતોષે છે

તેથી આ વ્યાખ્યાનમાં આપણે ચર્ચા કરી.

એકતાના ઘનમૂળના ઘણા ગુણધર્મો અને અમે એકતાના ઘનમૂળના આધારે ઘણી સમસ્યાઓની ચર્ચા કરી અને અમે આગળના લેક્ચરમાં કેટલીક વધુ સમસ્યાઓની ચર્ચા કરીશું આભાર