

হ্যালো ছাত্রদের স্বাগতম জটিল সংখ্যার উপর সপ্তম বক্তৃতায় গত বক্তৃতায় আমরা ঐক্যের nতম মূল নিয়ে আলোচনা করেছি এবং তার ভিত্তিতে আমরা বেশ কয়েকটি পরিচয় প্রমাণ করেছি চলুন এই আলোচনা চালিয়ে যাই আমরা প্রমাণ করেছি যে একটি পরিচয় যা সাইন পাই n সাইন দ্বারা দুই পাই দ্বারা n সাইন n বিয়োগ এক পাই দ্বারা n মান n বাই দুই থেকে শক্তি n বিয়োগ এক দেখা যাক যে এটি কীভাবে আমাদের কিছু সমস্যা সমাধান করতে সাহায্য করে নিচের অভিব্যক্তিটির মান খুঁজে বের করুন অভিব্যক্তিটি সাইন দশ ডিগ্রি সাইন বিশ ডিগ্রি গুণফল সহ সাইন আশি ডিগ্রি পর্যন্ত আমরা এই রাশিটির গুণফল খুঁজে পেতে চাই

তাই আসুন আমরা এই রাশিটির মান খুঁজে পেতে উপরের পরিচয়টি ব্যবহার করার চেষ্টা করি যা আমরা লক্ষ্য করি কোন n মান দেওয়া হয়েছে আসুন আমরা বলি n এর সমান দুই তাহলে আমরা যা দেখি তা হল এই পর্যন্ত সাইন পাই দুই দ্বারা এবং আমি যদি n এর মান নিই তাহলে দশ বলি তারপরও বলে প্রথম মানটি হবে সাইন পাই বাই দশ যা সাইন আঠার এবং সাইন না হওয়া পর্যন্ত নয় বাই নয় পাই বাই দশ ঠিক আছে

তাই যদি আমি প্রথম টার্মটি চিহ্নিত করার চেষ্টা করি যেখানে এটি সাইন 10 ডিগ্রী দিয়ে শুরু হয় খুব স্বাভাবিকভাবেই আমি দেখতে পাই যে আমি যদি n কে 18 হিসাবে নিই তবে আমি প্রথম গুণনীয়কটি সাইনটি পেতে সক্ষম হব 10 ডিগ্রী

তাই এর মানে 18 এর সমান n দিয়ে শুরু করার চেষ্টা

করি তাহলে আমি উপরের পরিচয় থেকে অভিব্যক্তির অংশের সাথে মিলে যেতে পারব

তাই যদি আমি 18 এর সমান n বিবেচনা করি তাহলে আমি এখানে কি পাব তা হল সাইন 10 ডিগ্রি পাই বাই 18 এবং অন্যটি সাইন বিশ ডিগ্রী যা সাইন দুই বাই দুই পাই বাই আঠার এবং এটি সাইন সতেরো পাই বাই আঠার পর্যন্ত যায় যার মান হল আমাদের কাছে আঠারো বাই দুই এর শক্তি সন্তর দেখা যাক আমরা এটিকে আরও সরলীকরণ করতে পারি কিনা প্রথম পর্যবেক্ষণ হল যদি আমরা এখানে k এর মান নয়টি নিই বা এখানে নবম পদ যা এখানে বলা হয়েছে যদি আমি k এর সমান 9 নিই যেখানে আমার অভিব্যক্তিটি সাধারণ পদের উপরে sine k দ্বারা 18 আমি k নিই 9 এর সমান আমরা সাইন পাই পাই 2 দ্বারা যা 1।

সুতরাং এর অর্থ হল নবম পদ এই অভিব্যক্তিটি নবম পদের মান একটি কিন্তু অন্য পর্যবেক্ষণ হল এটি হল পর্যবেক্ষণ এক এবং দ্বিতীয় পর্যবেক্ষণ হল যদি আমরা চিহ্ন আঠারো বিয়োগ কে পাই বাই আঠার যা সাইন কে বাই আঠারোর মতই বিবেচনা করি আসলে আপনার একটি সাধারণ পর্যবেক্ষণ আছে যা সাইন এন বিয়োগ k pi দ্বারা n এটি 1 থেকে n পর্যন্ত সাইন k দ্বারা nk মানের মতই আমাদের কাছে প্রদত্ত অভিব্যক্তি রয়েছে আমাদের কাছে সাইন পাই বাই 18 সাইন দুই পাই বাই আঠার পর্যন্ত সাইন সতেরো পাই বাই আঠার যা আঠারো বাই দুই পাওয়ার সতেরো আমরা পর্যবেক্ষণ করি নবম পদ একটি এবং বাকি অন্যান্য পদগুলি এই অর্থে পুনরাবৃত্তি করার মতো যে 17 পাই বাই 18 চিহ্ন যা 18 দ্বারা সাইন পাই এর সমান

তাই আমরা সাইন স্কোয়ার 2 বাই 18 পর্যন্ত সাইন 8 পাই বাই 18 বর্গ পাই যা আমরা বলি সাধারণ শব্দটি বাতিল করতে পারেন যা নয় বাই দুই শক্তি ষোল এখন এই শব্দটি আমাদের প্রয়োজনীয় অভিব্যক্তি ছাড়া আর কিছুই নয় যা সাইন 10 ডিগ্রী সাইন 20 ডিগ্রী এবং সাইন 80 ডিগ্রী এবং পুরো বর্গ এইভাবে এবং এখন আপনি এটি নিন বর্গমূল আমরা পাই 3 বাই 2 পাওয়ার 8 একটি মান হিসাবে এখন

পরিচয়ের অনুরূপ যে সাইন পণ্যগুলি আমরা পাই n বাই দুই পাওয়ার n বিয়োগ একটি এর অনুরূপ আমরা cos টার্ম যুক্ত একটি পরিচয় পেতে পারি যা cos pi by n cos two pi by n পর্যন্ত cos m বিয়োগ এক পাই বাই n যা m এর বর্গমূল বাই দুই শক্তি m বিয়োগ এক এর সমান

তাই এখন কিভাবে এই পরিচয়টি প্রমাণ করব যদি আমি মনে করি যখন আমরা সাইন টার্ম যুক্ত পরিচয় প্রমাণ করেছিলাম যা আমরা ব্যবহার করেছি তা হল বহুপদী z থেকে শক্তি n বিয়োগ 1 পর্যন্ত এই প্লাস 1 পর্যন্ত এই বহুপদীটিকে ঐক্যের nতম মূল ব্যবহার করে ফ্যাক্টরাইজ করা হয়েছে এবং আমরা z এর মান 1 হিসাবে বিবেচনা করেছি তারপর আমরা এই রাশিটি পেয়েছি তারপর একবার আপনি এর মডুলাস মান নিলে আমরা সাইন এক্সপ্রেশন পেয়েছি এখন হিন্টাররা ব্যবহার করে এই পরিচয়ে z কে বিয়োগ 1 এর সমান বলুন

এবং অনুরূপ পদ্ধতিটি করুন

তাই যখন আপনি অনুরূপ পদ্ধতিটি করবেন যখন আপনি মাইনাস 1 বিয়োগ আলফা পাওয়ার k থেকে দূরত্ব গণনা করছেন যা 1 প্লাস আলফা পাওয়ার কে মডুলাসের মতো যেখানে আপনি কাস্ট পাবেন মেয়াদ ডানদিকে এই ইঙ্গিতটি ব্যবহার করে আপনি দেখতে পারেন যে এখানে কোসাইন যুক্ত পণ্য শব্দটি এই মান দেয় এবং যেখানে n একটি জোড় সংখ্যা যদি n বিজোড় হয় তবে আপনি এই অভিব্যক্তিটি পাবেন এবং সাইন এবং কোসাইন পরিচয়গুলিকে একত্রিত করে আপনি পরিচয়টি পেতে পারেন স্পর্শক শব্দ ঠিক আছে

তাই আমি একটি অনুশীলন হিসাবে প্রমাণটি রেখেছি এখন

আমরা 3 এর সমান বিশেষ ক্ষেত্রে n এর সাথে ঐক্যের nতম মূল নিয়ে আলোচনা করব যাকে ঐক্যের ঘনমূল বলা হয়

তাই আমরা n কে 3 হিসাবে বিবেচনা করি এবং আমরা জিজ্ঞাসা করছি সমস্ত জটিলগুলি কী সংখ্যা যার তৃতীয় শক্তি 1 আমরা জানি যে আমরা শব্দটি পাই যা একটি বলে কোণটি দুই পাই বাই তিন এবং অন্য পদটি যা চার পাই বাই তিন জটিল সংখ্যা যা এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে এই সংখ্যাগুলি ঠিক আছে

তাই একটি বিশেষ স্বরলিপি রয়েছে যা ওমেগা যাকে বলা হয় সিস টু পাই বাই থ্রি আমরা জানি কস টু পাই বাই থ্রি এবং প্লাস আই সাইন টু পাই বাই থ্রির মান কী আমরা পাই বিয়োগ হাফ প্লাস আই রুট 3 বাই 2 এবং আমরা যা দেখি তা হল পরবর্তী টার্মটি

ওমেগা স্কোয়ার ছাড়া আর কিছুই নয় যা cis 4 pi by 3 শুধুমাত্র প্রাপ্ত করা হয়েছে যেমন বলা হয়েছে 2 pi by 3 যা আমাদের ওমেগা স্কোয়ার ছাড়া আর কিছুই নয়

তাই এই স্বরলিপি ব্যবহার করে ওমেগা যা আমরা লক্ষ্য করি তা হল এক ওমেগা ওমেগা বর্গ  $n$  ঘনমূল ঐক্যের খুব সহজেই আমরা দেখতে পাচ্ছি যে ওয়ান প্লাস ওমেগা প্লাস ওমেগা স্কয়ার এর মান শূন্য কারণ আপনি এটিও লক্ষ্য করতে পারেন যে ওমেগা স্কয়ার ওমেগা কনজুগেশন ছাড়া আর কিছুই নয় এখন আপনি একবার ওমেগা ওমেগা বর্গকে যোগ করলে কাল্পনিক অংশটি বাতিল হয়ে যায় ওমেগা এর আসল অংশটি বিয়োগ অর্ধেক

তাই আপনি বাস্তব অংশের দুই গুণ পাবেন যা বিয়োগ এক

তাই যোগফল শূন্য

তাই আমরা দেখতে পাচ্ছি যে এই মন্তব্যটি এক এবং অনুরূপ বলে আমরা কি করেছি একতা ওমেগা শক্তির  $n$ ম মূলে বলুন  $n$  যেখানে 3 কোনটি আমরা এটিকে শুধু একটি ঠিক হিসাবে পাই

তাই কেউ তার শক্তি তিন বাড়াতে গণনা করতে পারে যা এখানে রয়েছে উদাহরণস্বরূপ  $\text{cis}$  দুই পাই বাই তিন ঘনক যা  $\text{cis}$  তিন মূলত গুণে যায় আর্গুমেন্টে আপনি মাত্র দুটি পাই পাবেন একটি ঠিক আছে বা আমরা এর জন্য জ্যামিতিক ব্যাখ্যাটিও দেখতে পারি আসুন আমরা একক বৃত্ত 1 বিবেচনা করি এবং ওমেগাকে 120 ডিগ্রি ঘোরানোর দ্বারা বসানো হয় এবং ওমেগা বর্গ আবার আপনি এক বিশ ডিগ্রি দ্বারা ঘোরান যা আসলে কনজুগেশন যা ওমেগা বর্গ এটি মানে ওমেগা দ্বারা গুণ করা যা এই নির্দিষ্ট ভেক্টরে 120 ডিগ্রী কোণ যোগ করার সমান এখন আপনি আরও একটি 120 ডিগ্রী যোগ করুন যা ওমেগা দ্বারা গুণ করলে আপনি একটিতে পৌঁছাবেন

তাই আমরা দেখতে পাচ্ছি যে ওমেগা কিউব এক এবং সাধারণভাবে আপনি যদি ওমেগা শক্তি বিবেচনা করেন বলুন 3 পাওয়ার  $n$  এটি ওমেগা পাওয়ার 3 পাওয়ার  $n$  এটি  $1n$  হচ্ছে যেকোন পূর্ণসংখ্যা হতে পারে

তাই পর্যবেক্ষণ হল যদি আমাদের ওমেগা পাওয়ার তিনটি গুণিতক থাকে তবে এটি এক এবং আরও একটি পর্যবেক্ষণ যা আমরা করেছি তা হল ঐক্যের ঘনমূলের সমষ্টি শূন্য হল সাধারণের মতো আমাদের একতার  $n$ তম মূল আছে আপনি যোগ করুন আপনি শূন্য পাবেন আসুন একটি সাধারণ সমস্যা করি এই অভিব্যক্তিটির মান খুঁজে বের করতে বা এমনভাবে সরলীকরণ করি যাতে এটি একটি প্লাস আইবি আকারে কমে যায় অভিব্যক্তিটি আমরা যা দেখি তা হল এই শব্দটি আমাদের ওমেগা ছাড়া আর কিছুই নয়

তাই ওমেগার বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা এটিকে সহজে সরলীকরণ করতে পারি

তাই এই শব্দটিকে বিবেচনা করুন চার প্লাস ফাইভ ওমেগা পাওয়ার তিনশত চৌত্রিশ প্লাস তিন গুণ ওমেগা পাওয়ার তিনশো পঁয়ষট্টি যেমন আমরা আগে লক্ষ্য করেছি।

এই শব্দটিকে

ওমেগা পাওয়ার 3 গুণিতক হিসাবে লেখা যেতে পারে যা 300 তেত্রিশ গুণ করে ওমেগা প্লাস দিয়ে তিনবার আবার আমরা শক্তিকে এমনভাবে বিভক্ত করতে পারি যে এক হল তিনটি গুণিতক যা তিনশত তিরিশটি এটি ওমেগা বর্গ

তাই এই পদটি একটি আবার এই ফ্যাক্টরটি একটি

তাই আমরা যা পাই তা হল চার প্লাস ফাইভ ওমেগা প্লাস থ্রি ওমেগা বর্গ এখন আবার এই সত্যটি ব্যবহার করুন যে ঐক্যের ঘনমূলের যোগফল 0 এটি থেকে আমরা পাই ওমেগা বর্গ হল মাইনাস ওমেগা বিয়োগ 1 এখন এর বিকল্প সমীকরণ আমরা পাই প্লাস ফাইভ ওমেগা এবং তারপর মাইনাস থ্রি ওমেগা মাইনাস থ্রি আমরা পাই এক প্লাস টু ওমেগা এখন শুধু দেখুন ওমেগা এর মান কত যা

বিয়োগ অর্ধেক প্লাস আই থ্রি রুট থ্রি বাই টু যা সরলীকরণ করার পর আমরা দেখতে পাই যে এখানে আমরা এখানে একটি বিয়োগ পাই এবং একটি দিয়ে বাতিল করি

তাই বাকি ফ্যাক্টরটি হল  $i$  গুণ রুট থ্রি

তাই মনে হয় যখন আমরা বলি অভিব্যক্তি ওমেগা শক্তির সাথে আসে ওমেগার বৈশিষ্ট্যগুলি ব্যবহার করে সহজেই কমাতে পারি আসুন আমরা আরও একটি সমস্যা করি এখন আমাদের দেখাতে হবে যে এই জটিল সংখ্যাটির শক্তি যা  $\mu 1$  তিন দ্বারা উত্থিত হয় তাকে দুই  $n$  যোগ 1 দিয়ে গুণ করে যা প্রতি  $n$  হওয়ার জন্য সর্বদা বিয়োগ 1 হয়।

পূর্ণসংখ্যা

তাই আসুন এই রাশিটি কি তা দেখার চেষ্টা করি প্রথমে এই এক্সপ্লেসনটি বিবেচনা করি রুট 3 প্লাস  $i$  রুট 3 বিয়োগ করে আমি সরাসরি সরলীকরণ করি যার মানে আপনি এর কনজুগেট রুট 3 প্লাস আই রুট 3 প্লাস আমি এখানে পাই যা রুট তিন প্লাস আমি পুরো বর্গকে ভাগ করলে এটি তিন যোগ এক আমরা একটি শব্দ পাই যা চারটি এখন মনে করি ওমেগা ওমেগা এর মান বিয়োগ অর্ধেক প্লাস আই রুট 3 বাই 2 এখন আমরা দেখতে পাচ্ছি যে এই অভিব্যক্তিটি প্রায় এটির কাছাকাছি রুট তিনের সমান আমরা সাধারণত  $i$  বের করতে পারি যদি আপনি  $i$  বের করেন বাইরের কোনটি  $i$  বর্গক্ষেত্র আমরা চারটি নিতে পারি বর্গ পদের ভিতরে যার মানে আমরা এখানে এক বিয়োগ দুই দ্বারা এখন এটি একই হিসাবে এটি বিয়োগ এক এবং এটি মাইনাস ওমেগা ছাড়া আর কিছুই নয় যা আমরা এটিকে ওমেগা স্কয়ার হিসাবে দেখি

তাই এখন যদি আমরা তিন গুণ রুট থ্রি প্লাস  $i$  রুট বাই রুট থ্রি মাইনাস  $i$  তিন গুণ দুই এন প্লাস ওয়ান এবং আমরা যা দেখি তা হল এখানে মাইনাস ওমেগা স্কয়ার পাওয়ার থ্রি মাল্টিপল টু এন প্লাস ওয়ান এটি হল মাইনাস ওয়ান পাওয়ার সিক্স এন প্লাস থ্রি এবং ওমেগা স্কয়ার আমরা একে লিখতে পারি ছয় পাওয়ার টু এন প্লাস ওয়ান এটি আমাদের মাইনাস ওয়ান দেয় এবং এটি আমাদের শুধুমাত্র একটি দেয় কারণ এটি তিনটির একাধিক যা সবসময় এক হয় আমরা আমাদের বিবৃতিটি যাচাই করতে সক্ষম হয়েছি আমাদের আরও একটি সমস্যা করা যাক আমরা ন্যূনতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা  $n$  খুঁজে পেতে চাই যাতে এটি এই সমীকরণটিকে সন্তুষ্ট করে

তাই বেশ কয়েকটি  $n$  এই পরিচয়কে সন্তুষ্ট করতে পারে তবে আমাদের জন্য  $n$  এর সর্বনিম্ন মান দিতে হবে যা এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট হয়

তাই এই অভিব্যক্তির মাধ্যমে আমরা সেই এক প্লাস ওমেগা স্কয়ার  $s$  বিয়োগ ওমেগা এবং ওমেগা পাওয়ার ফোর ব্যবহার করতে পারি যা শুধু বলা হয় ওমেগা কিউবকে ওমেগা দিয়ে গুণিত করে যা শুধু ওমেগা যার মানে এই অভিব্যক্তিটি আমরা 1 প্লাস ওমেগা বর্গ শক্তি হিসাবে পাই  $n - 1$  প্লাস এইভাবে সন্তুষ্ট হয় যদি এবং শুধুমাত্র যদি এটি হয় মাইনাস ওমেগা পাওয়ার  $n$  এবং এই শব্দটি হল 1 প্লাস ওমেগা যা মাইনাস ওমেগা স্কয়ার পাওয়ার  $n$  এবং এটি সন্তুষ্ট করে যদি এবং শুধুমাত্র যদি ওমেগা পাওয়ার হিসাবে ওমেগা পাওয়ার  $2n$  এইভাবে সন্তুষ্ট হয় যদি এবং শুধুমাত্র ওমেগা পাওয়ার  $n - 1$  এর সমান হলে আমরা শুধু ওমেগা পাওয়ার বাতিল করি  $n$  আমরা জিজ্ঞাসা করছি  $n$  এর সর্বনিম্ন মান কী যা এটিকে সন্তুষ্ট করে যা কেবল  $n$  হল তিনটি আসুন আমরা একটি সমস্যা নিয়ে আলোচনা করার চেষ্টা করি যা একটু ভিন্ন আমরা কী জিজ্ঞাসা করতে চাই সমস্ত জটিল সংখ্যা যা এই সমীকরণকে সন্তুষ্ট করে

তাই আমরা যে মুহুর্তে এটি দেখতে পাই যদি আমরা  $z$  এর সমান শূন্য নিই একজন সন্তুষ্ট হয় যা একটি তুচ্ছ সমাধান এখন আসুন আমরা ধরে নিই  $z$  হল অ-শূন্য এবং আমরা জিজ্ঞাসা করি যে কোন শূন্য নয়  $0$  জটিল সংখ্যা এই সমীকরণটিকে সন্তুষ্ট করে যখন এটি শূন্য হয় তখন এটিতে বিপরীত বা এমনকি  $z$  এর মডুলাস থাকে যা শূন্য নয় আমরা এই রাশি জুড়ে  $\text{mod } z$  বর্গ দ্বারা ভাগ করতে পারি

তাই আমরা  $z$  বর্গকে  $\text{mod } z$  বর্গ প্লাস  $z$  দ্বারা  $\text{mod } z$  পাই এখানে বলুন একটি মোড জেড বাতিল হয়েছে এবং আমরা একটি পেয়েছি এটি শূন্যের সমান এখন একরকম এটি এখন পরিচিত সমীকরণের কাছাকাছি চলে এসেছে যা  $z$  দ্বারা মোড  $z$  পুরো বর্গক্ষেত্র এবং আরেকটি জটিল সংখ্যা প্লাস এক সমান শূন্য যা ঠিক ওমেগা যেখানে এটি এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে তাই আসুন এখন আবার আমাদের প্রশ্ন জিজ্ঞাসা করি আমরা একটি নন-জিরো কমপ্লেক্স সংখ্যা খুঁজছি যা এই সমীকরণটিকে সন্তুষ্ট করে

তাই যদি আমি একটি সংখ্যা ওমেগাকে  $z$  হিসাবে বিবেচনা করি তাহলে ওমেগা এই সমীকরণটি পূরণ করবে এবং আমরা জানি যে দুটি আছে এই সমীকরণের অনন্য সমাধান যা একেবারে ঘনমূল ছাড়া আর কিছুই নয় যাকে আমরা ওমেগা সো এবং ওমেগা স্কয়ার বলেছি

তাই এর দুটি সমাধান রয়েছে যা  $\text{cis } 2\pi/3$  এবং বলে  $4\pi/3$  যাকে আমরা বলি মেগা এবং ওমেগা স্কয়ার এখন যদি আমরা  $z$  কে ল্যান্ডা টাইম ওমেগা হিসাবে বিবেচনা করি যেখানে ল্যান্ডা একটি তাহলে এই সমীকরণ থেকে আপনি কী পাবেন

তাই আমরা পেতে পারি আমরা মোড ল্যান্ডা দ্বারা  $z$  কে ওমেগা হিসাবে বেছে নিতে পারি এটি এই সমীকরণটিকে সন্তুষ্ট করে

তাই আমরা কেবল  $z$  এর মান রাখি মোড জেড যা ওমেগা যেখানে মোড জেডকে এখনই নির্বিচারে বেছে নেওয়া যেতে পারে তাই যার মানে জেডকে ল্যান্ডা টাইম ওমেগা হিসাবে লেখা যেতে পারে এবং অন্যরা বলে ল্যান্ডা টাইম ওমেগা স্কয়ার আর যেখানে ল্যান্ডা অ নেতিবাচক

তাই আমাদের সমাধানগুলি

তাই একটিতে আমাকে আবার পুনরাবৃত্তি করতে দিন আমাদের যা আছে প্রথমে আমরা লক্ষ্য করেছি যে শূন্যের সমান একটি সমাধান এবং তারপরে আমরা একটি শূন্য সমাধান খুঁজি যখন আমরা ধরে নিই যে  $z$  অ শূন্য আমরা আমরা  $\text{mod } z$  দ্বারা ভাগ করতে সক্ষম হই যার অর্থ আমাদের সমীকরণটি একক বৃত্তে স্কেল করা হয়েছে কারণ যাই হোক না কেন জটিল সংখ্যা যা এটিকে সন্তুষ্ট করে সমীকরণ যার মডুলাস একটি ঠিক

তাই আমরা একটি জটিল সংখ্যা খুঁজছি যা একক বৃত্তের উপর অবস্থিত এবং এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে এবং এটি একেবারে ঘনমূল ছাড়া আর কিছুই নয় এবং এটি থেকে আমরা অন্য সবগুলি অর্জন করেছি  $120^\circ$  এখন আমরা জ্যামিতিক দিক বিবেচনা করে এই জটিল সংখ্যার সুবিধা নিয়ে আলোচনা করার চেষ্টা করি যাতে একতর ঘনমূল এর একটি জ্যামিতিক ব্যাখ্যা থাকে যেটা হল যখন আমরা একক বৃত্ত নিই তখন আমরা এখানে 1 রাখি এবং  $120^\circ$  ডিগ্রি কোণে ওমেগা রাখি।

ধনাত্মক বাস্তব অক্ষ এবং অন্যান্য আপনি একই ভেক্টর দ্বারা  $120^\circ$  ডিগ্রী দ্বারা ঘোরান আমরা ওমেগা বর্গ পেতে পারি যা আমরা জানি যদি আমরা শীর্ষবিন্দুর সাথে একটি বহুভুজ স্থাপন করি কারণ এই একতর ঘনমূল এখানে তিনটি বাহু সহ বহুভুজ যা নিয়মিত ত্রিভুজ ছাড়া কিছুই নয় এখানে নিয়মিত এর মানে হল যে আমরা একটি সমবাহু ত্রিভুজ পাচ্ছি

তাই সমবাহু ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ কী তা আমরা স্বরণ করার চেষ্টা করি

তাই ত্রিভুজের সমস্ত বাহু সমান যা একটি বলে চলুন আমরা একে বলি কারণ এটি হল বাহুর দৈর্ঘ্য একটি এবং অন্য দৈর্ঘ্যটি  $b$  এবং এইভাবে যদি এটি সমবাহু হয় তবে সমস্ত বাহু সমান এবং সমস্ত কোণও সমান কেবল

তাই নয় আমরা এখানে লক্ষ্য করি যে এই সমবাহু ত্রিভুজটি সেন্ট্রায়  $d$  অর্থো কেন্দ্রের সাথে সাথে বৃত্তাকার কেন্দ্রের সাথে মিলে যায়

তাই আমরা আপাতত সমবাহু ত্রিভুজের জন্য বেশ কয়েকটি বৈশিষ্ট্য তালিকাভুক্ত করতে পারি আসুন আমরা কেবল একটি সংজ্ঞা নিই যেটি হল সমস্ত বাহু সমান এবং সমস্ত কোণ সমান তাদের যে কোনও একটি আপনি নিতে পারেন সংজ্ঞা হিসাবে এই দুটি সমতুল্য যে একটি ত্রিভুজ সমবাহু ত্রিভুজ এখন এটি যাচাই করা খুব সহজ যে আমরা এখানে যে ত্রিভুজটি পাই তা একটি সমবাহু ত্রিভুজ কেবলমাত্র বাহুর দৈর্ঘ্য বাহুগুলির দৈর্ঘ্য কী তা দেখে এটি একটি বিয়োগ ওমেগা ইউ দেখতে পাচ্ছি যে এটি ওমেগা বিয়োগ ওমেগা স্কয়ারের মতো কেন কারণ এটিকে ওমেগা হিসাবে লেখা যেতে পারে সাধারণভাবে নেওয়া যেতে পারে এবং আপনি যা পান তা হল 1 বিয়োগ ওমেগা সহ ওমেগা পণ্য এবং প্রতিটি ফ্যাক্টরের জন্য মডুলাস নেওয়া যেতে পারে মোড ওমেগা একটি

তাই আপনি পাবেন যে এটি একটি বিয়োগ ওমেগা যার অর্থ হল যে পাশে এবং এই পাশের দৈর্ঘ্য সমান একইভাবে আপনি দেখতে পাচ্ছেন যে এটিও 1 বিয়োগ ওমেগা বর্গক্ষেত্রের সমান যা আপনি কেবল করতে পারেন মোড ওমেগা দ্বারা গুণ করুন

তাহলে আপনি দেখতে পাবেন যে অবিলম্বে এটি অন্য বাহুর সমান ঠিক আছে

তাই আমরা সরাসরি যাচাই করতে পারি যে ত্রিভুজটি শীর্ষবিন্দু সহ একটি ওমেগা ওমেগা বর্গ হিসাবে স্থাপন করা আমাদের সমবাহু ত্রিভুজ দেয় এখন ঐক্যের ঘনমূলের এই বৈশিষ্ট্যটি ব্যবহার করে আমরা প্রমাণ করব সমবাহু ত্রিভুজের কিছু বৈশিষ্ট্য আমরা নিম্নলিখিত প্রমাণ করি যেটি শীর্ষবিন্দু সহ একটি ত্রিভুজ  $t$  কে  $abc$  দ্বারা চিহ্নিত করা হয় যেখানে  $abc$  জটিল সংখ্যায় থাকে এবং আমরা বলি যে  $t$  সমবাহু ত্রিভুজ যদি এটি যেকোন একটি শর্তকে সন্তুষ্ট করে অন্যথায় যদি একটি শর্ত সন্তুষ্ট তারপর  $t$  হল সমবাহু ত্রিভুজ আসুন আমরা পড়ি এই শর্তটি কী একটি প্লাস ওমেগা গুন  $b$  প্লাস ওমেগা বর্গকে  $c$  দিয়ে গুন করলে তাদের যোগফল শূন্য হয় এবং অন্য সমীকরণটি একটি বর্গ প্লাস বি বর্গ প্লাস সি বর্গ যা  $ab$  প্লাস  $bc$  প্লাসের সমান  $ca$  যদি এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট হয় তবে আমরা দাবি করতে পারি যে  $abc$  হিসাবে শীর্ষবিন্দু সহ সংশ্লিষ্ট ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ

তাই আসুন চেষ্টা করি এই ফলাফলটি প্রথমে প্রমাণ করি আমি প্রমাণ করি যে  $t$  যদি সমবাহু ত্রিভুজ হয় তবে আমরা দেখাই যে এটি এই সমীকরণটিকে সন্তুষ্ট করে এবং একইভাবে যদি সমীকরণটি সন্তুষ্ট হয় তবে আমরা দাবি করতে পারি যে এটি সমবাহু ত্রিভুজ

তাই আমরা দেখাব যে 1 এবং 2 সমান বিবৃতি 1 এবং 2 সমতুল্য বিবৃতি

তাই আমাদের যা দেওয়া হয় তা একটি ত্রিভুজ দিয়ে দেওয়া হয় যা অর্গান সমতলে কোথাও স্থাপন করা হয় যেখানে শীর্ষবিন্দুর সাথে  $abc$  থাকে ওরিয়েন্টেশনের সাথে স্থিতিবিন্যাসটি এখনই লক্ষ্য করা দরকার যখন এটি দেওয়া হয় যে এটি সমবাহু।

ত্রিভুজ যা আমরা জানি কোণগুলি সমান কি আমরা এটাও দেখতে পাচ্ছি যে প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য তারা সমান এখন আমি পর্যবেক্ষণ করতে যাচ্ছি যে এটি কি সত্যিই এমন একটি মত যা আমি কি অন্য কোন বিন্দুতে স্থানান্তর করে ত্রিভুজ অধ্যয়ন করতে পারি ঠিক একই ফলাফল আমি কি এই ত্রিভুজটিকে অন্য কোন বিন্দুতে স্থানান্তর করতে পারি এবং সেখানে সমস্যাটি সমাধান করতে পারি এবং আমি কি ঠিক আছে ফিরে আসতে পারি যা স্বাভাবিকভাবেই স্থানান্তরিত সম্পত্তি হিসাবে বলা হয় যদি আমি

তাই আমাদের দাবি কি? এখন প্রথমে আমরা অনুমান করি যে এটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ তারপর আমরা দেখাই যে দ্বিতীয় অংশটি দ্বিতীয় অংশটি কী এটি একটি প্লাস ওমেগা টাইমস বি প্লাস ওমেগা ক্লয়ার গুন সি শূন্যের সমান আমরা এটি দেখাতে চাই

তাই যদি আমি এই ত্রিভুজটি পরিবর্তন করি এর মানে হল যে আমি সমস্ত বিন্দুতে কিছু জটিল সংখ্যা যোগ করতে যাচ্ছি অন্যথায় আপনি এই নির্দিষ্ট ত্রিভুজের প্রতিটি বিন্দু দ্বারা একটি বিন্দু দ্বারা বিয়োগ করবেন যার অর্থ আমাদের কেবল বিবেচনা করা যাক যে আপনার কাছে শীর্ষবিন্দু সহ একটি ত্রিভুজ আছে

যেমন আমরা বলি যে এটি এখানে এক কমা এক এবং বলি এটি তিনটি কমা এক এবং আমরা বলি এটি হল দুটি কমা এক এবং অর্ধেক ঠিক আছে

তাই আমি যা করতে পারি তা হল আমি একটি কমা দিয়ে বিয়োগ করতে পারি তাহলে পুরো জিনিসটি

মূল বিন্দুতে স্থানান্তরিত হতে পারে ঠিক আছে

তাই আপনি এই ত্রিভুজের প্রতিটি বিন্দুতে 1 কমা 1 বিয়োগ করুন, যার মানে আমি এখানে একটি নতুন ত্রিভুজ তৈরি করতে পারি

কোনো অভিযোজন পরিবর্তন না করে এবং পাশাপাশি পাশের দৈর্ঘ্যও

তাই কোনো জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্য পরিবর্তন না করেই আমরা কেবল স্থানান্তর করতে পারি যার অর্থ  $w$   $e$  শুধু একটি ত্রিভুজ নিয়ে এটিকে অন্য জায়গায় স্থাপন করতে পারি ঠিক আছে

তাই আমি যা দেখতে পাচ্ছি তা হল আমি যদি স্থানান্তর করি তবে এটি কি এখনও এই সমীকরণটি থাকবে এটি অপরিবর্তনীয় হবে কিনা ঠিক আছে যে ধরুন সমীকরণটি সন্তুষ্ট, ধরুন ধরুন একজন সন্তুষ্ট ঠিক আছে তাহলে এটা কি অন্য কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সত্য হবে যা অন্য কোনো বিন্দুতে প্রতিস্থাপিত হয়েছে ঠিক আছে যার মানে আমার নতুন বিন্দু একটি বিয়োগ  $zb$  বিয়োগ  $zc$  বিয়োগ  $z$  তারা একটি নতুন ত্রিভুজ তৈরি করেছে যা  $z$  দ্বারা স্থানান্তরিত হয়েছে ঠিক আছে এখন আমি জিজ্ঞাসা করছি কিনা সমীকরণটি সন্তুষ্ট হবে শুধু এই নির্দিষ্ট বিন্দুর জন্য সমীকরণে এটিকে শীর্ষবিন্দু হিসাবে প্রতিস্থাপন করার চেষ্টা করুন যাতে এটি একটি বিয়োগ জেড প্লাস ওমেগা টাইমস বি বিয়োগ জেড প্লাস ওমেগা বর্গ সি বিয়োগ জেড যা প্লাস ওমেগা বি প্লাস ওমেগা বর্গ সি এর সমান বিয়োগ  $z$  একটি সাধারণ ফ্যাক্টর হিসাবে এক প্লাস ওমেগা প্লাস ওমেগা বর্গ যা শূন্য এবং যেহেতু এবিসির জন্য সমীকরণটি সন্তুষ্ট আমরা দেখতে পাচ্ছি যে এটি শূন্য

তাই এখন আমরা যা লক্ষ্য করি তা হল যদি  $abc$  একটি সন্তুষ্ট করে তবে আপনি এটিকে অন্য যে কোনওটিতে স্থানান্তর করতে পারেন শুধুমাত্র  $z$  দ্বারা বিয়োগ করে আবার স্থান দিন এটি অন্য দিকে এই সমীকরণটিকে সন্তুষ্ট করবে

তাই এটি একটি বিপরীত, যদি এই নির্দিষ্টটি শূন্যের সমান সন্তুষ্ট হয় তবে আপনি আসলে দেখাতে পারেন যে একজন সন্তুষ্ট

তাই এটিকে দুই হিসাবে বলা হয়

তাই আমরা যা পর্যবেক্ষণ করি তা হল এক এবং দুটি সমতুল্য ঠিক আছে এই পর্যবেক্ষণ থেকে আমরা যা করতে যাচ্ছি তা হল আমরা সাধারণতার ক্ষতি ছাড়াই করতে যাচ্ছি আমরা আমাদের ত্রিভুজটিকে একটি উৎপত্তিস্থলে স্থানান্তর করতে যাচ্ছি কারণ ত্রিভুজের সেন্ট্রয়েড এর অর্থ হল আমি যাচ্ছি আমার ত্রিভুজকে স্থানান্তরিত করার জন্য এমন যে কেন্দ্রিক হিসাবে উৎপত্তি যা আমরা জানি সমবাহু ত্রিভুজের সম্পত্তি হল উৎপত্তি বলতে সেন্ট্রয়েড এবং বৃত্তকেন্দ্র সমান

তাই আমরা যা জানি

তাই আমরা আসলে স্থানান্তরিত হয়েছি এটিকে বলা যাক এটি একটি স্বরলিপি অপব্যবহার কিন্তু শুধু এটি একটি সম্পত্তি এই শিফটের অধীনে অপরিবর্তনীয় আমি এটিকে আবার বলি এটি এখন  $abc$  যা আমরা এই প্রতিটি শীর্ষবিন্দুর মধ্যে কোণ

পর্যবেক্ষণ করি যা 120 করে কারণ এই কোণটি 60 তারা সমান কোণ কারণ সমবাহু ত্রিভুজের se এবং যেহেতু কেন্দ্রটি আমরা দেখতে পাই তা হল এটি কেন্দ্রিক এবং সেইসাথে বৃত্তের কেন্দ্রটি আমরা দেখতে পাই যে এটি এই কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত করে এই নির্দিষ্ট রেখাটি আমাদের মূল কোণটিকে দ্বিখণ্ডিত করে

তাই এর মানে হল এটি 30 এবং অন্যটি হল 30

তাই অবশিষ্ট থাকবে 120 সুতরাং এই পর্যবেক্ষণ থেকে আমরা যা দেখতে পাচ্ছি তা হল এই পার্শ্ব ভেক্টর যা b বিয়োগ a যদি আপনি 120 ডিগ্রি কোণে ঘোরেন

তাই আপনি যদি 120 ডিগ্রি কোণে ঘোরেন তবে এটি সেই দিকে পৌঁছে যাবে যা c বিয়োগ b

তাই এখন এই পর্যবেক্ষণটি আমাদের দেয় যে প্রকৃতপক্ষে এটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি আমার বাহুর c বিয়োগ b 120 ডিগ্রী কোণ দ্বারা b বিয়োগ a ঘূর্ণনের মাধ্যমে অর্জন করা হয়, যার মানে t হল ত্রিভুজ ts সমবাহু যদি এবং শুধুমাত্র যদি আমরা পাই ঘূর্ণন ঘূর্ণন দ্বারা আমাদের সাইড c বিয়োগ বি

ওমেগা দ্বারা গুণ করা ছাড়া আর কিছুই নয় সুতরাং এটি এখন যেমন আমরা দেখতে পাচ্ছি যে সমীকরণটি সরল করে যা c প্লাস এ ওমেগা এবং তারপর বি ওয়ান প্লাস ওমেগা এটি শূন্য এবং ম এর সমান এটি একটি ওমেগা বি ওমেগা বর্গ প্লাস সি এর সমান এটি এখন শূন্যের সমান আমাদের সমীকরণটি ওমেগা স্কোয়ার দিয়ে গুণ করলে আমরা এখানে পাই এটি ওমেগা কিউব এটি একটি এখানে আপনি ওমেগা পাওয়ার ফোর পাবেন যা ওমেগা

তাই এইভাবে উপসংহারে পৌঁছেছেন যে প্রথম মন্তব্যটি আমরা অর্জন করতে সক্ষম যে টি হল সমবাহু ত্রিভুজ যদি একটি শুধুমাত্র যদি এই শর্তটি সন্তুষ্ট করে তবে এখন আমরা অন্যটিকে প্রমাণ করতে চাই যেটি হল টি সমবাহু ত্রিভুজ যদি এবং শুধুমাত্র যদি এইভাবে একবার t সমবাহু হয় যার মানে এটি স্বয়ংক্রিয়ভাবে এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে

তাই আমরা শুধু দেখাব যে এই দুটি সমীকরণ সমান

তাই আসুন প্রমাণ করি যে দুটি তিনটির সমান বা আমরা মূলত সমবাহু ত্রিভুজের মতো যা এবং শুধুমাত্র যদি শর্ত তিনটি আবার সন্তুষ্ট হয় তবে কেউ লক্ষ্য করতে পারে যে যদি vertices আবার স্থানান্তরিত স্থানান্তর বৈশিষ্ট্য আবার ধারণ করে যে আপনি যদি abc স্থানান্তর করেন যেটি z দ্বারা একটি ত্রিভুজ

তাই যদি এটি সন্তুষ্ট হয় শুধুমাত্র যদি b বিয়োগ z বর্গ প্লাস c বিয়োগ z পুরো বর্গক্ষেত্র এটি হবে একটি বিয়োগ zb

বিয়োগ z প্লাস বি বিয়োগ z পণ্যের সাথে c বিয়োগ z প্লাস c বিয়োগ z প্লাস

তাই এখন আবার আমরা যা করতে যাচ্ছি তা হল আমরা একটি সামান্য সুবিধা করতে যাচ্ছি যাতে আমাদের সমীকরণটি খুব সহজ দেখায় সবচেয়ে সহজ পছন্দ আমরা শুধু z এর সমান পরিবর্তন করব যার অর্থ হল ত্রিভুজ t কে এমনভাবে স্থানান্তর করা যাতে শীর্ষবিন্দুর একটিকে শূন্য ঠিক থাকে যার মানে সাধারণতা না হারিয়ে আমরা এখন t এর শূন্য বিসিআর শীর্ষবিন্দু ধরে নিতে পারি যার মানে এটিকে সন্তুষ্ট করে সমীকরণ যা আমাদের দেওয়া হয়েছে যেটি b বর্গ প্লাস c বর্গ সমান bc এখন আমাদের দাবি কী দাবি আমরা দাবি করতে চাই এটি হল

শর্ত দুটি সন্তুষ্ট করার সমতুল্য আমাকে স্মরণ করিয়ে দেই শর্ত দুটি কী

তাই যদি শীর্ষবিন্দু তাহলে এবিসি হলে এই সমীকরণটি এখন সন্তুষ্ট হয় আমাদের শীর্ষবিন্দু a শূন্য, যার মানে আমরা সমীকরণটি কমিয়ে ফেলি এটি বলার সমতুল্য যে ওমেগা টাইমস বি প্লাস ওমেগা বর্গ সি এটি অবশ্যই শূন্যের সমান হবে এখন জিজ্ঞাসা করুন কী? এর মানে এটা বলার সমতুল্য যে আমাদের বলতে হবে যে এখানে শুধু পর্যবেক্ষণ করুন যে ওমেগা s বিয়োগ b দ্বারা c দেখানোর জন্য যে b বর্গ প্লাস c বর্গ সমান bc এটি একটি মজার একটি পাতা এখন এটি ফুটিয়েছে যে বি বিয়োগ দেখানোর জন্য c হল একতার ঘনমূল এখন এই সমীকরণটি আমাদের যা দেয় তা হল b দ্বারা c যোগ c দ্বারা b এই থেকে একটি আমাদের কাছে b দ্বারা c এর জন্য একটি অভিব্যক্তি রয়েছে এটি বোঝায় যে b দ্বারা cs এক বিয়োগ c এখন আমরা চেষ্টা করতে পারি c দ্বারা b সম্পর্কে দাবি হল একতার ঘনমূল

তাই এর জন্য আমাদের দাবি হল বি বিয়োগ c দ্বারা c কিউব এক

তাই এই জন্য শুরুতে বি বিয়োগ c দ্বারা c বর্গক্ষেত্র যা b দ্বারা c গুণফলের সাথে b দ্বারা c কিন্তু b দ্বারা c 1 বিয়োগ c দ্বারা b এখন লক্ষ্য করুন যে আমরা এটিকে b দ্বারা c বিয়োগ 1 হিসাবে পেয়েছি এখন আবার b দ্বারা c বিয়োগ 1 s বিয়োগ c দ্বারা b তে ফিরে যান এখন এটা পরিষ্কার যে y বিয়োগ b দ্বারা c কিউব একটি

তাই বিয়োগ b দ্বারা c বর্গক্ষেত্রে বিয়োগ b এর সাথে c দ্বারা গুণ করলে দ্রুত শব্দটি আমরা পেয়েছিলাম বিয়োগ c দ্বারা b এবং বিয়োগ b এর সাথে c দ্বারা গুণফল যা একটি

তাই আমরা উপসংহারে পৌঁছেছি যে বি বিয়োগ c দ্বারা একতার ঘনমূল হিসাবে

তাই আমরা দেখতে সক্ষম যে নিম্নলিখিত সমীকরণটি সন্তুষ্ট করে যে ত্রিভুজটি একটি শীর্ষবিন্দু অন্য শীর্ষবিন্দু হিসাবে উৎপত্তি সহ ত্রিভুজ এটি সমবাহু ত্রিভুজ যদি এবং শুধুমাত্র যদি এই দুটি সমীকরণ হয় সন্তুষ্ট কিন্তু আমরা জানি যে একবার এই সমীকরণটি সন্তুষ্ট হলে ত্রিভুজটি অবশ্যই সমবাহু ত্রিভুজ হতে হবে যা আমরা আগে দাবি করেছিলাম

তাই আমরা প্রমাণ করেছি যে নিম্নলিখিত দাবিটি সমবাহু ত্রিভুজ যদি একটি পাতায় এটি যেকোন একটি শর্তকে সন্তুষ্ট করে তাই এই বক্তৃতায় আমরা আলোচনা করেছি ঐক্যের ঘনমূলের বেশ কয়েকটি বৈশিষ্ট্য এবং আমরা ঐক্যের ঘনমূলের উপর ভিত্তি করে বেশ কয়েকটি সমস্যা

নিয়ে আলোচনা করেছি এবং আমরা পরবর্তী লেকচারে আরও কিছু সমস্যা নিয়ে আলোচনা করব ধন্যবাদ।