ہیلو طلباء کو پیچیدہ نمبروں پر لیکچرز میں خوش آمدید پچھلے لیکچر میں ہم نے اتحاد کی نویں جڑ پر بحث کی تھی اور اس کی بنیاد پر ہم نے کئی شناختیں ثابت کی ہیں آئیے اس بحث کو جاری رکھیں
کے برابر 1 سے مطمئن کرتا ہے اور جو ہم نے n کو طاقت z تو مجھے اتحاد کی نویں جڑ یاد کرنے دیں یہ ایک پیچیدہ ہے۔ عدد جو مساوات
cos کی k pi دیا گیا ہے جو کہ zk 2 الگ الگ کمپلیکس نمبرز ہیں جن کا نام n پچھلی کلاسوں میں دکھایا اس مساوات کو پورا کرنے والے
n plus i sine 2 کچھ بھی نہیں ہے zk مائنس 1 تک ہے اور ہم نے دیکھا کہ یہ n سے nk 0 1 بذریعہ k pi سے دیا گیا ہے۔
k کی طاقت z 1 مگر
اب اس کی pi by n جمع i sine two کا cos ہے۔ pi by n ایک ہے جو دو z کو ایک کے برابر سمجھتے ہیں جو کہ k تو آپ
متعارف کرائیں گے جس کی تعریف cis theta ویں جڑ پیدا کرتی ہے اور سہولت کے لیے ہم نوٹیشنn لیں جو اتحاد کی دوسری k طاقت
موریس قانون کے ذریعے لیتے ہیں۔ d کو صرف k کے طور پر کی گئی ہے اور اگر ہم اس کی طاقت cos theta plus i sin theta
تھیٹا ہے اور آئیے ہم کچھ ریمارکس کرتے ہیں کہ ہم کیا مشاہدہ کرتے ہیں اگر ہم کہتے ہیں کہ پوٹ الفا k کے طور پر آتا ہے۔ c دیکھیں کہ یہ
کی طاقت کو بڑھاتے ہیں n ہے اگر ہم الفا کے لیے cis 2 pi by n کے طور پر جو کہ z 1 کو
ٹو پائی جو کچھ نہیں cis مندرجہ بالا قاعدہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ cis 2 pi by n power n by تو ہمیں جو حاصل ہوتا ہے وہ ہے
کو بڑھاتے ہیں kn جو کہ ایک ہے اور اگر ہم پاور الفا پاور cos two pi plus i sin two pi ہے سوائے
k لکھا جا سکتا ہے اور اوپر کے مشاہدے سے یہ صفر سے زیادہ یا برابر کے لیے ایک ہے اسی طرح n پر الفا پاور k تو اسے پوری پاور
پر غور کریں اور کوئی اس بات کی تصدیق کر سکتا n اور پاور k صفر سے کم کے لیے اگر ہم الفا پاور k منفی قدر کا مشاہدہ کر سکتا ہے کہ
کے الفا پاور ملٹپلز پر غور n کی طرح ہے۔ ایک بار پھر ایک ہے لہذا اصول کا خلاصہ یہ ہے کہ اگر ہم k پاور n ہے کہ یہ دوبارہ الفا پاور
کے لیے ایک ہے انٹیجر سے تعلق رکھتا ہے اور دوسرا تبصرہ آئیے ہم اتحاد کی ان نویں جڑ کو لکھیں جنہیں الفا پاور k ہے یہ تمام kn کریں جو
ویں جڑیں جس کا مطلب ہے کہ یہ مطمئن کرتا ہےn مائنس ون تک اتحاد کی ہماری n کے ساتھ صفر سے k کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔
k کو مطمئن کرتا ہے ہمیں ایک دے گا جو کہ یہ کہنا کہ الفا پاور z کی مساوات n طاقت k لہذا یہ کسی بھی الفا پاور کو مطمئن کرتا ہے
کے لیے ہے n مائنس ون تک جو ہم جانتے ہیں وہ کسی بھی دیے گئے n مائنس ایک کے لیے صفر ایک سے n پاور z کثیر نام کی جڑ ہے
مائنس 1 z مائنس ون پر غور کریں اس کو n کو پاور z ہمیشہ اس کثیرالاضلاع کے لیے جڑ ہوتی ہے جسے آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے
مائنس 2۔ لہذا آسان حساب سے ہم اس بات کی n سے پاور z مائنس 1 پلس n سے پاور z پروڈکٹ کے طور پر فیکٹرائز کیا جا سکتا ہے اور
مائنس 1 ہے وہی ہے جو ان دو عوامل کی پیداوار کے لحاظ سے لکھنا ہے کیونکہ n پاور z تصدیق کر سکتے ہیں کہ بائیں ہاتھ کی طرف جو کہ
z مائنس 1 ڈگری پولنومیل ہے n ایک کے برابر ہے اس کے لیے جڑ ہے۔ کثیر الجہتی ہم نے اصطلاح کو فیکٹر کیا ہے اور باقی فیکٹرز جو کہ
k مائنس ون تک اس کثیر الثانی کی جڑ ہوگی جو کہ دوسرے مشاہدے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ الفا پاور n سے k سے k اس کے لیے الفا
zn مائنس 1 پلس zn مائنس 2 پلس z مائنس ون کی جڑ ہے k کے لیے ایک دو سے n مائنس ون تک
مائنس الفا z جمع 1 لکھ سکتے ہیں جیسا کہ z مائنس 2 جمع n پاور z مائنس 1 پلس n کی طاقت z تو اس کا مطلب ہے کہ ہم کثیر الجہتی
z مائنس ون n مائنس الفا پاور z مائنس الفا اسکوائر اور اسی طرح
تو اگر میں ایک مختصر اشارے میں لکھوں
پلس 1 اس کثیر الجہتی کو z مائنس 2 تک اس جمع تک n پاور z مائنس 1 پلس n تو ہمیں کیا نظر آتا ہے کہ عنصر یا کثیر الاضلاع طاقت
n ویں جڑ کا استعمال کرتے ہوئے اور مساوات کو آسانی سے استدلال کیا جاتا ہے کیونکہn کی k فیکٹرائز کیا جا سکتا ہے کیونکہ یونٹس پاور
مائنس 1 جڑیں ہیں ہم نے پہلے ہی n مائنس ون جڑیں ہو سکتی ہیں اور جو ہم نے مشاہدہ کیا ہے وہ n مائنس ون ڈگری کثیر میں زیادہ سے زیادہ
ویں جڑ ہے لہذا اس کثیر کو اس شکل میں فیکٹرائز کیا جا سکتا ہے اس ریمارک کےn مشاہدہ کیا ہے کہ ان کثیر الاضلاع کی جڑیں اتحاد کی الگ
حقیقی اعداد ہیں جیسے b اور a تلاش کریں جہاں b ساتھ آئیے ایک سادہ مسئلے کی طرف چلتے ہیں ترتیب شدہ جوڑوں کی تعداد کو ایک کوما
کے برابر ہے لہذا ہم سے کہا جاتا ہے کہ ممکنہ a plus ib power 2016 a minus ib اس مساوات کو مطمئن کرتا ہے i t کہ
دیا گیا ہے اور b حقیقی اعداد تلاش کریں جیسے کہ یہ اس مساوات کو پورا کرتا ہے جیسے ہم جانتے ہیں کہ ترتیب شدہ جوڑا ایک کوما b کوما
کو منفرد طور پر جوڑ سکتے ہیں جس کا ib دیا گیا ہے۔ حقیقی نمبروں کی مصنوعہ ہم ایک پیچیدہ نمبر ایک جمع b دو کارٹیشین میں کوما r
مطلب ہے کہ ترتیب شدہ جوڑے کو تلاش کرنا جو اس مساوات کو پورا کرتا ہے جو اس تعلق کی وجہ سے اس مساوات کو مطمئن کرنے والے
کے لیے ہے جس کی طاقت z سمجھیں اور ہم تلاش کر رہے ہیں۔ تمام کمپلیکس نمبر ib کو جمع z پیچیدہ نمبر کو تلاش کرنے کے مترادف ہے لہذا
بار دے، لہذا اگر ہم اس مساوات کو پورا کرنے والے تمام پیچیدہ نمبروں کے سیٹ کے لیے اس مساوات کو مساوی طور پر حل z ہمیں 2016 کرتے ہیں
سے جوڑ سکتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتا ہے b تو ہم ترتیب شدہ جوڑوں کو ایک کوما
تو آئیے اس مساوات سے اس مساوات کو حل کریں۔ مشاہدہ یہ ہے کہ اگر ہم ماڈیولس کو لاگو کرتے ہیں
جیسا ہی ہے جس کا مطلب ہے mod z بار کے ماڈیولس کے برابر ہونا چاہیے جو کہ z تو ہم دیکھتے ہیں کہ 2016 کا ماڈیولس t hat
mod z بائیں ہاتھ کی طرف لائیں
ہے یہ 0 کے برابر ہونا چاہیے لہذا ہم جو بحث کر رہے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر کوئی پیچیدہ نمبر اس مساوات mod z تو ہمارے پاس 2016 مائنس کو پورا کرتا ہے
پروڈکٹ موڈ زیڈ پاور 2015 مائنس 1 اس تعلق سے 0 کے برابر ہونا mod z تو اسے اس تعلق کو پورا کرنا چاہیے اس کا مطلب یہ ہے کہ چاہئے ہم دیکھتے ہیں کہ یا
تو موڈ زیڈ صفر ہونا چاہئے یا موڈ زیڈ پاور دو ہزار پندرہ ایک کے برابر ہونا چاہئے لہذا ہمیں یا
صفر کے برابر ہے mod z کے برابر ہونا چاہئے۔ پاور دو ہزار پندرہ ایک کے برابر ہونا چاہیے اگر z موڈ r تو موڈ زیڈ صفر
صفر ہے z تو اس کا مطلب ہے کہ
غیر صفر ہے z تو آئیے غور کریں کہ اگر
ایک کے برابر ہونا چاہیے۔ کیوں کہ اگر موڈز ایٹ پاور mod z پاور 2015 ایک ہونا چاہیے اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ mod z تو
ایک ہے اور فرض کریں کہ موڈ زیڈ ایک سے کم ہے 2015
تو فوراً آپ کو بتاتا ہے کہ ایک سے کم یا ایک سے زیادہ آپ فوراً دیکھیں گے کہ موڈ زیڈ پاور دو ہزار پندرہ ایک کے برابر نہیں ہو سکتا
کا ایک ہونا ضروری ہے اگر اس کی طاقت ایک ہے mmedialy mod z تو اس دلیل سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ میں
تو اس نتیجے سے
ایک کے برابر ہے mod z کے معاملے پر غور کریں ایک کے برابر اگر mods تو اب
بار z بار میں جو کہ z میں z مربع کو mod z بار لکھ سکتے ہیں۔ z مربع دوبارہ ایک ہے اور یہ ہمیں فوراً بتائے گا کہ ہم mod z تو
دیا جاتا ہے اب اس معاملے کے تحت ہم دیکھتے ہیں کہ ہم ایک سے مساوات پر واپس جاتے ہیں ہمارے پیچیدہ نمبر z کی طرح ہے ایک ایک کرکے

ایک کے برابر ہے mod z بار کو پورا کرنا چاہئے اب ہم اس صورت میں ہیں اگر z کو اس
کے ایک کے z بار کچھ نہیں ہے سوائے z تو
کی طاقت دو ہزار سترہ ایک ہے اور ہم جانتے ہیں کہ اس مساوات کے تمام ممکنہ حل کیا ہیں یہ اتحاد کی نویں جڑ z تو اس کا مطلب یہ ہے کہ
ہے۔ n 2017 کے علاوہ کچھ نہیں ہے جہاں .
کو صفر کے برابر z تو اس کا مطلب یہ ہے کہ مساوات دو مساوات دو بطور دو ہزار ستر الگ الگ غیر صفر حل اور ہم نے مشاہدہ کیا کہ اگر آپ
سمجھتے ہیں
صفر کے برابر بھی ایک نتیجہ کے طور پر حل 1 ہے۔ مساوات 1 اے z تو اس مساوات کو بھی پورا کرتا ہے لہذا اس کا مطلب ہے کہ s
کے طور پر zk کے الگ الگ حل آئیے اتحاد کی نویں جڑ کے لیے ایک اچھی خاصیت دیکھتے ہیں اتحاد کی نویں جڑ پر غور کریں جیسے 2018
مائنس ون ہے اب طاق n صفر سے k جہاں cis two k pi by n لکھا گیا ہے
یا 0 ہمیں n مائنس 1 تک پھر ہمیں قدر ملتی ہے n سمٹ صفر سے m ویں جڑ بذریعہn توں کو بڑھانے کے ساتھ رقم پر غور کریں۔ اکائیوں کی
zk تقسیم کرتا ہے ورنہ ہم رقم کی قدر حاصل کرتے ہیں 0 آئیے ہم اس تجویز کو m کو n کا ضرب ہے جو کہ m n ملتی ہے اگر قوت n
اور n بذریعہ pi کہتا ہے s 2 کے طور پر لکھ سکتے ہیں جہاں الفا k ثابت کریں جیسا کہ ہم نے پہلے ذکر کیا ہے ہم اسے صرف الفا پاور
کے برابر ہے صفر k جو کہ m پاور kzk پر غور کریں۔ پاور k کے مجموعہ z مائنس 1 n مائنس ون ہے اب 0 سے n صفر سے k
کے برابر ہے اب یہ ایک k تک سمیشن m مائنس 1 الفا پاور n ہے اور یہ 0 سے m اور پاور k کی جگہ الفا پاور zk مائنس ون n سے
مقررہ نمبر ہے اٹھائی ہوئی طاقت کے ساتھ اب رقم کچھ نہیں بلکہ ہندسی رقم ہم ہے۔ رقم کی قدر کو آسانی سے تلاش کرنے کا طریقہ جانتے ہیں
کے برابر جوڑ دوں گا k شاید صرف ایک تبصرہ کے طور پر میں صرف اس ہندسی رقم کا مجموعہ
مائنس ون کو n کی رقم ہے پاور k کی طاقت a مائنس 1 تک کہتے ہیں کہ ہمارے پاس n تو آئیے ہم صرف ہندسی جمع کو یاد کرتے ہیں آئیے
کے برابر نہیں ہونا چاہئے لہذا ہم آسانی سے اخذ کر سکتے ہیں کہ رقم کی قیمت تھی ok کا ایک a ایک مائنس ون سے تقسیم کیا جاتا ہے جہاں
ہے لہذا ہمیں الفا پاور ملی m ہے یہاں فکسڈ ویلیو الفا پاور a اس طرح ہم اسے یہاں لاگو کرسکتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ رقم کی قدر یہاں
مائنس ون اب مجھے اگلے صفحے کے سمیشن میں اسی رقم کی قیمت لکھنے دو m مائنس 1 کو تقسیم کرکے الفا پاور n ہے اس کی طاقت
مائنس ون کے طور پر پایا کہ الفا پاور m مائنس ون کے طور پر تقسیم کیا الفا پاور m power n اس کی قدر ہم نے اسے الفا پاور power m
سے تقسیم ہو m n ok ایک کے برابر ہوگی اگر m
کو تقسیم کرتا nn m کے برابر نہیں ہے اور مساوات اس وقت ہوتی ہے جب m 1 تو جس کا مطلب ہے کہ یہ فارمولا درست ہے اگر الفا پاور
ہے
ایک اور اوپر m کا ضرب نہیں ہے اس صورت میں ہم جانتے ہیں کہ الفا پاور m n کو تقسیم نہیں کرتا ہے جس کا مطلب ہے کہ n m تو اگر
n ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں یہ اصطلاح الفا پاور power m k پاور z مائنس ون n برابر صفر سے k والے کے برابر نہیں ہے لہذا اظہار
کی قدر ایک ہے n مائنس ون سے تقسیم کیا گیا ہے اور نوٹ کریں کہ الفا پاور m مائنس ون کی طرح ہے جیسے الفا پاور m پاور
کو n m تقسیم کریں جس کا مطلب ہے کہ ہمیں صفر ملتا ہے اگر m نہیں ہوتا ہے۔ n تو یہ صفر ہو جاتا ہے اور یہ غیر صفر مقدار ہے جب
k 0 کے کچھ ملٹیپل سے دیا جاتا ہے اس صورت میں n کو m کو تقسیم کرتا ہے جس کا مطلب ہے کہ n m تقسیم نہیں کرتا ہے فرض کریں
ویںn ہے اور ہم نے پہلے ہی دیکھا ہے کہ اتحاد کی qn جو m تک ہمیں طاقت بڑھانے کی ضرورت ہے k کی طاقت z مائنس n 1 سے
ہے اور ہم kq کے طور پر بھی دوبارہ لکھا جا سکتا ہے اور یہاں یہ k کی طاقت کا ملٹیپل ہمیشہ ایک رہے گا لہذا اسے الفا پاور n جڑ اس کی
کا الٹی n ہے۔ m m ہے اگر n بڑھائیں یہ دوبارہ ایک ہے رقم کی قدر kq آسانی سے دیکھتے ہیں کہ یہ اصطلاح ایک ہے اور اگر آپ پاور
پلٹ
کی جڑوں کا خلاصہ کریں n اسے تمام m ویں جڑ کو طاقت پر غور کریںn تو ہم نے اپنی تجویز کو ثابت کر دیا ہے کہ اگر آپ اتحاد کی
قدر کے ساتھ خاص طور پر ایک a m کا ضرب ہو بصورت دیگر ہمیں 0 ملتا ہے آئیے دیکھتے ہیں m n بشرطیکہ n تو آپ کو قدر ملے گی
ایک سے بڑا ہے n قدر کو ایک کے طور پر سمجھیں یقینی طور پر اگر m خاص طور پر
کو 1 سمجھا جاتا ہے ہمیں ملتا ہے m ہے جہاں k پاور z مائنس n 1 سے صفر سے k کو تقسیم نہیں کرتا ہے لہذا رقم کی قدر m تو یہ
ایک سے بڑی ہے n رقم کی قدر بطور 0۔
یہ 0 کے برابر ہے cos two k pi by n plus i sine 2 k pi by n کیا ہے سوائے کچھ نہیں ہے zkzk تو اب لکھیں کہ یہ
اور اب ہم اس اصلی حصے کو آسانی سے دیکھ سکتے ہیں۔ اس کمپلیکس نمبر کا 0 ہے اور کمپلیکس نمبر صفر کا خیالی حصہ حساب لگائیں کہ اس
جو اس کمپلیکس نمبر کا n مائنس ایک cos of two k pi by n کمپلیکس نمبر کا اصلی حصہ کیا ہے جو کچھ بھی نہیں مگر صفر سے
یہ 0 ہے اگر میں واضح طور پر لکھوں n بذریعہ ne 2 k pi ہے۔ si حقیقی حصہ ہے اور یہ صفر ہے اور خیالی حصہ جو
cos چار pi by n جمع pi by n صفر یعنی ایک اور پھر باقی اصطلاحات جو ہمارے یہاں ہیں یہ دو cos کے برابر صفر k تو یہ ہے
کی قدروں کو بدلنے کے ساتھ ایک اور مثلثی شناخت k کی قدر مائنس 1 ہے اور ہمیں 0 کے برابر pi by n مائنس cos 2 n 1 اور تک
اور آخری ٹرم n سائن فور پائی ملتے ہیں۔ n ملتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ پہلی رقم کی قدر 0 ہے باقی عوامل ہمیں سائن دو پائی بذریعہ sine
برابر 1 کے لیے ہمیں ایک اچھی مثلثی شناخت ملی ہے آئیے اس m کی قدر 0 ہے۔ اس لیے مخصوص کیس پاور pi by n مائنس ایک two n
ویں جڑ کے سوا کچھ نہیں ہے اورn اتحاد کی pi by n سے تعبیر کرتے ہیں۔ cis 2 تجویز کی بنیاد پر ایک سادہ مسئلہ کرتے ہیں ہم الفا کو
تک کی دوری کی پیمائش کرتے ہیں جو اتحاد z ویں جڑ سےn کی k مندرجہ ذیل شرط کو پورا کرتا ہے کہ کیا آپ اتحاد الفا z ایک پیچیدہ نمبر
اس شرط کو پورا کرتا ہے az کی تمام نویں جڑ میں سے ایک سے کم یا اس کے برابر ہے۔ اگر
تو z mus t صفر ہو
صفر کے برابر ہے جو آپ کے پاس ہے ایک کہے کہ k تو آئیے ہم تصویری طور پر دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں کہ ہم کیا دیکھتے ہیں کہ اگر
ایک سے کم یا اس کے برابر ہے z زیادہ سے زیادہ فاصلہ ایک سے
کمپلیکس نمبر ایک سے 1 کے فاصلے کے اندر اندر z تو ہم جانتے ہیں کہ یہ فاصلہ کیا ہے یہ یونٹ ہے ایک فاصلہ یہاں بھی یہ اکائی ہے اب
کہیں اندر ہے اور اب لے لو ایک اور z ہے ٹھیک ہے اس کا مطلب ہے کہ آپ ٹریس کریں کہ ایک سے لمبائی کتنی ہے پھر ہمیں دائرہ ملتا ہے اب
دائرے کے اندر ہوتا ہے اسی طرح آپ z کہتے ہیں کہ الفا جو اتحاد کی نویں جڑ میں ہے اب آپ فاصلے کے ساتھ ایک اور دائرہ بناتے ہیں ایک پھر
دیکھتے ہیں کہ اتحاد کی ہر نویں جڑ کے ساتھ اتحاد کی نویں جڑ کا فاصلہ ہے۔ ہمیشہ ایک سے کم یا اس کے برابر اگر ایسا کوئی پیچیدہ نمبر
موجود ہو
k مائنس الفا پاور z تو ہم یہ ظاہر کرنے جا رہے ہیں کہ یہ اصل کے علاوہ کچھ نہیں ہے آئیے ہمیں یہ نتیجہ ثابت کرنے کی کوشش کریں کہ
مائنس ون تک n ایک سے k سے کم یا برابر ہے۔ کی تمام اقدار کے لیے 1 تک
جس کا k مائنس الفا پاور mod z مائنس 1 میں ہے پھر ہم دیکھتے ہیں کہ n کی ایک قدر طے کرتا ہوں جو صفر سے k تو اب میں صرف
مربع جو ہر فیکٹر کی صرف دوبارہ پیداوار ہے اور یہ اصطلاح کم ہے ایک کے مقابلے میں یا اس کے برابر یہ اصطلاح دوبارہ ایک سے کم یا اس

مائنس الفا kz مائنس الفا z کے برابر ہے لہذا مصنوع ایک سے کم یا برابر ہے اس کا مطلب ہے اب اس بائیں ہاتھ کو پھیلانے کی کوشش کریں یہ
بار ہے ان کی پروڈکٹ کم ہے ایک کے مقابلے یا اس کے برابر اب بائیں ہاتھ کی طرف مزید پھیلائیں یہ موڈ زیڈ مربع ہے اور دوسری k
بار الفا پاور کے پلس آپ کو الفا کے مربع کا ماڈیولس ملتا ہے جو ایک سے کم یا اس کے برابر ہے یاد کریں z الفا کے بار مائنس z اصطلاحات
ویلیو کا ماڈیولس ایک ہے اس کا مطلب یہ ہے k ویں جڑ جو یونٹ کے دائرے پر واقع ہے جس کا مطلب ہے کہ اس الفا پاورn کہ یہ ہے اتحاد کی
بار الفا z الفا پاور کے بار ہے پلس z مربع اس سے کم یا اس کے برابر ہے دیگر تمام اصطلاحات کو دائیں طرف لیتا ہے آپ کو یہ mod z کہ
مائنس 1 تک ایک ہی عدم مساوات پوری ہوتی ہے n کی قدریں۔ 0 سے k جہاں k پاور

ویںn کو 0 کے برابر لیتے ہیں آپ کو اس مخصوص کمپلیکس نمبر کے لیے اتحاد کی پہلی k تو ذرا مشاہدہ کریں کہ اس کا کیا مطلب ہے کہ آپ
بار الفا میں ملتا ہے z کے برابر بولیں آپ کو الفا بار اور k جڑ ملتی ہے یہ عدم مساوات ایک کے برابر ہے پھر عدم مساوات مطمئن ہے
عدم مساوات کو n عدم مساوات کا مجموعہ کرتے ہیں اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر میں اس n عدم مساوات مل جاتی ہے اب آپ ان n تو ہمیں
بائیں ہاتھ سے جوڑتا ہوں

کو الفا پاور کے بار کے ساتھ z مائنس n 1 کا مجموعہ 0 سے k مربع کی شرائط ملتی ہیں یہ اس سے کم یا برابر ہے n mod z تو مجھے
ضرب کیا گیا پلس یہ ایک عام خلاصہ ہے جو ہمارے پاس ہے اب آپ کو اس تجویز کو لاگو کرنے کی ضرورت ہے جو ہم نے ابھی ثابت کیا ہے کہ
کو ایک عام فیکٹر کے طور پر نکال سکتے ہیں z جڑ کے مجموعہ کے طور پر اب یونیٹیز صفر ہے جو کہ بالکل وہی سمیشن ہے یہاں ہم nth
برابر plus z bar summation k سے کم یا اس کے برابر ہے 1 الفا کے بار z اور پھر آپ دائیں طرف آتے ہیں میں لکھ دیتا ہوں کہ یہ
اور ہم جانتے ہیں کہ یہ رقم 0 ہے اور یہاں کنجوجیشن کو عام طور پر خلاصے کے باہر لیا جا سکتا ہے اور k مائنس 1 الفا پاور n ہے 0 سے
مربع کا ماڈیولس جو کہ ایک غیر منفی z جمع پھر وہی ہے جو کہ صفر ہے جس کا مطلب ہے حق ہاتھ کی طرف صفر بن گیا اب دیکھیں کہ
صفر ہے اس لیے ہم نے z کا صفر ہونا ضروری ہے جو کہ mod z اصطلاح ہے جو صفر سے کم یا اس کے برابر ہے اس کا مطلب ہے کہ
جڑوں سے فاصلہ کے ساتھ ایک پیچیدہ عدد ہے جو ایک سے کم یا مساوی فاصلہ کے ساتھ ہے nth اپنا مطلوبہ نتیجہ ثابت کیا۔ کہ اگر تمام
تو کمپلیکس نمبر کا اصل ہونا ضروری ہے آئیے ایک اور اچھا نتیجہ ثابت کریں کہ ہمیں ایک باقاعدہ کثیر الاضلاع دیا گیا ہے آئیے کال کریں یہ کون
مائنس 1 ہے جو یونٹ کے دائرے پر رکھا جاتا ہے ٹھیک ہے pn تک p naught p 1 سا ورٹیکس ہے جو کہ

ریگولر پولیگون کے ساتھ دیا جاتا ہے جو اس دیے گئے مفروضے کے ساتھ اکائی کے دائرے پر رکھا جاتا ہے ہم یہ دکھانے جا رہے ہیں n تو ہمیں
مائنس 1 تک کا pn سے p naught تک کے فاصلے کے ساتھ p 2 سے p naught تک کا فاصلہ p 1 سے d p naught کہ
اصطلاحات سے ضرب کریں n فاصلہ اس طرح

جو کہ دلچسپ شناخت ہے اور مزید یہ کہ اس شناخت کو استعمال کرتے ہوئے ہم اخذ کرنے جا رہے ہیں۔ اچھی مثلثی n تو آپ کو قدر ملے گی
n بذریعہ 2 پاور n قیمت n بذریعہ pi مائنس n 1 تک نشان n سائن 2 پائی بذریعہ n شناخت جس میں کہا گیا ہے کہ سائن پائی بذریعہ
کے طاق ضرب کو pi مائنس 1 دیتا ہے اور اسی طرح ہمارے پاس ایک اور شناخت ہے جو فرق یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں ہم کہتے ہیں کہ
تک pi by n مائنس n 1 ہیں لہذا ہمارے پاس pi 2 pi سے تقسیم کیا گیا ہے اس کے بجائے یہاں ہمارے پاس لگاتار اصطلاحات 2 n
سے تقسیم ہے ان کی مصنوع ہمیں 1 بذریعہ دیتی ہے۔ 2 پاور این مائنس 1 جو کہ بہت n کے طاق ضرب pi 2 ہے لیکن یہاں ہمارے پاس
دلچسپ شناخت ہے آئیے ہم اس نتیجے کو ثابت کرتے ہیں آئیے یہ دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں کہ کیا مسئلہ ہے جو ہمیں دیا گیا ہے ہمارے پاس
مائنس ون پر pn اور اسی طرح p one اور p naught ایک باقاعدہ کثیر الاضلاع ہے جسے ایک یونٹ کے دائرے میں رکھا گیا ہے جیسے
ویں جڑ کے طور پر منتخب کیا جاسکتا ہے ٹھیک ہے لہذا عمومیت کے نقصان کے بغیر ہم یہ فرض کرn ہم جانتے ہیں۔ کہ ان چوٹیوں کو اتحاد کی
باقاعدہ کثیرالاضلاع یونٹ کے دائرے پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ عمودی کچھ نہیں ہیں لیکن اتحاد کی ہماری نویں جڑ ہیں n سکتے ہیں کہ دیا گیا
ویں جڑ پر عمودی کے طور پر رکھتے ہیںn اور ہم جانتے ہیں کہ اگر آپ ایک کثیرالاضلاع کو وحدت کی

تو یہ ایک باقاعدہ کثیر الاضلاع ہے اس طرح ہم پہلے ہی پچھلے لیکچر میں بحث کر چکے ہیں اب پہلی شناخت جو ہم ثابت کر رہے ہیں وہ یہ ہے کہ
سے فاصلہ کوئی p دو تک اور دوسری چوٹیوں کے لیے p سے فاصلے پر غور کریں۔ p naught اور p one سے p naught آپ
چیز نہیں ہے جس پر ہم غور کرتے ہیں اور اس کی مصنوع لیتے ہیں جو ان کی پیداوار دیتا ہے ہمیں یہ دکھانا پڑتا ہے اگرچہ ہندسی طور پر پیچیدہ
لگتا ہے لیکن ایک بار جب ہم پیچیدہ اعداد کے لحاظ سے لکھتے ہیں

الفا پاور pks تو یہ بہت واضح ہے کہ یہ ایک آسان شناخت ہے۔ عامیت کے نقصان کے بغیر یہ ثابت کرنے کے لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ
مائنس 1 تک۔ اب اس شناخت کو یاد کریں جسے ہم پہلے ہی ایک تبصرے کے n ویں جڑ ہے 0 سےn کی k پر رکھے گئے ہیں جو کہ اتحاد k
طور پر ذکر کیا گیا ہے جو ہماری کثیر الثانی ہے اگر آپ کو یہ شناخت یاد ہے

مائنس ٹو کے طور پر فیکٹر کیا جا سکتا n سے پاور n 1 مائنس z سے پاور z مائنس 1 پروڈکٹ کے ساتھ z مائنس 1 کو n پاور z تو
اتحاد کی نویں جڑ کے علاوہ کچھ نہیں ہے k جہاں الفا k کے طور پر فیکٹر کیا جا سکتا ہے۔ مائنس الفا پاور z ہے اور اس طرح کثیر نام کو
مائنس 1 تک ہے۔ لہذا ہم اس شناخت کو یاد کرنے n سے k 1 ہیں جہاں k لہذا ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ کثیر الجہتی جڑیں صرف الفا پاور
پلس ون یہ اس کی مصنوع کے طور پر لکھا z مائنس ٹو پلس n سے پاور z مائنس 1 پلس n سے پاور z جارہے ہیں کہ ہمارے پاس کیا ہے
کہہ k یا ہمارے معمول کے اشارے الفا پاور pk گیا ہے جسے ہم نے اس کی جڑوں سے فیکٹرائز کے طور پر دیکھا ہے جڑیں یہاں ہیں ہم
کا انتخاب کریں پھر بائیں ہاتھ کی طرف ہمارے پاس z سکتے ہیں اب اس طرح شناخت تمام پیچیدہ نمبروں کے لیے درست ہے صرف 1 کے برابر
ملتی ہے ہم اس کے قریب k مائنس 1 1 مائنس الفا پاور n کی پیداوار 1 سے k اور دائیں ہاتھ کی طرف سے ہمیں n اصطلاحات ہیں ہمیں n
ویں جڑ ہے اورn ہماری وحدت کی پہلی k 1 ہیں شناخت جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں اب پوچھیں۔ آپ خود یہ مقدار کیا ہے 1 مائنس الفا پاور
ایک ہے ہم اب الفا ون پی p یہ pi by n ہے ہم یہاں حاصل کریں گے یہ زاویہ دو pi by n ایک کے برابر ہے زاویہ کے ساتھ جو دو k
ون لکھا ہے ہم نے اسے الفا اور پی ٹو لکھا ہے ہم نے الفا پاور ٹو لکھا ہے اب اگر میں مطلق قدر لیتا ہوں

ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں۔ کہ اگر آپ اس شناخت کی مطلق k ہے جو کہ الفا پاور pk کے درمیان فاصلہ دیتا ہے جو 1 سے p naught تو یہ
قدر لیتے ہیں

اور دائیں ہاتھ کی k مائنس 1 1 مائنس الفا پاور n سے k 1 تو ہمیں اپنی مطلوبہ شناخت مل جاتی ہے جو کہ اس پروڈکٹ کی مطلق قدر ہے
پروڈکٹ mod z1 کے ساتھ mod z2 کا ایک ہی ماڈیولس دیتا ہے ہمیں z1 z2 طرف ایک غیر منفی نمبر ہے مطلق قدر ماڈیولس دیتی ہے۔ قدر
دے گا

کے برابر ہے۔ اور یہ n کی پیداوار کے برابر ہے جو کہ k تک مائنس 1 ماڈیولس فیکٹر 1 مائنس الفا پاور n تو اس کا مطلب ہے کہ یہ 1 سے
vp naught ٹو کے ساتھ p naught p ایک پروڈکٹ ہے p naught p کے لیے یہ pk سے دوری ہے۔ p no کچھ نہیں ہے مگر
ملتا ہے جس سے پہلی شناخت ثابت ہوتی ہے اب ہم دوسری شناخت ثابت کرنا چاہیں گے جو n مائنس 1 کے درمیان فاصلہ ہے ہمیں pn سے
مائنس ایک ہے اس کو n بائی دو پاور n اور اسی طرح پروڈکٹ ویلیو n پروڈکٹ ہے۔ دو پائی بذریعہ sine pi by n کے ساتھ sine
کا فاصلہ کیا ہے جو بالکل ہماری سائن ٹرمز کو حاصل کرنے والا ہے k ثابت کرنے کے لیے ہمیں صرف یہ حساب لگانا ہوگا کہ 1 سے الفا پاور
cos two جو ایک مائنس ہے آئیے ہم اس کے مربع پر غور کریں یہ ایک مائنس k آئیے ہم اس سے فاصلے کا حساب لگائیں ۔ ایک مائنس الفا پاور

تین پورا مربع کے طور پر k pi by n دو cos جس کا موڈ مربع ہم اسے 1 مائنس i sine 2 k pi by n مائنس k pi by n
مربع ہے ایک بار جب ہم اسے بڑھاتے ہیں k pi by n حاصل کرتے ہیں۔ اصلی حصہ مربع ہے اور خیالی حصہ مربع دو
مربع ٹرم ہے جو ایک دیتا ہے اور ہمارے یہاں ایک اور ٹرم ہے sine مربع کی اصطلاح ملتی ہے اور ہمارے پاس ایک cos تو ہمیں
cos 2 اب آپ کو مزید شناخت کا استعمال کریں جو کہ 1 مائنس ہے cos 2 k pi by n تو ہم مل کر 2 منفی 2 بار حاصل کرتے ہیں
تھیٹا کو 2 سائن اسکوائر تھیٹا کے طور پر لکھا جا سکتا ہے
مائنس ون تک ہے n کی قیمت 1 سے kk اب نوٹ کریں کہ n کا 2 گنا ہے k pi تو ہم یہ حاصل کرتے ہیں 2 سائن اسکوائر
مائنس 1 n مائنس 1 1 سے n کی حدود 0 سے k مربع کے طور پر n بذریعہ k pi مربع کو چار گنا سائن k تو ہم ایک مائنس الفا پاور
کے طور پر شمار کیا جاتا ہے۔
k چونکہ k pi by n کے درمیان فاصلہ سائن کے ماڈیولس کے دو گنا سے دیا گیا ہے۔ pk سے p naught تو اس کا مطلب یہ ہے کہ
سے s pi by n قدر k pi تک مختلف ہوتی ہے لہذا pi مائنس 1 تک ہے اب آپ دلیل دیکھتے ہیں یہاں کی قدر 0 سے n کی رینج 1 سے
کے برابر اور اسی طرح یہ اس دلیل کے تحت 0 سے بڑا یا اس کے برابر ہے pi جو یقینی طور پر یا سے کم ہے۔ pi by n مائنس 1 n
p ہے جو کچھ نہیں ہے مگر sine k pi by n دو گنا sine نشان کی قدر ہمیشہ غیر منفی ہوتی ہے لہذا ہمیں وہ قدر ملتی ہے جو
n بذریعہ e pi تک کا فاصلہ اب استعمال کریں پچھلی ثابت شدہ شناخت جو پی کو کچھ نہیں دیتی ہے ایک جو دو گناہ ہے۔ pk سے naught
ہے لہذا ہم n ہے وہ مصنوعہ n اور مصنوعہ جس میں سائین کے دو گنا مائنس 1 پائی بذریعہ n مصنوعہ دو سائین کے ساتھ دو پائی بذریعہ
مائنس 1 حاصل n بذریعہ 2 پاور n ہمیں n تک سائن این مائنس 1 پائی بذریعہ n سائین دو پائی بذریعہ n دیکھتے ہیں کہ سائین پائی بذریعہ
ہوتا ہے جو کہ مطلوبہ شناخت ہے لہذا ہم نے تیسری شناخت ثابت کرنے کے لیے دوسری کو ثابت کیا ہے میں صرف وہی اشارہ دوں گا جس پر ہم
نے غور کیا ہے
پچھلی شناخت حاصل کرتے ہیں sine pi by 2 n تو آئیے اس شناخت پر واپس چلیں جو ہمارے پاس ہے یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ہم یہاں
باقاعدہ کثیر الاضلاع پر غور کرتے ہیں n ہے اس لیے اس مخصوص اصطلاح کو حاصل کرنے کے لیے ہم دو sine pi by n ہمارے پاس
اس شناخت کو لاگو کرتے ہیں
ٹھیک ہونے کی وجہ سے لیتے ہیں n کی تعداد دو n تو اس کا مطلب ہے کہ ہم
تو دی گئی دو بار آپ اسے باقاعدہ کثیرالاضلاع کے طور پر سمجھیں اور پھر اس شناخت کو استعمال کریں اور کم سے کم ہیرا پھیری سے ہم
تیسری شناخت کو ثابت کر سکتے ہیں اس لیے میں ثبوت کو چھوڑ دیتا ہوں اس لیے اس لیکچر میں ہم نے اتحاد کی نویں جڑ پر مبنی کئی تجاویز
کے ساتھ ساتھ ہم نے اچھی مثلثی شناختیں دیکھی ہیں جنہیں ہم اتحاد nity دیکھیں اور کچھ مسائل ہم نے حل کیے ہیں یو کے نویں جڑ پر ہے۔
کی نویں جڑ کا استعمال کرتے ہوئے ثابت کرنے کے قابل ہیں اگلے لیکچر میں ہم اس پر مزید مسائل پر بات کریں گے شکریہ