 హలో విద్యార్థులు గత ఉపన్యాసంలో సంక్లిష్ట సంఖ్యలపై ఉపన్యాసాలకు స్వాగతం, మేము ఐక్యత యొక్క nవ మూలాన్ని చర్చించాము మరియు దాని ఆధారంగా మేము అనేక గుర్తింపులను నిరూపించుకున్నాము, ఈ చర్చను కొనసాగిద్దాం కాబట్టి ఐక్యత యొక్క nవ మూలాన్ని నేను గుర్తుచేసుకుందాం ఇది సంక్లిష్టమైనది సంఖ్య z సమీకరణాన్ని n శక్తికి 1కి సమానం చేస్తుంది మరియు గత తరగతులలో మనం చూపినవి ఈ సమీకరణాన్ని
సంతృప్తిపరిచే n విభిన్న సంక్లిష్ట సంఖ్యలు ఉన్నాయి , అవి zk గా ఇవ్వబడ్డాయి, ఇది n ప్లస్ i సైన్ 2 ద్వారా 2 k pi ద్వారా ఇవ్వబడుతుంది.
 k pi ద్వారా nk 0 1 నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఉంటుంది మరియు ఈ zk శక్తి 1 kకి z తప్ప మరేమీ కాదని మేము గమనించాము
కాబట్టి మీరు k అనేది ఒకదానికి సమానంగా పరిగణించబడుతుంది , అది z one బై n ప్లస్ i సైన్ టూ రెండు pi ద్వారా n ఇప్పుడు దాని పవర్ kని తీసుకుంటుంది, ఇది యూనిటీల యొక్క ఇతర nవ మూలాన్ని ఉత్పత్తి చేస్తుంది మరియు సౌలభ్యం కోసం మేము సిస్ తీటా అనే సంజ్ఞామానాన్ని పరిచయం చేస్తాము, ఇది cos theta ప్లస్ i sin theta అని నిర్వచించబడింది మరియు మనం దాని పవర్ kని కేవలం d మోరిస్ చట్టం ద్వారా తీసుకుంటే మేము ఇది c గా వస్తుందని చూడండి అనేది k తీటా మరియు మనం గమనించిన కొన్ని వ్యాఖ్యలు
చేద్దాం, ఆల్ఫాను z 1గా పెట్టండి , అంటే cis 2 pi by n అని భావిస్తే, ఆల్ఫా కోసం n శక్తిని పెంచితే మనకు లభించేది cis 2 pi by n పవర్ n ద్వారా పై నియమం పైన ఉన్న cis two pi అది కాస్ టూ pi ప్లస్ i sin two pi ఇది ఒకటి అని మనం చూస్తాము మరియు మనం పవర్ ఆల్ఫా పవర్ kn ను పెంచినట్లయితే దీనిని ఆల్ఫా పవర్ n అని మొత్తం పవర్ kకి వ్రాయవచ్చు మరియు పై పరిశీలన ద్వారా ఇది మేము ఆల్ఫా పవర్ k మరియు పవర్ n లను పరిగణనలోకి తీసుకుంటే , సున్నా కంటే ఎక్కువ లేదా సున్నాకి సమానమైన ks కోసం మళ్లీ అదే విధంగా k ప్రతికూల విలువను
సున్నా కంటే తక్కువ అని చెప్పవచ్చు మరియు ఇది మళ్లీ ఆల్ఫా పవర్ n పవర్ k లాగా ఉందని ధృవీకరించవచ్చు.
 n
యొక్క ఆల్ఫా పవర్ గుణిజాలను మనం పరిగణలోకి తీసుకుంటే, kn అంటే k అనేది పూర్ణాంకానికి చెందినది మరియు రెండవ వ్యాఖ్య, ఆల్ఫా పవర్‌గా వ్రాయబడే ఈ nవ మూలాన్ని వ్రాద్దాం.
 k తో సున్నా నుండి n మైనస్ ఒకటి వరకు ఐక్యత యొక్క మా nవ మూలాలు అంటే అది సంతృప్తి చెందుతుంది కాబట్టి ఇది ఏదైనా ఆల్ఫా పవర్ k ని సంతృప్తిపరుస్తుంది, n శక్తికి z సమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరుస్తుంది, ఆల్ఫా పవర్ k అనేది
బహుపది z పవర్ యొక్క మూలం n మైనస్ k కి ఒకటి అని చెప్పడానికి సమానమైన దానిని ఇస్తుంది
సున్నా ఒకటి నుండి n మైనస్ వన్ వరకు మనకు తెలిసినది ఏదైనా ఇవ్వబడినదానికి n ఒకటి ఎల్లప్పుడూ ఈ బహుపదికి మూలంగా ఉంటుంది, ఇది z పవర్ n మైనస్ వన్‌ను పరిగణనలోకి తీసుకుంటే సులభంగా చూడవచ్చు, దీనిని z పవర్ n మైనస్‌తో z మైనస్ 1 ఉత్పత్తిగా కారకం చేయవచ్చు.
 పవర్ n మైనస్ 2కి 1 ప్లస్ z.
 కాబట్టి సులువుగా గణించడం ద్వారా మనం z పవర్ n మైనస్ 1 అని ఎడమ చేతిని ధృవీకరించవచ్చు, ఇప్పుడు ఈ రెండు కారకాల ఉత్పత్తి పరంగా వ్రాసిన విధంగానే
z ఒకదానికి సమానం దీనికి మూలం.
 బహుపది మేము పదం మరియు మిగిలిన కారకాలను కారకం చేసాము , దీనికి n మైనస్ 1 డిగ్రీ బహుపది అయిన ఆల్ఫా k ఒకటి నుండి n మైనస్ ఒకటి వరకు ఈ బహుపది మూలంగా ఉంటుంది , ఇతర పరిశీలన నుండి మనం ఆల్ఫా పవర్ k అని చెప్పవచ్చు zn మైనస్ 1 ప్లస్ zn మైనస్ 2 ప్లస్ z ప్లస్ వన్ k కోసం ఒకటి రెండు నుండి n మైనస్ ఒకటి వరకు ఉంటుంది కాబట్టి మనం బహుపది z పవర్ n మైనస్ 1 ప్లస్ z పవర్ n మైనస్ 2 ప్లస్ z ప్లస్ 1 వ్రాయవచ్చు z మైనస్ ఆల్ఫా z మైనస్ ఆల్ఫా స్క్వేర్ మరియు z మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ n మైనస్ ఒకటి కాబట్టి నేను చిన్న సంజ్ఞామానంలో వ్రాస్తే మనకు కనిపించేది ఏమిటంటే, పవర్ n మైనస్ 1 ప్లస్ z పవర్ n మైనస్ 2 వద్ద ఈ ప్లస్ వరకు కారకం లేదా బహుపదాలు z ప్లస్ 1 ఈ బహుపదిని యూనిటీస్ పవర్ k యొక్క nవ మూలాన్ని ఉపయోగించి కారకం చేయవచ్చు
మరియు సమానత్వం సులభంగా వాదించబడుతుంది ఎందుకంటే n మైనస్ వన్ డిగ్రీ బహుపది గరిష్టంగా n మైనస్ ఒక మూలాలను కలిగి ఉంటుంది మరియు మనం గమనించినది n మైనస్ 1 మూలాలను మేము ఇప్పటికే గమనించాము ఐక్యత యొక్క విభిన్నమైన nవ మూలం ఈ బహుపదాలకు మూలాలు కాబట్టి ఈ బహుపదిని ఈ రూపంలో ఈ రూపంలో కారకం చేయవచ్చు కాబట్టి మనం ఒక సాధారణ సమస్యకు వెళ్దాం, కామా బి ఆర్డర్ చేసిన జంటల సంఖ్యను కనుగొనండి, ఇక్కడ a మరియు b వాస్తవ సంఖ్యలు అంటే i t ఈ సమీకరణాన్ని మైనస్ ibకి సమానమైన ప్లస్ ib పవర్ 2016ను సంతృప్తిపరుస్తుంది, కనుక ఇది ఈ సమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరిచే విధంగా సాధ్యమయ్యే కామా బి వాస్తవ సంఖ్యలను కనుగొనమని మేము కోరాము వాస్తవ సంఖ్యల ఉత్పత్తిని మనం ఒక సమ్మేళన సంఖ్యను ప్లస్ ibని ప్రత్యేకంగా అనుబంధించగలము అంటే, ఈ సమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరిచే క్రమంలో ఉన్న జతను కనుగొనడం, ఈ సంబంధం కారణంగా ఈ సమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరిచే సంక్లిష్ట సంఖ్యను కనుగొనడానికి సమానం
కాబట్టి z ని ప్లస్ ibగా పరిగణించండి మరియు మేము చూస్తున్నాము.
 z అన్ని కాంప్లెక్స్ సంఖ్య కోసం దీని శక్తి 2016 మనకు z బార్ ఇవ్వాలి కాబట్టి ఈ సమీకరణాన్ని సమానంగా

సంతృప్తిపరిచే అన్ని సంక్లిష్ట సంఖ్యల సెట్ కోసం మేము ఈ సమీకరణాన్ని పరిష్కరిస్తే, ఈ సమీకరణాన్ని సంతృప్తిపరిచే కామా బితో ఆర్డర్ చేసిన జతలను అనుబంధించవచ్చు కాబట్టి ఈ సమీకరణం నుండి ఈ సమీకరణాన్ని పరిష్కరిద్దాం.
మేము మాడ్యులస్‌ను వర్తింపజేస్తే,
2016 యొక్క మాడ్యులస్ తప్పనిసరిగా z బార్ యొక్క మాడ్యులస్‌కు సమానంగా ఉండాలి, ఇది mod z వలె ఉంటుంది, ఇది tని సూచిస్తుంది hat mod z ఎడమ వైపుకు తీసుకురండి కాబట్టి మనకు 2016 మైనస్ mod z ఉండాలి కాబట్టి ఇది 0కి సమానంగా ఉండాలి కాబట్టి మనం వాదిస్తున్నది ఏమిటంటే , సంక్లిష్ట సంఖ్య ఉంటే ఈ సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది, అది తప్పనిసరిగా ఈ సంబంధాన్ని సంతృప్తి పరచాలి, ఇది
mod z ఉత్పత్తిని సూచిస్తుంది mod z పవర్ 2015 మైనస్ 1 ఈ సంబంధం నుండి 0కి సమానంగా ఉండాలి లేదా mod z తప్పనిసరిగా సున్నా అయి ఉండాలి లేదా mod z పవర్ రెండు వేల పదిహేను తప్పనిసరిగా ఒకదానికి సమానంగా ఉండాలి కాబట్టి మనం mod z సున్నా r mod zకి సమానమైన సంబంధాన్ని పొందుతాము mod z సున్నాకి సమానం అయితే పవర్ రెండు వేల పదిహేను తప్పనిసరిగా ఒకదానికి సమానంగా ఉండాలి అంటే z సున్నా అని అర్థం, కాబట్టి z సున్నా
కాకపోతే mod z పవర్ 2015 తప్పనిసరిగా ఒకటిగా ఉండాలి కాబట్టి
mod z తప్పనిసరిగా ఒకదానికి సమానంగా ఉండాలి అని మేము నిర్ధారించాము ఎందుకు ఎందుకంటే
పవర్ 2015లో మోడ్‌లు ఒకటి మరియు mod z ఒకటి కంటే తక్కువగా ఉంటే, వెంటనే మీకు ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా ఒకటి కంటే ఎక్కువ లేదా mod z పవర్ రెండు వేల పదిహేను ఒకదానికి సమానంగా ఉండదని మీరు వెంటనే చూస్తారు కాబట్టి ఈ వాదన ద్వారా మేము అని చూడగలరు i ఈ ముగింపు నుండి mod z తప్పనిసరిగా ఒకటి అయితే దాని శక్తి ఒకటిగా ఉండాలి కాబట్టి ఇప్పుడు mod z ఒకదానికి సమానం అయితే mod z స్క్వేర్ మళ్లీ ఒకటి అయితే ఇప్పుడు మోడ్‌ల కేసును ఒకదానికి సమానంగా పరిగణించండి మరియు ఇది మనకు వెంటనే z బార్‌ని తెలియజేస్తుంది.
mod z స్క్వేర్‌ని z బార్‌గా z బార్‌కి z బార్‌తో సమానంగా ఇవ్వబడుతుంది, ఈ సందర్భంలో ఇప్పుడు మనం ఈక్వేషన్‌కి తిరిగి వెళ్లడం చూస్తాము, మన సంక్లిష్ట సంఖ్య ఈ z బార్‌ని సంతృప్తి పరచాలి.

z ఒకదానికి సమానం అప్పుడు z బార్ zకి ఒకటి తప్ప మరొకటి కాదు కాబట్టి ఇది z శక్తికి రెండు వేల పదిహేడు ఒకటి అని సూచిస్తుంది మరియు ఈ సమీకరణానికి సాధ్యమయ్యే అన్ని పరిష్కారాలు ఏమిటో మనకు తెలుసు,
ఇది n ఉన్న ఐక్యత యొక్క n వ మూలం తప్ప మరొకటి కాదు.
2017.
కాబట్టి దీని అర్థం సమీకరణం రెండు సమీకరణం రెండు రెండు వేల డెబ్బై విభిన్న నాన్-జీరో సొల్యూషన్‌లు మరియు మీరు సున్నాకి సమానమైన zని పరిగణించినట్లయితే మేము గమనించాము మరియు ఈ సమీకరణాన్ని కూడా సంతృప్తిపరుస్తుంది కాబట్టి సున్నాకి సమానమైన z కూడా ముగింపుగా పరిష్కారం 1 అని అర్థం.
సమీకరణం 1 a s 2018 విభిన్న పరిష్కారాలు ఐక్యత యొక్క nth రూట్ కోసం ఒక మంచి ఆస్తిని చూద్దాం, ఇది cis two k pi ద్వారా n ద్వారా ఇవ్వబడిన zk అని వ్రాయబడుతుంది, ఇక్కడ k అనేది సున్నా నుండి n మైనస్ ఒకటి, ఇప్పుడు అధికారాలను పెంచే మొత్తాన్ని పరిగణలోకి తీసుకోండి .

సున్నా నుండి n మైనస్ 1 వరకు m సమ్మిట్ ద్వారా ఏకాల యొక్క nవ మూలం అప్పుడు మనం n లేదా 0 గా విలువను పొందుతాము , శక్తి m n యొక్క గుణకం అయితే n ను పొందుతాము, ఇది n mని భాగిస్తే మొత్తం విలువను పొందుతాము.
0 ఈ ప్రతిపాదన zk ని మనం ఇంతకు ముందు చెప్పినట్లుగా నిరూపిద్దాం,
ఇక్కడ ఆల్ఫా s 2 pi బై n మరియు k అని సున్నా నుండి n మైనస్ ఒకటి అని చెప్పే చోట, ఇప్పుడు సమ్మషన్ k ను 0 నుండి n మైనస్ 1 z వరకు పరిగణించండి సున్నా నుండి n మైనస్ వన్ zk కి సమానమైన kzk పవర్ mకి ఆల్ఫా పవర్ k మరియు పవర్ mతో భర్తీ చేయబడుతుంది మరియు ఇది
0 నుండి n మైనస్ 1 ఆల్ఫా పవర్ m వరకు ఉన్న సమ్మషన్ k వలె ఉంటుంది ఇప్పుడు ఇది స్థిర సంఖ్య పెరిగిన శక్తి kతో ఇప్పుడు మొత్తం మనం రేఖాగణిత మొత్తం తప్ప మరొకటి కాదు మొత్తానికి విలువను సులభంగా కనుగొనడం ఎలాగో తెలుసు బహుశా ఒక వ్యాఖ్యగా నేను ఆ రేఖాగణిత మొత్తం సమ్మషన్ k కి సమానంగా జోడిస్తాను కాబట్టి మనం రేఖాగణిత మొత్తాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం n మైనస్ 1 వరకు చెప్పండి మన శక్తి k కి మొత్తం విలువ ఉంటుంది శక్తి n మైనస్‌ని ఒక మైనస్‌తో భాగించగా ఒక మైనస్‌తో భాగించబడుతుంది,
ఇక్కడ తప్పనిసరిగా ఒకదానికి సమానంగా ఉండకూడదు సరే కాబట్టి మనం మొత్తం విలువను ఇక్కడ వర్తింపజేయవచ్చు అంటే మొత్తం విలువ ఇక్కడ ఉంది a అని అర్థం ఇక్కడ స్థిర విలువ ఆల్ఫా పవర్ m కాబట్టి మనకు ఆల్ఫా పవర్ m వస్తుంది కాబట్టి దాని పవర్ n మైనస్ 1 ని ఆల్ఫా పవర్ m మైనస్ 1తో భాగించగా, ఇప్పుడు నేను అదే మొత్తం విలువను తర్వాతి పేజీ సమ్మషన్ kలో సున్నాకి n మైనస్ వన్ z పవర్ kకి సమానంగా వ్రాస్తాను పవర్ m దాని విలువ మేము దానిని ఆల్ఫా పవర్ m పవర్ n మైనస్ ఒకటిగా ఆల్ఫా పవర్ mతో భాగించగా మైనస్ ఒకటిగా గుర్తించాము, m n ok ద్వారా భాగించబడినట్లయితే ఆల్ఫా పవర్ m ఒకదానికి సమానం అవుతుంది కాబట్టి ఆల్ఫా పవర్ అయితే ఈ ఫార్ములా చెల్లుబాటు అవుతుంది m 1కి సమానం కాదు మరియు సమానత్వం ఎప్పుడు

జరుగుతుంది nn mని విభజిస్తుంది కాబట్టి n
m ని భాగించకపోతే m అంటే n యొక్క గుణకం కాదని అర్థం, ఆ సందర్భంలో ఆల్ఫా పవర్ m ఒకదానికి సమానం కాదని మరియు పైన ఉన్నదానికి సమానం కాదని మనకు తెలుసు కాబట్టి k సున్నాకి సమానమైన వ్యక్తీకరణ n నుండి n మైనస్ వన్ z పవర్ k పవర్ m అనే పదం ఇక్కడ ఆల్ఫా పవర్ n పవర్ ఎమ్ మైనస్ ఒకటి ఆల్ఫా పవర్ m మైనస్ ఒకటితో భాగించబడిందని మనం చూస్తాము మరియు ఆల్ఫా పవర్ n విలువ ఒకటి కాబట్టి ఇది సున్నా అవుతుంది మరియు n లేనప్పుడు ఇది సున్నా కాని పరిమాణం.
mని భాగించండి అంటే n mని భాగించకపోతే సున్నా వస్తుంది అంటే n m ని భాగిస్తుంది అనుకుందాం అంటే m అనేది n యొక్క కొన్ని గుణిజాలతో ఇవ్వబడుతుంది , ఆ సందర్భంలో సమ్మషన్ k 0 నుండి n వరకు మైనస్ 1 z కి పవర్ k కి ఇవ్వబడుతుంది m ఇది qn మరియు ఐక్యత యొక్క nవ మూలం దాని గుణకం యొక్క n శక్తి ఎల్లప్పుడూ ఒకటిగా ఉంటుందని మేము ఇప్పటికే గమనించాము కాబట్టి దీనిని ఆల్ఫా పవర్ k అని కూడా తిరిగి వ్రాయవచ్చు మరియు ఇక్కడ అది kq మరియు మీరు ఈ పదాన్ని ఒకటి మరియు మళ్లీ మళ్లీ అని మేము సులభంగా చూస్తాము పవర్ kqని పెంచండి
, m అయితే m అయితే మొత్తం విలువ n అవుతుంది n యొక్క బహుళ సంఖ్య కాబట్టి మేము మా ప్రతిపాదనను నిరూపించాము అంటే మీరు ఏకాల యొక్క nవ మూలాన్ని పరిగణలోకి తీసుకుంటే, m శక్తిని పెంచడం ద్వారా m మొత్తం nవ మూలాన్ని ఏకం చేస్తే, అప్పుడు మీరు విలువ పొందుతారు n అందించిన m n యొక్క గుణిజాలు అయితే మనకు 0 వస్తుంది, చూద్దాం a m విలువతో చాలా ప్రత్యేక సందర్భంలో n ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఉంటే m విలువను ఖచ్చితంగా ఒకటిగా పరిగణించండి, అది mని విభజించదు కాబట్టి k నుండి n మైనస్ 1 z పవర్ k వరకు మొత్తం విలువ, ఇక్కడ m 1గా పరిగణించబడుతుంది మొత్తం విలువ 0.
n ఒకటి కంటే ఎక్కువ కాబట్టి ఇప్పుడు ఈ zkzk అంటే ఏమిటి అని వ్రాయండి కాస్ టూ k pi బై n ప్లస్ i సైన్ 2 k pi బై n ఇది 0కి సమానం మరియు ఇప్పుడు మనం ఆ వాస్తవ భాగాన్ని సులభంగా చూడవచ్చు ఈ సమ్మేళన సంఖ్య యొక్క 0 మరియు కల్పిత భాగమైన సున్నా యొక్క కల్పిత భాగం ఈ సంక్లిష్ట సంఖ్య యొక్క వాస్తవ భాగాన్ని లెక్కించండి, ఇది సున్నా నుండి nకి సమానమైన k తప్ప మరేమీ కాదు , ఈ సంక్లిష్ట సంఖ్య యొక్క వాస్తవ భాగమైన n ద్వారా రెండు k pi యొక్క ఒక కాస్ మైనస్ మరియు ఇది సున్నా మరియు ఊహాత్మక భాగం si ne 2 k pi by n ఇది 0 అని నేను స్పష్టంగా వ్రాస్తే ఇది సున్నా కాస్ సున్నాకి సమానమైన k కోసం , అది ఒకటి మరియు మిగిలిన పదాలు ఇక్కడ మనకు ఉన్నవి రెండు pi బై n ప్లస్ కాస్ ఫోర్ pi బై n మరియు కాస్ వరకు 2 n మైనస్ 1 pi బై n విలువ మైనస్ 1 మరియు
k కోసం 0కి సమానమైన k విలువలను భర్తీ చేయడం ద్వారా మేము మరొక త్రికోణమితి గుర్తింపును పొందుతాము మరియు మొదటి మొత్తం విలువ 0 అని మనం చూస్తాము , మిగిలిన కారకాలు n సైన్ నాలుగు pi ద్వారా సైన్ టూ పైని పొందుతాము n మరియు చివరి పదం sine two n minus one pi by n విలువ 0.
కాబట్టి నిర్దిష్ట సందర్భంలో పవర్ m 1కి సమానం కాబట్టి మనకు చక్కని త్రికోణమితి గుర్తింపు వచ్చింది, ఈ ప్రతిపాదన ఆధారంగా మనం ఆల్ఫాను cis 2గా సూచిస్తాము.
pi ద్వారా n అనేది ఐక్యత యొక్క nవ మూలం తప్ప మరొకటి కాదు మరియు సంక్లిష్ట సంఖ్య z కింది షరతును సంతృప్తిపరుస్తుంది అంటే మీరు ఐక్యత ఆల్ఫా k యొక్క nవ మూలం నుండి z వరకు దూరాన్ని కొలుస్తారు, ఇది అన్ని nవ మూలాల నుండి ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా సమానం
az ఉంటే ఈ షరతును z mus సంతృప్తిపరుస్తుంది t సున్నాగా
ఉండు కాబట్టి మనం చూసేదాన్ని చిత్రపరంగా చూడడానికి ప్రయత్నిద్దాం అంటే, మీ వద్ద ఉన్న సున్నాకి k సమానం అయితే,
ఒకటి నుండి z వరకు ఉన్న గరిష్ట దూరం ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా సమానం అని చెప్పండి, కాబట్టి ఈ దూరం ఏమిటో మాకు తెలుసు కాబట్టి ఇది యూనిట్ అని మాకు తెలుసు.
ఒక దూరం కూడా ఇక్కడ యూనిట్ ఒకటి ఇప్పుడు z కాంప్లెక్స్ నంబర్ వన్ నుండి 1 దూరంలో ఉంది కాబట్టి మీరు ఒకదాని నుండి ఒకటి పొడవు ఎంత ఉందో మీరు ట్రేస్ చేయండి అప్పుడు మనకు సర్కిల్ ఇప్పుడు z లోపల ఎక్కడో ఉంది మరియు ఇప్పుడు తీసుకుంటాము
ఐక్యత యొక్క nవ మూలంలో ఉన్న మరొక ఆల్ఫా ఇప్పుడు మీరు దూరంతో మరొక వృత్తాన్ని తయారు చేస్తారు, మళ్లీ z వృత్తం లోపల ఉంటుంది కాబట్టి అదే విధంగా మీరు ఐక్యత యొక్క ప్రతి nవ మూలానికి ఐక్యత యొక్క n వ మూలానికి దూరం అని మీరు చూస్తారు అటువంటి సమ్మేళనం సంఖ్య ఉంటే ఎల్లప్పుడూ ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా సమానంగా ఉంటుంది, అది మూలం తప్ప మరేమీ కాదని మేము చూపబోతున్నాం , మనకు అందించిన ఈ ఫలితాన్ని నిరూపించడానికి ప్రయత్నిద్దాం అంటే z మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k కంటే తక్కువ లేదా సమానం యొక్క అన్ని విలువలకు 1కి
k ఒకటి నుండి n మైనస్ ఒకటి కాబట్టి ఇప్పుడు నేను సున్నా నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఉన్న k విలువను పరిష్కరిస్తాను, అప్పుడు మేము mod z మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ kని చూస్తాము, దీని స్క్వేర్ ప్రతి కారకం యొక్క మళ్లీ ఉత్పత్తి మరియు ఈ పదం తక్కువగా ఉంటుంది ఒకటి కంటే లేదా సమానం మళ్లీ ఈ పదం ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా సమానం కాబట్టి ఉత్పత్తి ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా సమానం కాబట్టి ఇప్పుడు ఈ ఎడమ చేతి వైపు విస్తరించడానికి ప్రయత్నించండి ఇది z మైనస్ ఆల్ఫా kz మైనస్ ఆల్ఫా k బార్ వారి ఉత్పత్తి తక్కువగా ఉంటుంది ఒకటి కంటే లేదా దానికి సమానంగా ఇప్పుడు ఎడమ చేతి వైపు మరింత విస్తరించండి ఇది mod z స్క్వేర్ మరియు ఇతర పదాలు

z ఆల్ఫా k బార్ మైనస్ z బార్ ఆల్ఫా పవర్ k ప్లస్ మీరు ఆల్ఫా k స్క్వేర్ యొక్క మాడ్యులస్‌ను పొందుతారు, ఇది ఒక రీకాల్ కంటే తక్కువ లేదా సమానం యూనిట్ సర్కిల్‌పై ఉన్న ఏకత్వం యొక్క nవ మూలం అంటే ఈ ఆల్ఫా పవర్ k విలువ యొక్క మాడ్యులస్ ఒకటి, ఇది mod z స్క్వేర్ కంటే తక్కువ లేదా సమానం అని సూచిస్తుంది, నేను అన్ని ఇతర నిబంధనలను కుడి వైపు తీసుకుంటే అది z ఆల్ఫా పవర్ k బార్ ప్లస్ z బార్ ఆల్ఫా పవర్ k ఇక్కడ k విలువలు 0 నుండి n మైనస్ 1 వరకు అదే అసమానత సంతృప్తి చెందుతుంది కాబట్టి మీరు 0కి సమానంగా k తీసుకుంటే దాని అర్థం ఏమిటో గమనించండి, మీరు ఆ నిర్దిష్ట సంక్లిష్ట సంఖ్యకు ఐక్యత యొక్క మొదటి n వ మూలాన్ని పొందుతారు మీరు ఆల్ఫా బార్‌తో పాటు z బార్‌ని ఆల్ఫాలోకి తీసుకుంటారు కాబట్టి మేము n అసమానతలను పొందుతాము కాబట్టి మీరు ఈ n అసమానతలను సంకలనం చేస్తే, నేను ఈ n అసమానతలను ఎడమ వైపున కలిపితే నేను mod z స్క్వేర్ యొక్క n నిబంధనలను పొందుతాను, ఇది కంటే తక్కువ లేదా సమానంగా ఉంటుంది k మొత్తానికి 0 నుండి n మైనస్ 1 z వరకు ఆల్ఫా పవర్ k బార్‌తో గుణించబడుతుంది మరియు ఇది మేము ఇప్పుడు కలిగి ఉన్న ఒక సాధారణ సమ్మషన్, మేము ఇప్పుడు నిరూపించిన ప్రతిపాదనను మీరు వర్తింపజేయాలి, అది nవ మూలం మొత్తం మొత్తంగా ఏకాల యొక్క సున్నా ఇప్పుడు ఇక్కడ ఖచ్చితంగా సమ్మషన్ ఇక్కడ మేము z ను ఒక సాధారణ కారకంగా విసిరివేస్తాము మరియు మీరు కుడి వైపున పొందండి ఇది 0 నుండి n మైనస్ వరకు z రెట్లు k కంటే తక్కువ లేదా సమానం అని వ్రాస్తాను 1 ఆల్ఫా k బార్ ప్లస్ z బార్ సమ్మషన్ k 0 నుండి n మైనస్ 1 ఆల్ఫా పవర్ kకి సమానం మరియు ఈ మొత్తం 0 అని మాకు తెలుసు మరియు ఇక్కడ సంయోగాన్ని సాధారణంగా వెలుపల సమ్మషన్‌కు తీసుకోవచ్చు మరియు మొత్తం మళ్లీ అదే విధంగా ఉంటుంది అంటే సున్నా అంటే కుడి చేతి వైపు ఇప్పుడు సున్నా అవుతుంది చూడండి z స్క్వేర్ యొక్క మాడ్యులస్ అంటే ప్రతికూల పదం ఇది సున్నా కంటే తక్కువ లేదా సమానం అంటే mod z తప్పనిసరిగా సున్నా అయి ఉండాలి అంటే z సున్నా అని చెప్పడంతో సమానం కాబట్టి మేము కోరుకున్న ఫలితాన్ని నిరూపించాము అన్ని nవ మూలాల నుండి దూరం ఉన్న సంక్లిష్ట సంఖ్య ఒకటి కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన దూరాన్ని కలిగి ఉంటే, సంక్లిష్ట సంఖ్య తప్పనిసరిగా మూలం అయి ఉండాలి,
మనకు సాధారణ బహుభుజి ఇవ్వబడిన మరొక మంచి ఫలితాన్ని రుజువు చేద్దాం అది ఏ శీర్షం అంటే అది p nough p 1 వరకు pn మైనస్ 1 వరకు ఉంటుంది, ఇది యూనిట్ సర్కిల్‌పై ఉంచబడుతుంది సరే, కాబట్టి మనకు n సాధారణ బహుభుజితో ఇవ్వబడింది, ఇది ఈ ఇచ్చిన ఊహతో
యూనిట్ సర్కిల్‌పై ఉంచబడుతుంది, మేము d అని చూపించబోతున్నాం p naught నుండి p 1 వరకు p naught నుండి p 2 వరకు ఉన్న దూరం p naught నుండి p 2 వరకు దూరం వరకు p naught నుండి pn మైనస్ 1 వరకు గుణించాలి, ఈ విధంగా n పదాలను మీరు గుణిస్తే మీకు ఆసక్తికరమైన గుర్తింపు n విలువ వస్తుంది మరియు ఈ గుర్తింపును ఉపయోగించి మనం పొందబోతున్నాం n మైనస్ 1 pi by n గుర్తు వరకు n సైన్ పై ద్వారా n sine 2 pi ద్వారా n అనే చక్కటి త్రికోణమితి గుర్తింపు n విలువను n బై 2 పవర్ n మైనస్ 1 ఇస్తుంది మరియు అదేవిధంగా మనకు మరొక గుర్తింపు ఉంది , ఇక్కడ మనం తేడాను చూడవచ్చు.

pi యొక్క బేసి గుణింతాన్ని 2 nతో భాగించండి అని చెప్పండి , ఇక్కడ మనకు pi 2 pi వరుస పదాలు ఉన్నాయి కాబట్టి మనకు n మైనస్ 1 pi n వరకు ఉంటుంది, కానీ ఇక్కడ మనకు pi యొక్క బేసి గుణిజాలు 2 nతో భాగించబడితే వాటి ఉత్పత్తి మనకు 1ని ఇస్తుంది 2 పవర్ n మైనస్ 1 అనేది చాలా ఆసక్తికరమైన గుర్తింపు, ఈ ఫలితాన్ని రుజువు చేద్దాం, మనకు అందించిన సమస్య ఏమిటో చూద్దాం,
మనకు సాధారణ బహుభుజి ఉంది, ఇది యూనిట్ సర్కిల్‌లో ఉంచబడుతుంది, ఇది
p నాట్ మరియు p వన్ లాగా ఉంటుంది.
pn మైనస్ ఒకటి మనకు తెలుసు ఈ శీర్షాలను ఐక్యత యొక్క nవ మూలంగా ఎంచుకోవచ్చు, కాబట్టి సాధారణతను కోల్పోకుండా , ఇవ్వబడిన n సాధారణ బహుభుజి యూనిట్ సర్కిల్‌పై ఉంచబడిందని మనం భావించవచ్చు, తద్వారా శీర్షాలు మన ఐక్యత యొక్క nవ మూలం తప్ప మరేమీ కాదు మరియు మనకు తెలుసు మీరు ఏకత్వం యొక్క nవ మూలంలో ఒక బహుభుజిని శీర్షాలుగా ఉంచారు, అది ఒక సాధారణ బహుభుజి కాబట్టి మేము ఇప్పటికే గత ఉపన్యాసంలో చర్చించాము, ఇప్పుడు మేము రుజువు చేస్తున్న మొదటి గుర్తింపు ఏమిటంటే
మీరు p naught నుండి p వన్ మరియు p naught నుండి దూరాన్ని పరిగణించండి p రెండు నుండి మరియు ఇతర శీర్షాల కోసం p నుండి దూరం అంతటా మనం పరిగణిస్తాము మరియు దాని ఉత్పత్తిని దాని ఉత్పత్తిని తీసుకుంటాము,
జ్యామితీయంగా క్లిష్టంగా కనిపించినప్పటికీ , సంక్లిష్ట సంఖ్యల పరంగా ఒకసారి వ్రాస్తే అది తేలికగా గుర్తించబడుతుంది.
సాధారణతను కోల్పోకుండా నిరూపించడానికి , ఈ pks ఆల్ఫా పవర్ k వద్ద ఉంచబడిందని మేము ఊహిస్తాము , ఇది k అనేది 0 నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఉంటుంది, ఇది 0 నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఉంటుంది.
మీరు ఈ ఐడెంటిటీని గుర్తుచేసుకుంటే z పవర్ n మైనస్ 1ని z మైనస్ 1 ప్రోడక్ట్‌గా zతో పవర్ n మైనస్ 1 z పవర్ n మైనస్ టూకి ఫ్యాక్టర్ చేయవచ్చు, తద్వారా బహుపదిని z గా ఫ్యాక్టర్ చేయవచ్చు.
మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k ఇక్కడ ఆల్ఫా k అనేది ఐక్యత యొక్క nవ మూలం తప్ప మరేమీ కాదు కాబట్టి మేము ఈ బహుపది మూలాలు కేవలం ఆల్ఫా పవర్ k అని గమనించాము, ఇక్కడ k 1 నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఉంటుంది.
కాబట్టి మనం ఈ గుర్తింపును గుర్తుకు తెచ్చుకోబోతున్నాము.
z పవర్ నుండి n మైనస్ 1 ప్లస్ z నుండి పవర్ n మైనస్ టూ ప్లస్ z ప్లస్ వన్ ఇది ఉత్పత్తిగా వ్రాయబడింది

, దాని మూలాల ద్వారా కారకం చేయబడినట్లుగా మనం చూసిన దాని మూలాలు ఇక్కడ ఉన్నాయి, మనం ఇప్పుడు pk లేదా మన సాధారణ సంజ్ఞామానం ఆల్ఫా పవర్ k అని చెప్పవచ్చు ఐడెంటిటీ అనేది అన్ని కాంప్లెక్స్ సంఖ్యలకు 1 కి సమానమైన zని ఎంచుకుంటే, ఎడమ చేతి వైపు మనకు n పదాలు ఉంటాయి మరియు కుడి చేతి వైపు 1 నుండి n వరకు మైనస్ 1 1 మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k కి మేము దగ్గరగా ఉన్న k యొక్క ఉత్పత్తిని పొందుతాము.

మేము నిరూపించడానికి ఆసక్తి ఉన్న గుర్తింపును ఇప్పుడు అడగండి మీరే ఈ పరిమాణం ఏమిటి 1 మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k 1 అనేది ఐక్యత యొక్క మా మొదటి nవ మూలం మరియు k అనేది ఒకదానికి సమానం, ఇది కోణంతో రెండు pi n ద్వారా మనం ఇక్కడ పొందుతాము ఈ కోణం రెండు pi బై n ఈ p ఒకటి మనం ఇప్పుడు ఆల్ఫా వన్ p వన్ అని వ్రాసాము మేము దానిని ఆల్ఫా మరియు p రెండు అని వ్రాసాము మేము ఇప్పుడు ఆల్ఫా పవర్ రెండు అని వ్రాసాము నేను సంపూర్ణ విలువను తీసుకుంటే అది p naught మధ్య 1 నుండి pk వరకు ఉన్న దూరాన్ని ఇస్తుంది, అది ఆల్ఫా పవర్ k కాబట్టి మనం చూస్తాము మీరు ఈ గుర్తింపు కోసం సంపూర్ణ విలువను తీసుకుంటే, మేము కోరుకున్న గుర్తింపును పొందుతాము, అది ఈ ఉత్పత్తి k యొక్క సంపూర్ణ విలువ 1 నుండి n మైనస్ 1 1 మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k మరియు కుడి వైపు ఒక ప్రతికూల సంఖ్య కాని సంపూర్ణ విలువ మాడ్యులస్‌ను ఇస్తుంది విలువ z1 z2 యొక్క అదే మాడ్యులస్‌ను ఇస్తుంది, అది mod z2తో mod z1 ఉత్పత్తిని ఇస్తుంది కాబట్టి ఇది nకి సమానమైన మాడ్యులస్ ఫ్యాక్టర్ 1 మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k యొక్క 1 నుండి n వరకు ఉన్న k యొక్క ఉత్పత్తికి సమానం మరియు ఇది p నట్ నుండి దూరం తప్ప మరొకటి కాదు pkకి ఇది p naught p వన్ ప్రొడక్ట్, vp naught నుండి pn మైనస్ 1 మధ్య దూరం వరకు p naught p టూతో మనకు n వస్తుంది కాబట్టి ఇది మొదటి గుర్తింపును రుజువు చేస్తుంది, ఇప్పుడు మేము రెండవ గుర్తింపును నిరూపించాలనుకుంటున్నాము, ఇది sine pi ద్వారా n ఉత్పత్తికి సైన్తో ఉంటుంది n ద్వారా రెండు pi మరియు ఉత్పత్తి విలువ n ద్వారా రెండు పవర్ n మైనస్ ఒకటి , దీనిని నిరూపించడానికి మనం 1 నుండి ఆల్ఫా పవర్ k వరకు దూరం ఎంత అని లెక్కించాలి, ఇది మన సైన్ నిబంధనలను ఖచ్చితంగా పొందబోతోంది, దీని
నుండి దూరాన్ని గణిద్దాం.

ఒక మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k అంటే ఒక మైనస్ దాని చతురస్రాన్ని పరిశీలిద్దాం ఇది ఒక మైనస్ కాస్ టూ k pi బై n మైనస్ ఐ సైన్ 2 k pi బై n దీని మోడ్ స్క్వేర్ మనం దానిని 1 మైనస్ కాస్ రెండు k pi ద్వారా n మూడు మొత్తం స్క్వేర్‌గా పొందుతాము.

రియల్ పార్ట్ స్క్వేర్ ప్లస్ ఇమాజినరీ పార్ట్ స్క్వేర్ టు n స్క్వేర్ బై n స్క్వేర్ అని ఒకసారి విస్తరింపజేస్తే మనకు కాస్ స్క్వేర్ అనే పదం వస్తుంది మరియు మనకు సైన్ స్క్వేర్ టర్మ్ ఉంది, అది ఒకటి ఇస్తుంది మరియు మనకు ఇక్కడ మరో టర్మ్ ఒకటి ఉంది కాబట్టి కలిసి మనకు 2 మైనస్ 2 సార్లు వస్తుంది n ద్వారా cos 2 k pi ఇప్పుడు మీరు మరింత ముందుకు 1 మైనస్ కాస్ 2 తీటా ఐడెంటిటీని ఉపయోగించండి 2 సైన్ స్క్వేర్ తీటా అని వ్రాయవచ్చు కాబట్టి ఇది n ద్వారా 2 సైన్ స్క్వేర్ k piకి 2 రెట్లు వస్తుంది కాబట్టి ఇప్పుడు kk విలువ 1 నుండి n మైనస్ ఒకటి వరకు ఉందో గమనించండి.

0 నుండి n మైనస్ 1 1 నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఒక మైనస్ ఆల్ఫా పవర్ k స్క్వేర్‌ని నాలుగు రెట్లు sine k pi ద్వారా n స్క్వేర్‌తో లెక్కించారు.

కాబట్టి ఇది p naught నుండి pk మధ్య దూరం సైన్ యొక్క మాడ్యులస్ యొక్క రెండు రెట్లు ఇవ్వబడిందని సూచిస్తుంది.

k pi by n 1 నుండి n మైనస్ 1 వరకు ఉంటుంది కాబట్టి ఇప్పుడు మీరు ఆర్గ్యుమెంట్‌ని చూస్తారు ఇక్కడ ఆర్గ్యుమెంట్ విలువ 0 నుండి pi వరకు మారుతుంది కాబట్టి k pi విలువ s pi n నుండి n మైనస్ 1 pi బై n కంటే తక్కువగా ఉంటుంది లేదా piకి సమానం మరియు అదే విధంగా ఇది ఈ ఆర్గ్యుమెంట్ కింద 0 కంటే ఎక్కువ లేదా సమానంగా ఉంటుంది సంకేత విలువ ఎల్లప్పుడూ ప్రతికూలంగా ఉండదు కాబట్టి మనం sine రెండు రెట్లు సైన్ k piని n ద్వారా పొందుతాము, ఇది p నుండి pkకి ఉన్న దూరం తప్ప మరొకటి కాదు.

మునుపటి నిరూపించబడిన గుర్తింపు, ఇది p naught p ఒకటి, ఇది రెండు పాపం e pi బై n ప్రొడక్ట్‌తో రెండు సైన్ టూ పై బై n మరియు రెండు రెట్లు సైన్ n మైనస్ 1 పై బై n ఉత్పత్తితో ఉత్పత్తి n కాబట్టి మనం ఆ సైన్ పై ఉత్పత్తిని n సైన్ టూ పై బై n నుండి సైన్ n మైనస్ 1 పై వరకు చూస్తాము.

n ద్వారా మనకు n 2 పవర్ n మైనస్ 1 వస్తుంది, ఇది అవసరమైన గుర్తింపు కాబట్టి మేము మూడవ గుర్తింపును నిరూపించడానికి రెండవదాన్ని నిరూపించాము, నేను పరిగణించిన సూచనను ఇస్తాను కాబట్టి మనం కోరుకున్న గుర్తింపుకు తిరిగి వెళ్లాం మునుపటి గుర్తింపు కంటే మనం సైన్ పైని 2 n ద్వారా
ఇక్కడకు వచ్చామని నిరూపించడానికి, ఈ నిర్దిష్ట పదాన్ని పొందడానికి రెండు n సాధారణ బహుభుజాలు ఈ గుర్తింపును వర్తింపజేస్తాయని మేము పరిగణిస్తాము, అంటే n సంఖ్యను రెండు n సరే అని రెండుసార్లు తీసుకుంటాము.

n మీరు ఒక సాధారణ బహుభుజి వలె పరిగణించి , ఆపై ఈ గుర్తింపును ఉపయోగించాలి మరియు కనీస తారుమారుతో మేము మూడవ గుర్తింపును నిరూపించగలము కాబట్టి నేను రుజువును దాటవేస్తాను కాబట్టి ఈ ఉపన్యాసంలో మేము ఐక్యత యొక్క n వ మూలం మరియు మేము పరిష్కరించిన కొన్ని సమస్యల ఆధారంగా అనేక ప్రతిపాదనలను చూశాము.

u యొక్క nవ మూలంలో ఉంది nity అలాగే మేము మంచి త్రికోణమితి గుర్తింపులను చూశాము, వీటిని మేము

తదుపరి ఉపన్యాసంలో ఐక్యత యొక్క n  వ మూలాన్ని ఉపయోగించి నిరూపించగలము, దీనిపై మరిన్ని సమస్యలను చర్చిస్తాము ధన్యవాదాలు