

ਹੈਲੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਪਿਛਲੇ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਲੈਕਚਰਾਂ ਵਿੱਚ ਸੁਆਗਤ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਏਕਤਾ ਦੇ 9ਵੇਂ ਮੂਲ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਈ ਪਛਾਣਾਂ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਆਓ ਇਸ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਜਾਰੀ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ ਆਓ ਮੈਂ ਏਕਤਾ ਦੀ 9ਵੀਂ ਜੜ੍ਹ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਾਂ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ  $z$  ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ  $n$  ਦੀ ਤਾਕਤ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਕਲਾਸਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ  $n$  ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੰਪਲੈਕਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ  $zk$  ਵਜੋਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ  $2k \pi \text{ by } n \text{ plus } i \text{ sine } 2$  ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।  $nk$  ਦੁਆਰਾ  $k \pi \theta$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਹ  $zk$  ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ  $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $1k$  ਹੈ ਇਸਲਈ ਤੁਸੀਂ  $k$  ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸਮਝਦੇ ਹੋ ਜੋ  $z$  ਇੱਕ ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਪਲੱਸ  $i$  ਸਾਈਨ  $2$  ਦਾ  $\cos$  ਹੈ।  $\pi$  ਹੁਣ  $n$  ਦੁਆਰਾ ਇਸਦੀ ਪਾਵਰ  $k$  ਲਓ ਜੋ ਏਕਤਾ ਦੇ ਦੂਜੇ  $n$ ਵੇਂ ਰੂਟ ਨੂੰ ਉਤਪੰਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਹੂਲਤ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨੋਟੇਸ਼ਨ  $\text{cis}$  ਥੀਟਾ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਨੂੰ  $\cos \theta \text{ plus } i \sin \theta$  ਵਜੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਪਾਵਰ  $k$  ਨੂੰ ਸਿਰਫ  $d$  ਮੋਰਿਸ ਲਾਅ ਦੁਆਰਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖੇ ਕਿ ਇਹ  $c$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ  $k \theta$  ਹੈ ਅਤੇ ਆਓ ਆਪਾਂ ਕੁਝ ਟਿੱਪਣੀਆਂ ਕਰੀਏ ਜੋ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪੁਟ ਅਲਫ਼ਾ ਨੂੰ  $z$   $1$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ  $\text{cis } 2 \pi \text{ by } n$  ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਲਫ਼ਾ ਲਈ  $n$  ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਨੂੰ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਜੋ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਉਹ ਹੈ  $\text{cis } 2 \pi$  ਬਾਇ  $n$  ਪਾਵਰ  $n$  ਦੁਆਰਾ ਉੱਪਰਲੇ ਨਿਯਮ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $\text{cis } 2 \pi$  ਜੋ ਕਿ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ  $\cos 2 \pi \text{ plus } i \sin 2 \pi$  ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪਾਵਰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $kn$  ਨੂੰ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਪਾਵਰ  $k$  ਲਈ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $n$  ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਨਿਰੀਖਣ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਕੀ ਦੁਬਾਰਾ  $ks$  ਲਈ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ  $k$  ਨੈਗੇਟਿਵ ਮੁੱਲ ਲਈ ਦੇਖ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ  $k$  ਲਈ ਕਹੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਅਤੇ ਪਾਵਰ  $n$  ਨੂੰ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕੋਈ ਇਹ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $n$  ਪਾਵਰ  $k$  ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਜੋ ਦੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਨਿਯਮ ਦਾ ਸਾਰ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ  $n$  ਦੇ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ  $kn$  ਹੈ ਇਹ ਸਾਰੇ  $k$  ਲਈ ਇੱਕ ਹੈ ਪੁਰਨ ਅੰਕ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਟਿੱਪਣੀ ਆਉ ਅਸੀਂ ਏਕਤਾਵਾਂ ਦੇ ਇਹਨਾਂ  $n$ ਵੇਂ ਮੂਲ ਨੂੰ ਲਿਖੀਏ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ ਵਜੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।  $k$  ਨਾਲ  $k$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਤੱਕ ਏਕਤਾ ਦੀਆਂ ਸਾਡੀਆਂ  $n$ ਵੀਂ ਜੜ੍ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ  $k$  ਪਾਵਰ  $n$  ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ  $z$  ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਦੇਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਜੜ੍ਹ ਹੈ  $z$  ਪਾਵਰ  $n$  ਲਈ  $k$  ਲਈ ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਇੱਕ ਤੋਂ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਤੱਕ ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੇ ਗਏ  $n$  ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਲਈ ਰੂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ  $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ ਇਸ ਨੂੰ  $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਦੇ ਨਾਲ  $z$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਫੈਕਟਰਾਈਜ਼ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।  $1$  ਪਲੱਸ  $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ  $2$ . ਇਸਲਈ ਆਸਾਨ ਗਣਨਾ ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਦੀ ਸਾਈਡ  $z$  ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਹੈ ਜੋ ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਰਕਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $z$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਰੂਟ ਹੈ। ਬਹੁਪਦ ਲਈ ਅਸੀਂ ਮਿਆਦ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕਾਰਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਕ ਬਣਾਇਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਡਿਗਰੀ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਇਸ ਲਈ  $k$  ਤੋਂ ਇੱਕ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਤੱਕ ਅਲਫ਼ਾ  $k$  ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਮੂਲ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ ਦੂਜੇ ਨਿਰੀਖਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$   $zn$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਪਲੱਸ  $zn$  ਮਾਇਨਸ  $2$  ਪਲੱਸ  $z$  ਪਲੱਸ ਵਨ ਦਾ ਮੂਲ ਹੈ  $k$  ਲਈ ਇੱਕ ਦੇ ਤੋਂ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਤੱਕ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ  $z$  ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਪਲੱਸ  $z$  ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $2$  ਪਲੱਸ  $z$  ਪਲੱਸ  $1$  ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $z$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ  $z$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ ਵਰਗ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ  $z$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ,

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇੱਕ ਛੋਟੇ ਸੰਕੇਤ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਪਲੱਸ ਤੱਕ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਪਲੱਸ  $z$  ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ  $2$  'ਤੇ ਗੁਣਕ ਜਾਂ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲਸ।  $z$  ਪਲੱਸ  $1$  ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਯੂਨੀਟੀਜ਼ ਪਾਵਰ  $k$  ਦੇ  $n$ ਵੇਂ ਮੂਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਫੈਕਟਰਾਈਜ਼ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦਲੀਲ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਡਿਗਰੀ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਮੂਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਉਹ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਮੂਲ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖਿਆ ਹੈ। ਏਕਤਾ ਦਾ ਵੱਖਰਾ  $n$ ਵਾਂ ਮੂਲ ਇਹਨਾਂ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਜੜ੍ਹ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਟਿੱਪਣੀ ਦੇ ਨਾਲ ਗੁਣਕ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਸਮੱਸਿਆ ਵੱਲ ਵਧੀਏ ਇੱਕ ਕਾਮੇ  $b$  ਜਿੱਥੇ  $a$  ਅਤੇ  $b$  ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $i$   $t$  ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ  $a$  ਪਲੱਸ  $ib$  ਪਾਵਰ  $2016$  ਇੱਕ ਘਟਾਓ  $ib$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਇਸਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕਾਮੇ  $b$  ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਾ ਇੱਕ ਕੌਮਾ  $b$  ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ  $r$  ਦੇ ਕਾਰਟੇਸ਼ੀਅਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਾਮੇ  $b$  ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ  $a$  ਪਲੱਸ  $ib$  ਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਸਬੰਧ ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇਸਲਈ  $z$  ਨੂੰ ਇੱਕ ਜੋੜ  $ib$  ਸਮਝੋ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਰਹੇ ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਕੰਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ  $z$  ਲਈ ਜਿਸਦੀ ਪਾਵਰ  $2016$  ਸਾਨੂੰ  $z$  ਬਾਰ ਦੇਣੇ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸੈੱਟ ਲਈ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕੌਮਾ  $b$  ਜੋੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਆਓ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਤੋਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ। ਨਿਰੀਖਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਮਾਡਿਊਲਸ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $2016$  ਦਾ ਮਾਡਿਊਲਸ  $z$  ਬਾਰ ਦੇ ਮਾਡਿਊਲਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਮਾਡ  $z$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ  $t \text{ hat mod } z$  ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਲਿਆਓ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $2016$  ਮਾਇਨਸ ਮਾਡ  $z$  ਹੈ ਇਹ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੀ ਬਹਿਸ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਸਬੰਧ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਨਾਲ ਮਾਡ  $z$  ਉਤਪਾਦ  $\text{mod } z$  ਪਾਵਰ  $2015$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਇਹ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸ ਸਬੰਧ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ  $\text{mod } z$  ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ  $\text{mod } z$  ਪਾਵਰ ਦੇ ਹਜ਼ਾਰ ਪੰਦਰਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਬੰਧ ਜਾਂ ਤਾਂ  $\text{mod } z$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ  $r \text{ mod } z$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਾਵਰ ਦੇ ਹਜ਼ਾਰ ਪੰਦਰਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ  $\text{mod } z$  ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $z$  ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਤਾਂ ਆਓ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜੇਕਰ  $z$  ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਤਾਂ  $\text{mod } z$  ਪਾਵਰ  $2015$  ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮਾਡ  $z$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਮੋਡਜ਼ ਐਟ ਪਾਵਰ  $2015$  ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਮੈਨ ਲਓ ਕਿ ਮਾਡ  $z$  ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਰੰਤ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤੁਸੀਂ ਤੁਰੰਤ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਮਾਡ  $z$  ਪਾਵਰ ਦੇ ਹਜ਼ਾਰ ਪੰਦਰਾਂ ਇੱਕ ਓਕੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਤਾਂ ਇਸ ਦਲੀਲ ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਆਈ  $\text{mmedially mod } z$  ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਪਾਵਰ ਇੱਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਤੋਂ

ਇਸ ਲਈ ਹੁਣ ਮਾਡਜ਼ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦੇ ਮਾਮਲੇ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੇਕਰ  $\text{mod } z$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ  $\text{mod } z$  ਵਰਗ ਦੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਤੁਰੰਤ ਦੱਸੇਗਾ ਕਿ ਅਸੀਂ  $z$  ਬਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।  $\text{mod } z$  ਵਰਗ ਨੂੰ  $z$  ਵਿੱਚ  $z$  ਵਿੱਚ  $z$  ਬਾਰ ਜੋ ਕਿ  $z$  ਬਾਰ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਹੁਣ ਇਸ ਕੇਸ ਦੇ ਤਹਿਤ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਨ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਕੰਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ ਨੂੰ ਇਸ  $z$  ਬਾਰ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕੇਸ ਵਿੱਚ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਮਾਡ  $z$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ  $z$  ਬਾਰ ਇੱਕ ਤੋਂ  $z$  ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ  $z$  ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਦੇ ਹਜ਼ਾਰ ਸਤਾਰਾਂ ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਹੱਲ ਕੀ ਹਨ ਇਹ ਏਕਤਾ ਦੀ  $n$ ਵੀਂ ਜੜ੍ਹ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿੱਥੇ  $n$  ਹੈ।  $2017$ .

ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇ ਹਜ਼ਾਰ ਸੱਤਰ ਵੱਖਰੇ ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਹੱਲ ਹਨ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ  $z$  ਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਵੀ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $z$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਵੀ ਇੱਕ ਸਿੱਟੇ ਵਜੋਂ ਹੱਲ  $1$  ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ  $1$  ਏ  $s$   $2018$  ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖਰੇ ਹੱਲ ਆਓ ਅਸੀਂ ਏਕਤਾ ਦੀ  $n$ ਵੀਂ ਜੜ੍ਹ ਲਈ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਵੇਖੀਏ ਏਕਤਾ ਦੀ  $9$ ਵੀਂ ਜੜ੍ਹ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜੋ ਕਿ  $\text{cis } 2 \pi k \pi$  ਦੁਆਰਾ  $n$  ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ  $zk$  ਵਜੋਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿੱਥੇ  $k$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਹੈ ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ ਦੀਆਂ ਸ਼ਕਤੀਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ  $m$  ਸਿਖਰ ਦੁਆਰਾ ਏਕਤਾਵਾਂ ਦਾ  $n$ ਵਾਂ ਮੂਲ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $n$  ਜਾਂ  $0$  ਸਾਨੂੰ  $n$  ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਪਾਵਰ  $m$   $n$  ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ ਜੋ ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਹੈ ਕਿ  $n$   $m$  ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਜੋੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ  $0$  ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸਤਾਵ  $zk$  ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰੀਏ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ

ਪਹਿਲਾਂ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ ਅਲਫ਼ਾ  $s$  ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ  $2\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਅਤੇ  $k$  ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਹੈ ਹੁਣ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $z$  ਤੱਕ ਜੋੜ  $k$  ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖੋ। ਪਾਵਰ  $kz$  ਪਾਵਰ  $m$  ਜੋ ਕਿ  $k$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ  $zk$  ਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਅਤੇ ਪਾਵਰ  $m$  ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਦੇ ਜੋੜ  $k$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਹੁਣ ਇਹ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਵਧੀ ਹੋਈ ਪਾਵਰ  $k$  ਨਾਲ ਹੁਣ ਜੋੜ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ ਜਿਓਮੈਟ੍ਰਿਕ ਜੋੜ ਅਸੀਂ ਹਾਂ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੋੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਿਵੇਂ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਸ਼ਾਇਦ ਇੱਕ ਟਿੱਪਣੀ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੈਂ ਸਿਰਫ਼ ਉਸ ਜਿਓਮੈਟ੍ਰਿਕ ਜੋੜ ਜੋੜ ਨੂੰ  $k$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜੋੜਾਂਗਾ ਤਾਂ ਆਓ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਜਿਓਮੈਟ੍ਰਿਕ ਜੋੜ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ, ਆਓ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ ਦੱਸੀਏ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $a$  ਦੀ ਪਾਵਰ  $k$  ਦਾ ਜੋੜ ਮੁੱਲ ਹੈ  $n$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਨੂੰ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਠੀਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੋੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਥੇ ਲਾਗੂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਜੋੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਥੇ  $a$  ਹੈ ਇੱਥੇ ਫਿਕਸਡ ਵੈਲਯੂ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਇਸਦੀ ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਦੁਆਰਾ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਹੁਣ ਮੈਨੂੰ ਅਗਲੇ ਪੰਨੇ ਦੇ ਜੋੜ  $k$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ  $z$  ਪਾਵਰ  $k$  ਵਿੱਚ ਉਹੀ ਜੋੜ ਮੁੱਲ ਲਿਖਣ ਦਿਓ। ਪਾਵਰ  $m$  ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਦੁਆਰਾ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਨੋਟਿਸ ਕਿ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ  $m$   $n$  ਓਕੇ ਦੁਆਰਾ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਫਾਰਮੂਲਾ ਵੈਧ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$   $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਾਨਤਾ ਉਦੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ  $nm$   $n$  ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ  $n$   $m$  ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $m$   $n$  ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਇੱਕ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸਲਈ ਸਮੀਕਰਨ  $k$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਇੱਕ  $z$  ਪਾਵਰ  $k$  ਹੈ। ਪਾਵਰ  $m$  ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $n$  ਪਾਵਰ  $m$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $m$  ਮਾਇਨਸ ਵਨ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $n$  ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੈਰ-ਜ਼ੀਰੋ ਮਾਤਰਾ ਹੈ ਜਦੋਂ  $n$  ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।  $m$  ਨੂੰ ਵੰਡੋ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ  $n$   $m$  ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਮੰਨ ਲਓ  $n$   $m$  ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $m$  ਨੂੰ  $n$  ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਜ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ  $k$   $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $z$  ਤੱਕ ਪਾਵਰ  $k$  ਦਾ ਸਾਨੂੰ ਪਾਵਰ ਵਧਾਉਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ।  $m$  ਜੋ ਕਿ  $qn$  ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਨੋਟ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਏਕਤਾ ਦੀ  $n$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਇਸਦੀ  $n$  ਪਾਵਰ ਦਾ ਗੁਣਜ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਹੋਵੇਗਾ ਇਸਲਈ ਇਸਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਵਜੋਂ ਵੀ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ਇਹ  $kq$  ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ  $raise\ power\ kq$  ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਹੈ ਜੋੜ ਦਾ ਮੁੱਲ  $n$  ਹੈ ਜੇਕਰ  $m$   $m$  ਹੈ  $n$  ਦਾ ਅਲਟੀਪਲ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਏਕਤਾਵਾਂ ਦੇ  $n$  ਵੱਲ ਜੜ੍ਹ ਨੂੰ ਤਾਕਤ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹੋ  $m$  ਇਸ ਨੂੰ ਏਕਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ  $n$  ਵੱਲ ਮੂਲ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਮੁੱਲ  $n$  ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਬਸ਼ਰਤ  $m$   $n$  ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੋਵੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ  $0$  ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਆਓ ਵੇਖੀਏ  $a$   $m$  ਮੁੱਲ ਦੇ ਨਾਲ ਬਹੁਤ ਖਾਸ ਕੇਸ ਇੱਕ ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ  $m$  ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨੋ ਜੇਕਰ  $n$  ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ  $m$  ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ  $k$  ਤੋਂ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $z$  ਪਾਵਰ  $k$  ਦਾ ਜੋੜ ਮੁੱਲ ਜਿੱਥੇ  $m$  ਨੂੰ  $1$  ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਜੋੜ ਦਾ ਮੁੱਲ  $0$   $n$  ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਹੁਣ ਲਿਖੋ ਕਿ ਇਹ  $zkzk$  ਕੀ ਹੈ ਪਰ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ  $\cos\ 2k\pi$   $plus\ i\ \sin\ 2k\pi$  ਇਹ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਸ ਅਸਲ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ  $0$  ਹੈ ਅਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜ਼ੀਰੋ ਦਾ ਕਾਲਪਨਿਕ ਹਿੱਸਾ ਗਣਨਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਸਲ ਹਿੱਸਾ ਕੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $k$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ  $\cos$  ਦੇ  $k\pi$  ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਸਲ ਹਿੱਸਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਹਿੱਸਾ ਜੋ  $si$  ਹੈ  $ne\ 2k\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਇਹ  $0$  ਹੈ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖਦਾ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ  $k$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ  $\cos$  ਜ਼ੀਰੋ ਲਈ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਬਾਕੀ ਸ਼ਬਦ ਜੋ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਥੇ ਹਨ ਇਹ ਦੋ  $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਪਲੱਸ  $\cos$  ਚਾਰ ਪਾਈ ਬਾਇ  $n$  ਅਤੇ ਟਿਲ ਕੇਸ ਹੈ।  $2n$  ਘਟਾਓ  $1\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਦਾ ਮੁੱਲ ਘਟਾਓ  $1$  ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ  $k$  ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਬਦਲ ਕੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਪਛਾਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਜੋੜ ਮੁੱਲ  $0$  ਹੈ ਬਾਕੀ ਦੇ ਕਾਰਕ ਸਾਨੂੰ  $\sin$  ਦੇ  $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਸਾਇਨ ਚਾਰ ਪਾਈ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।  $n$  ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਪਦ ਸਾਈਨ ਦੇ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਪਾਈ ਬਾਇ  $n$  ਦਾ ਮੁੱਲ  $0$  ਹੈ। ਇਸਲਈ ਖਾਸ ਕੇਸ ਪਾਵਰ  $m$  ਬਰਾਬਰ  $1$  ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਪਛਾਣ ਮਿਲੀ ਹੈ ਆਓ ਇਸ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਸਮੱਸਿਆ ਕਰੀਏ ਜੋ ਅਸੀਂ ਅਲਫ਼ਾ ਨੂੰ ਸੀਆਈਐਸ  $2$  ਵਜੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।  $n$  ਦੁਆਰਾ  $\pi$  ਏਕਤਾ ਦੀ  $n$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਸੰਖਿਆ  $z$  ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਏਕਤਾ ਦੇ  $n$  ਵੱਲ ਰੂਟ ਤੋਂ  $z$  ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਮਾਪਦੇ ਹੋ ਜੋ ਕਿ ਏਕਤਾ ਦੇ ਸਾਰੇ  $n$  ਵੱਲ ਮੂਲ ਤੋਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ  $az$  ਇਸ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ  $z$   $mus$  ਦੀ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਆਓ ਅਸੀਂ ਤਸਵੀਰ ਵਿੱਚ ਦੇਖਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ  $k$  ਬਰਾਬਰ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ, ਇੱਕ ਕਰੋ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੂਰੀ ਇੱਕ ਤੋਂ  $z$  ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਦੂਰੀ ਕੀ ਹੈ ਇਹ ਇਕਾਈ ਹੈ। ਇੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਵੀ ਇੱਥੇ ਇਹ ਇਕਾਈ ਹੈ ਹੁਣ  $z$  ਕੰਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ ਇੱਕ ਤੋਂ  $1$  ਦੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਇੱਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਓ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਚੱਕਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਹੁਣ  $z$  ਕਿਤੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਲਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਰੋ ਅਲਫ਼ਾ ਜੋ ਏਕਤਾ ਦੀ  $9$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਵਿੱਚ ਹੈ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗੋਲਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋ ਇੱਕ ਫਿਰ  $z$  ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਏਕਤਾ ਦੀ ਹਰ  $9$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਨਾਲ ਏਕਤਾ ਦੀ  $9$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ। ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹੀ ਕੋਈ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ ਮੂਲ ਹੈ ਆਓ ਅਸੀਂ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ ਕਿ  $z$  ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ  $1$  ਤੱਕ  $k$  ਇੱਕ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਤੱਕ

ਇਸ ਲਈ ਹੁਣ ਮੈਂ  $k$  ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਲ ਫਿਕਸ ਕਰਦਾ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਵਿੱਚ ਹੈ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੋਡ  $z$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਜਿਸਦਾ ਵਰਗ ਜੋ ਕਿ ਹਰ ਗੁਣਕ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਦੁਬਾਰਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਮਿਆਦ ਘੱਟ ਹੈ। ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਦੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਲਈ ਉਤਪਾਦ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਹੁਣ ਇਸ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਫੈਲਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ ਇਹ  $z$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ  $kz$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ  $k$  ਬਾਰ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦ ਘੱਟ ਹੈ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁਣ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰੋ ਇਹ ਮਾਡ  $z$  ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਸ਼ਬਦ  $z$  ਅਲਫ਼ਾ  $k$  ਬਾਰ ਮਾਇਨਸ  $z$  ਬਾਰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਪਲੱਸ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ  $k$  ਵਰਗ ਦਾ ਮਾਡਿਊਲਸ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਹੈ ਏਕਤਾ ਦਾ  $n$  ਵਾਂ ਰੂਟ ਜੋ ਯੂਨਿਟ ਸਰਕਲ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਮੁੱਲ ਦਾ ਮਾਡਿਊਲਸ ਇੱਕ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $mod\ z$  ਵਰਗ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ  $i$  ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ਇਹ  $z$  ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਬਾਰ ਹੈ ਪਲੱਸ  $z$  ਬਾਰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਜਿੱਥੇ  $k$  ਮੁੱਲ ਹਨ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ ਸਮਾਨ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸਿਰਫ਼ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਸਦਾ ਕੀ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ  $k$  ਨੂੰ  $0$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ, ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਖਾਸ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਏਕਤਾ ਦਾ ਪਹਿਲਾ  $n$  ਵਾਂ ਮੂਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਇਹ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੈ  $k$  ਬਰਾਬਰੀ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੈ  $k$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰੋ ਤੁਸੀਂ ਅਲਫ਼ਾ ਬਾਰ ਅਤੇ  $z$  ਬਾਰ ਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ  $n$  ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ  $n$  ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਇਸ  $n$  ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਜੋੜਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਮੋਡ  $z$  ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਇਹ ਇਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ  $k$  ਦਾ ਜੋੜ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $z$  ਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਬਾਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਪਲੱਸ ਇਹ ਇੱਕ ਆਮ ਜੋੜ ਹੈ ਜੋ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੁਣ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਸ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਹੁਣੇ ਸਾਬਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ  $n$  ਵੱਲ ਮੂਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਹੁਣ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਥੇ ਬਿਲਕੁਲ ਉਹੀ ਸਮੇਸ਼ਨ ਹੈ ਜੋ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ  $z$  ਨੂੰ ਇੱਕ ਆਮ ਗੁਣਕ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਤੁਸੀਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਆਉਂਦੇ ਹੋ, ਮੈਨੂੰ ਇਹ ਲਿਖਣ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਮਾਇਨਸ ਤੱਕ  $z$  ਗੁਣਾ ਸਮੇਸ਼ਨ  $k$  ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।  $1$  ਅਲਫ਼ਾ ਕੇ ਬਾਰ ਪਲੱਸ  $z$  ਬਾਰ ਸਮੇਸ਼ਨ  $k$  ਬਰਾਬਰ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਜੋੜ  $0$  ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਾਹਰ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੋੜ ਦੁਬਾਰਾ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਜੋ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਸੱਜੇ। ਹੈਂਡ ਸਾਈਡ ਜ਼ੀਰੋ ਬਣ ਗਿਆ ਹੁਣ ਦੇਖੋ ਕਿ  $z$  ਵਰਗ ਦਾ ਮਾਡਿਊਲਸ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਗੈਰ- ਨੈਗੇਟਿਵ ਸ਼ਬਦ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਮਾਡ  $z$  ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਹੈ ਕਿ  $z$  ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਆਪਣਾ ਇੱਛਿਤ ਨਤੀਜਾ ਸਾਬਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਕਿ ਜੇਕਰ ਏਕਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ  $n$  ਵੱਲ ਮੂਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨਾਲ ਹੈ, ਤਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ

ਮੂਲ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਧੀਆ ਨਤੀਜਾ ਸਾਬਤ ਕਰੀਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਆਓ ਕਾਲ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਕੀ ਸਿਰਲੇਖ ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $p n$  minus 1 ਤੱਕ  $p$  naught  $p$  1 ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਕਾਈ ਸਰਕਲ 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ  $n$  ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਕਾਈ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਧਾਰਨਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ  $d$   $p$  naught ਤੋਂ  $p$  1 ਤੱਕ ਦਾ distance  $p$  naught ਤੋਂ  $p$  2 ਦੀ ਦੂਰੀ ਨਾਲ  $p$  naught ਤੋਂ  $p n$  ਘਟਾਓ 1 ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ  $n$  ਸ਼ਬਦਾਂ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਮੁੱਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ  $n$  ਜੋ ਦਿਲਚਸਪ ਪਛਾਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਪਛਾਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਚੰਗੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਪਛਾਣ ਜੋ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ  $\sin \pi$  by  $n$   $\sin 2 \pi$  by  $n$  ਤੱਕ ਚਿੰਨ੍ਹ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਮੁੱਲ  $n$  ਬਾਇ  $2$  ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਛਾਣ ਹੈ ਜੋ ਅੰਤਰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕਰੋ  $\pi$  ਦੇ ਅੰਡ ਗੁਣਨ ਨੂੰ  $2 n$  ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਦੀ ਬਜਾਏ ਇੱਥੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ  $\pi$   $2 \pi$  ਹਨ ਇਸਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਤੱਕ ਹੈ ਪਰ ਇੱਥੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $2 n$  ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ  $\pi$  ਦੇ ਬੇਜੇਜ਼ ਗੁਣਨ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਸਾਨੂੰ  $1$  ਦਿੰਦਾ ਹੈ।  $2$  ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਜੋ ਕਿ ਬਹੁਤ ਦਿਲਚਸਪ ਪਛਾਣ ਹੈ, ਆਓ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰੀਏ, ਆਓ ਇਹ ਦੇਖਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਯੂਨਿਟ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ  $p$  naught ਅਤੇ  $p$  one ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ  $p n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਿਰਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਏਕਤਾ ਦੇ  $n$  ਵੇਂ ਰੂਟ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸਲਈ ਸਾਧਾਰਨਤਾ ਦੇ ਨੁਕਸਾਨ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ  $n$  ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ ਇਕਾਈ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਸਿਖਰ ਏਕਤਾ ਦੀ ਸਾਡੀ  $n$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਏਕਤਾ ਦੇ  $n$  ਵੇਂ ਰੂਟ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਨੂੰ ਸਿਰਲੇਖਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਿਛਲੇ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਹੁਣ ਪਹਿਲੀ ਪਛਾਣ ਜੋ ਅਸੀਂ ਸਾਬਤ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਹ ਹੈ ਤੁਸੀਂ  $p$  naught ਤੋਂ  $p$  one ਅਤੇ  $p$  naught ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹੋ।  $p$  ਦੇ ਤੱਕ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਸਿਰਿਆਂ ਲਈ  $p$  ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦ ਦਿੰਦਾ ਹੈ  $n$  ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਿਖਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਿਓਮੈਟ੍ਰਿਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਪਰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਬਹੁਤ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਆਸਾਨ ਪਛਾਣ ਹੈ। ਸਾਧਾਰਨਤਾ ਦੇ ਨੁਕਸਾਨ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ  $p$   $k$   $s$  ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  'ਤੇ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਏਕਤਾ  $k$  ਦਾ  $n$  ਵਾਂ ਮੁਲ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ ਹੈ। ਹੁਣ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜੋ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਇੱਕ ਟਿੱਪਣੀ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜ਼ਿਕਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਸਾਡੀ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ  $z$  ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਨੂੰ  $z$  ਘਟਾਓ  $1$  ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਨਾਲ  $z$  ਦੀ ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ ਦੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ  $z$  ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਕ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਜਿੱਥੇ ਅਲਫ਼ਾ  $k$  ਏਕਤਾ ਦੀ  $n$  ਵੀ ਜੜ੍ਹ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਜੜ੍ਹਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਹਨ ਜਿੱਥੇ  $k$   $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਨ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੀ ਹੈ।  $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਪਲੱਸ  $z$  ਤੋਂ ਪਾਵਰ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $2$  ਪਲੱਸ  $z$  ਪਲੱਸ ਵਨ ਇਹ ਇਸ ਦੇ ਉਤਪਾਦ ਵਜੋਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਜੜ੍ਹਾਂ ਦੁਆਰਾ ਫੈਕਟਰਾਈਜ਼ਡ ਵਜੋਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਜੜ੍ਹਾਂ ਇੱਥੇ ਹਨ ਅਸੀਂ  $p$   $k$  ਜਾਂ ਸਾਡੀ ਆਮ ਸੰਕੇਤ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਹੁਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਪਛਾਣ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ ਬਸ  $1$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ  $z$  ਚੁਣੋ ਫਿਰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $n$  ਸ਼ਬਦ ਹਨ ਸਾਨੂੰ  $n$  ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਸੀਂ  $k$  ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ  $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇ ਨੇੜੇ ਹਾਂ ਪਛਾਣ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਹੁਣ ਪੁੱਛੋ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਇਹ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ  $1$  ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$   $1$  ਸਾਡੀ ਏਕਤਾ ਦਾ ਪਹਿਲਾ  $n$  ਵਾਂ ਮੁਲ ਹੈ ਅਤੇ  $k$  ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ ਕੋਣ ਵਾਲਾ ਕੋਣ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦੇ  $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਹੈ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ ਇਹ ਕੋਣ ਦੇ  $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਇਹ  $p$  ਇੱਕ ਹੈ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਅਲਫ਼ਾ ਇੱਕ ਪੀ ਵਨ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਅਲਫ਼ਾ ਅਤੇ ਪੀ ਟੂ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਅਸੀਂ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ ਦੇ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਪੂਰਨ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦਾ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ  $p$  naught ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $1$  ਤੋਂ  $p$   $k$  ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪਛਾਣ ਲਈ ਪੂਰਨ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸਾਡੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਪਛਾਣ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਉਤਪਾਦ  $k$  ਦਾ  $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਦਾ ਪੂਰਨ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਗੈਰ-ਨੈਗੇਟਿਵ ਨੰਬਰ ਹੈ ਪੂਰਨ ਮੁੱਲ ਮਾਡਿਊਲਸ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਮੁੱਲ  $z$   $1$   $z$  ਦਾ ਉਹੀ ਮਾਡਿਊਲਸ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ  $\text{mod } z$   $2$  ਦੇ ਨਾਲ  $\text{mod } z$   $1$  ਉਤਪਾਦ ਦੇਵੇਗਾ, ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮਾਡਿਊਲਸ ਫੈਕਟਰ  $1$  ਮਾਇਨਸ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਦੇ  $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਗੁਣਨਫਲ  $k$  ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $n$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਅਤੇ ਇਹ  $p$  ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ  $p$   $k$  ਕਰਨ ਲਈ ਇਹ  $p$  naught  $p$  ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਹੈ  $p$  naught  $p$  ਦੇ ਨਾਲ  $v$   $p$  naught ਤੋਂ  $p$   $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ  $n$  ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ ਪਹਿਲੀ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਜੀ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ ਜੋ  $\sin$  ਨਾਲ  $\sin \pi$  by  $n$  ਉਤਪਾਦ ਹੈ। ਦੋ ਪਾਈ ਬਾਇ  $n$  ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਤਪਾਦ ਦਾ ਮੁੱਲ  $n$  ਬਾਇ ਦੇ ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਹੈ ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬਸ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਕਿ  $1$  ਤੋਂ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਦੀ ਦੂਰੀ ਕੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਾਡੇ ਸਾਈਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਆਓ ਆਪਾਂ ਦੂਰੀ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੀਏ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਘਟਾ ਹੈ ਆਓ ਇਸ ਦੇ ਵਰਗ ਨੂੰ ਇਸ ਇੱਕ ਘਟਾਓ  $\cos$  ਦੇ  $k$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $i$  ਸਾਇਨ  $2$   $k$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਸਮਝੀਏ ਜਿਸਦਾ ਮੇਡ ਵਰਗ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ  $1$  ਘਟਾਓ  $\cos$  ਦੇ  $k$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਤਿੰਨ ਪੂਰੇ ਵਰਗ ਵਜੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸਲ ਭਾਗ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗ ਵਰਗ ਦੇ  $k$   $\pi$  ਬਟਾ  $n$  ਵਰਗ ਇੱਕ ਵਾਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਮਿਆਦ  $\cos$  ਵਰਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸਾਈਨ ਵਰਗ ਪਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦ ਹੈ ਤਾਂ ਇਕੱਠੇ ਅਸੀਂ  $2$  ਘਟਾਓ  $2$  ਗੁਣਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ  $\text{of } \cos 2$   $k$   $\pi$  by  $n$  ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਅੱਗੇ ਪਛਾਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ ਜੋ ਕਿ  $1$  ਘਟਾਓ ਹੈ  $\cos 2$  ਬੀਟਾ ਨੂੰ  $2$  ਸਾਈਨ ਵਰਗ ਬੀਟਾ ਵਜੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ  $2$  ਸਾਈਨ ਵਰਗ  $k$   $\pi$  ਦਾ  $2$  ਗੁਣਾ  $n$  ਹੁਣ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ  $k$  ਦਾ ਮੁੱਲ  $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ ਇੱਕ ਤੱਕ ਕੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਘਟਾਓ ਅਲਫ਼ਾ ਪਾਵਰ  $k$  ਵਰਗ ਨੂੰ  $k$  ਰੋਜ਼ਾਂ  $0$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਦੇ ਨਾਲ ਚਾਰ ਗੁਣਾ  $\sin k$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਵਰਗ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗਿਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ  $p$  naught ਤੋਂ  $p$   $k$  ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਸਾਈਨ ਦੇ ਮਾਡਿਊਲਸ ਦੇ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ  $k$   $\pi$  ਮੁੱਲ  $n$  ਦੁਆਰਾ  $n$  ਕਿਉਂਕਿ  $k$  ਦੀ ਰੋਜ਼  $1$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਤੱਕ ਹੈ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਇੱਥੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ  $0$  ਤੋਂ  $\pi$  ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ  $k$   $\pi$  ਮੁੱਲ  $s$   $\pi$  by  $n$  ਤੋਂ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$   $\pi$  by  $n$  ਜੋ ਕਿ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜਾਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।  $\pi$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇਸ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਹੇਠਾਂ  $0$  ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੈਰ-ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਹ ਮੁੱਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ  $\sin$  ਦੇ ਗੁਣਾ  $\sin k$   $\pi$  by  $n$  ਹੈ ਜੋ ਕਿ  $p$  naught ਤੋਂ  $p$   $k$  ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਿਛਲੀ ਸਾਬਤ ਹੋਈ ਪਛਾਣ ਜੋ  $p$  naught  $p$  ਇੱਕ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਦੇ ਪਾਪ ਹੈ  $e$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਸਾਇਨ ਦੇ ਪਾਈ ਬਾਇ  $n$  ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੇ ਗੁਣਾ ਸਾਇਨ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$   $\pi$  ਬਾਇ  $n$  ਗੁਣਨਫਲ  $n$  ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਇਨ ਪਾਈ ਬਾਇ  $n$  ਸਾਇਨ ਦੇ ਪਾਈ ਬਾਇ  $n$  ਤੱਕ ਸਾਇਨ  $n$  ਮਾਇਨਸ  $1$  ਪਾਈ।  $n$  ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ  $n$  ਬਾਇ  $2$  ਪਾਵਰ  $n$  ਘਟਾਓ  $1$  ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਪਛਾਣ ਹੈ ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਤੀਜੀ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਲਈ ਦੂਜੀ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਮੈਂ ਸਿਰਫ਼ ਉਹ ਸੰਕੇਤ ਦੇਵਾਂਗਾ ਜੋ ਅਸੀਂ ਸਮਝਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਸ ਪਛਾਣ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਚੱਲੀਏ ਜੋ ਅਸੀਂ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਇਹ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ  $\sin \pi$  ਨੂੰ  $2 n$  ਦੁਆਰਾ ਪਿਛਲੀ ਪਛਾਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ  $n$  ਦੁਆਰਾ  $\sin \pi$  ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸ਼ਬਦ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੇ  $n$  ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਇਸ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ  $n$  ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੇ  $n$  OK ਵਜੋਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦੇ ਵਾਰ  $n$  ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਯਮਤ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਪਛਾਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਹੇਰਾਫੇਰੀ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਤੀਜੀ ਪਛਾਣ ਨੂੰ ਸਾਬਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਸਲਈ ਮੈਂ ਸਬੂਤ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦਾ ਹਾਂ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਏਕਤਾ ਦੇ  $n$  ਵੇਂ ਮੁਲ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਕਈ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਵੇਖੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਜੋ ਅਸੀਂ ਹੱਲ ਕੀਤੀਆਂ ਹਨ।  $u$  ਦੇ  $n$  ਵੇਂ ਰੂਟ 'ਤੇ ਹੈ  $n$  ity ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਵਧੀਆ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀਕ ਪਛਾਣਾਂ ਵੇਖੀਆਂ ਜੋ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਲੈਕਚਰ ਵਿੱਚ ਏਕਤਾ ਦੇ  $n$  ਵੇਂ ਮੁਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਾਬਤ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਬਾਰੇ ਹੋਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਪੰਨਵਾਰ