ہیلو طلباء، پچھلے لیکچر میں ہم نے پیچیدہ نمبروں کے ماڈیولس اور کچھ بنیادی عدم مساوات پر گفتگو کی تھی اس لیکچر میں ہم کمپلیکس نمبر کی
قطبی نمائندگی پر بات کریں گے

اصلی سے نمبر ایک بار جب ہمیں ایک پیچیدہ نمبر کے ساتھ y اور x سے شروع کریں جہاں iy جمع x کے برابر z تو آئیے کمپلیکس نمبر
دیا جاتا ہے

کوما سے جوڑ سکتے ہیں اس کا مطلب ہے کہ ہم اس نقطہ کو ہوائی جہاز میں جوڑ سکتے x تو ہم جانتے ہیں کہ ہم اسے ایک ترتیب شدہ جوڑے
محور میں پیش x جا رہا ہے یہ بتانے کے لیے کہ جب ہم اس نقطہ کو x ہے جہاں iy جمع x کہتے ہیں جو z ہیں آئیے اسے پوائنٹ
کرتے ہیں

ہے جو اب ہم یہاں مشاہدہ کرتے ہیں کوئی y تو ایکس محور میں اس کی شدت کیا ہوتی ہے اور اسی طرح عمودی سمت میں اس کی وسعت جو کہ
محور کے طور پر لیا جاتا x بھی کمپلیکس نمبر دیا جاتا ہے جسے ہم کارٹیشین جہاز میں ایک پوائنٹ سے جوڑتے ہیں۔ اور اسے معیاری طور پر
ہے لیکن ہوائی جہاز میں پیچیدہ نمبروں کی تشریح میں ہم اسے حقیقی محور کے طور پر دیکھ سکتے ہیں اور یہاں یہ خیالی محور ہے اور اب اس
جہاز میں ہر ایک نقطہ کے لیے ہم نے ایک پیچیدہ نمبر کو منسلک کیا اور اس طرح کے پیچیدہ نمبر والے طیارہ کو آرگن طیارہ یا پیچیدہ طیارہ کہا
جاتا ہے اب ہوائی جہاز کے کسی بھی نقطہ کو دیکھتے ہوئے ہم اس نقطہ کا تعین بھی کرسکتے ہیں اگر ہمیں اصل سے فاصلہ معلوم ہوتا ہے
محور پر بنایا گیا ہے x اور تھیٹا کہتے ہیں جو کہ زاویہ ہے۔ مثبت r تو آئیے ہم اسے

کے طور پر کہتے ہیں اب ہم جو کہہ p تو آئیے اسے کہتے ہیں کہ یہ اصل صفر کوما صفر ہے یا کمپلیکس نمبر صفر ہے اور آئیے اسے پوائنٹ
op اور تھیٹا جوائننگ لائن جوائننگ سیگمنٹ p کو کہہ رہے ہیں ۔ پوائنٹ o اصل سے فاصلے کی نشاندہی کرتا ہے جس کو ہم r رہے ہیں وہ
اور تھیٹا دیا جائے r محور یا حقیقی محور کے درمیان زاویہ کو ظاہر کرتا ہے لہذا اگر ہمیں وہ x اور مثبت

تھیٹا فرضی کے ذریعہ ملحقہ کے ذریعہ دیا گیا cos کیا ہے جو صرف اس تعلق کو لکھتا ہے کیا x تو ہم اس بات کا تعین کر سکتے ہیں کہ یہ
تھیٹا ہے لہذا ہم کیا مشاہدہ کر رہے ہیں اگر y r sin تھیٹا کے طور پر ملتا ہے اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r cos کو x ہے لہذا ہمیں
دیا جائے r فاصلہ اور زاویہ

تھیٹا نے دیا ہے r sin کو y تھیٹا اور cos سے لکھا جاتا ہے۔ xr کو x تو

اصل r جہاں ir sin theta پلس r cos theta کے برابر لکھا جا سکتا ہے z کو z تو اس کا مطلب ہے کہ ہمارے کمپلیکس نمبر
r times تک کا فاصلہ ہے لہذا جو کہ غیر منفی ہے اور تھیٹا کو صفر سے دو پائی تک لیا جا سکتا ہے اور اس کے بعد اسے z سے نقطہ
کی z کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور ایسی نمائندگی کو قطبی نمائندگی کہا جاتا ہے اس نمائندگی کو cos theta plus i sin theta
قطبی نمائندگی کہا جاتا ہے

کے اجزاء ہم ہوائی جہاز میں ایک پوائنٹ کو جوڑ رہے ہیں اور اس کے علاوہ y کوما x تو مجھے دوبارہ یاد کرنے دو اگر آپ کو معلوم ہے کہ
اور تھیٹا ہے جسے r اس نقطہ کو اصل سے فاصلے اور زاویہ تھیٹا سے مساوی طور پر متعین کیا جا سکتا ہے لہذا یہاں ہمیں فیکٹر ملتا ہے جو
x پولر کوآرڈینیٹ کہا جاتا ہے نظام جو اصل اور زاویہ سے صرف فاصلہ ہے اور جس سے ہم واقف ہیں وہ کارٹیشین کوآرڈینیٹ سسٹم ہے جو کہ
اور تھیٹا دیا گیا ہے r کوما ہے اور فرض کریں کہ

r cos اور تھیٹا پھر ہم دیکھتے ہیں کہ ہم کارٹیشین کوآرڈینیٹ سسٹم میں نقطہ کو r دیا گیا ppose سے شروع کرتے ہیں۔ su تو ہم
دیا گیا ہے اب سوال یہ y کوما x کے طور پر جوڑ سکتے ہیں اس کے برعکس فرض کریں کہ ہمیں r sin theta کو y اور theta
اور تھیٹا کو کیسے حاصل کریں گے؟ پیتھاگورس تھیوریم کے ذریعہ اس تصویر پر دوبارہ واپس جا سکتے ہیں ہم فوری طور پر r ہے کہ ہم اس
کو اصل سے فاصلہ سیدھا آگے بڑھایا جاتا xy مربع کا مربع جڑ ہے لہذا y مربع جمع x کچھ نہیں ہے مگر r یہ محسوس کر سکتے ہیں کہ
r کے طور پر x تھیٹا کو cos مربع کے مربع جڑ سے دیا جاتا ہے۔ اور تھیٹا جس چیز کا ہم مشاہدہ کرتے ہیں وہ y مربع جمع x کو r ہے
ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ تھیٹا کو ان دونوں مساوا r بذریعہ y تھیٹا کو sin اور

توں کو بیک وقت پورا کرنا چاہیے لہذا ان دونوں مساوات کو ملا کر ہم دیکھتے ہیں کہ تھیٹا کو اس مساوات کو پورا کرنا چاہیے جو کہ ٹین تھیٹا ہے۔
اور x اب بھی اس خاص نقطہ کی طرح واضح نہیں ہے کہ فوری طور پر ہم تھیٹا کی قیمت کا حساب کیسے کریں گے اگر x x کے برابر y
دیے جائیں y

he theta کا حساب لگا سکوں۔ t تو میں کچھ آسان ریمارکس کروں گا تاکہ

ri پلس r cos theta تو اس پر جانے سے پہلے مجھے کچھ اشارے پیش کرنے دیں ہم قطبی نمائندگی میں کمپلیکس نمبر لکھتے ہیں جو ہے
cos theta s cis theta کے طور پر لکھ سکتے ہیں جہاں r times cis theta جو اس طرح ہے اور ہم اسے sin theta
کچھ r کے اور پیچیدہ نمبر کی دلیل سے ظاہر کیا جاتا ہے اور ہم یہ بھی مشاہدہ کرتے ہیں کہ z کو theta اور plus i sin theta
کا ماڈیولس جو کہ مشاہدہ ہے اب کچھ آسان ریمارکس جو ہم مشاہدہ کرتے ہیں وہ یہ ہے کہ جب ہم پولر سے شروع کرتے z نہیں ہے مگر صرف
فنکشن کے دورانیہ کے لحاظ سے جو ہم مشاہدہ کرتے ہیں وہ یہ ہے کہ sine اور cos تھیٹا کی نمائندگی i sin تھیٹا پلس cos ہیں۔
تھیٹا لیتا r انٹیجرز میں ہے اس کا مطلب ہے کہ جب میں k لکھا جا سکتا ہے جہاں k pi ٹائم تھیٹا پلس ٹو i پلس k pi اسے تھیٹا پلس ٹو
ہوں یا اگر میں تھیٹا پلس ٹو کے پائی لیتا ہوں

دوسرے لفظوں میں ہم جو مشاہدہ کرتے ہیں وہ r sin theta بطور y تھیٹا ہے اور xr cos تو وہ ایک عنصر کا نقشہ بناتے ہیں جو کہ
ہے ہم اسے ہندسی طور پر کیسے سمجھ سکتے ہیں xy یہ ہے کہ اگر تھیٹا دو پائی سے مختلف ہو تب بھی وہ سٹیم پوائنٹ پر نقشہ بناتے ہیں جو
سے آگے pi محور سے تھیٹا زاویہ دیتا ہے اب اسی لائن کو ماپا جا سکتا ہے جب آپ ایک چکر کو دو x لہذا ہمارے پاس ایک نقطہ ہے جو مثبت
بڑھائیں اور پھر اس تھیٹا کو آگے بڑھایا جس کا مطلب ہے کہ یہ تھیٹا پلس ہے دو پائی دوبارہ یہ اسی لائن کو ظاہر کرتا ہے جس طرح تھیٹا پلس دو
کے مثبت عدد کے ساتھ دو پائی کا کوئی بھی ضرب لیں K پائی کے زاویہ کے طور پر اسی طرح اگر آپ

تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ہم دو پائی ملٹیز سے گھومتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ ہم دوبارہ اس ابتدائی لائن پر آتے ہیں۔ پھر ہم اس زاویہ تھیٹا کو
لیتے ہیں اب سوال یہ ہے k pi ہندسی طور پر جوڑتے ہیں جو ہم مشاہدہ کرتے ہیں کیا یہ ایک ہی لائن کی نمائندگی کرتا ہے اگر ہم تھیٹا جمع 2
کی منفی قدروں کے بارے میں کیا خیال ہے کہ ہم دیکھتے ہیں کہ ہمارے پاس ایک لائن ہے جو زاویہ تھیٹا بناتی ہے۔ اب مشاہدہ میں ہے کہ k کہ
تھیٹا مائنس ٹو پائی کی طرح ہے میں صرف منفی قدر r کوما تھیٹا ہے جو ہم کہہ رہے ہیں کیا یہ r یہ وہ چیز ہے جو قطبی کوآرڈینیٹ سسٹم میں
ایک اب یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ میں دوسری سمت میں زاویہ کی پیمائش کرتا ہوں جو کہ گھڑی s minu ہے k کے ساتھ غور کر رہا ہوں جو
کی سمت ہے جو اسے مائنس ٹو پائی بناتا ہے اور پھر میں ایک زاویہ جوڑتا ہوں جو تھیٹا ہے

محور کو صفر کے x تو دوسرے لفظوں میں ہم یہاں ایک کنونشن بنا رہے ہیں جب ہم دو لائنوں کے درمیان ایک زاویہ کی پیمائش کریں ہم نے اپنے
برابر تھیٹا کے طور پر طے کیا اور اگر آپ گھڑی کی مخالف سمت میں پیمائش کرتے ہیں

تو تھیٹا کو مثبت ریڈین سمجھا جاتا ہے اور اگر ہم دوسری سمت میں پیمائش کرتے ہیں جو گھڑی کی سمت ہے

تو زاویہ جس کی پیمائش کی جاتی ہے منفی چمک میں آئیے دیکھتے ہیں کہ آیا یہ ہماری نمائندگی کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے فرض کریں کہ میں
ایک نقطہ سے شروع کرتا ہوں جو ایک جمع ہے میں ہم حساب لگاتے ہیں کہ زاویہ کیا ہے اور فاصلے کا فاصلہ 1 جمع 1 کا مربع جڑ ہے جو 2 ہے

اکائی ون ہے x ایک ہے اور y یہاں x بذریعہ y اور تھیٹا اس تعلق سے جو ٹین تھیٹا ہے بطور
pi کا مطلب ہے کہ مائنس ich تو ہم دیکھتے ہیں کہ تھیٹا ایس پی بذریعہ 4 اور اب ہم جو مائنس تھیٹا سے مراد ہیں وہ مخالف سمت میں ہے
فور کی طرح ہے جو حقیقی محور کے حوالے سے اس لکیر کے pi by اگر آپ دوسری طرف سے پیمائش کرتے ہیں جو کہ مائنس by 4
انعکاس کے سوا کچھ نہیں ہے
تو اگر ہم انعکاس کریں گے
i ہے لیکن آئیے دیکھتے ہیں کہ آیا یہ قطبی نمائندگی کے ساتھ مطابقت رکھتا ہے i تو یہ ہمیں زیڈ بار کے سوا کچھ نہیں ملے گا۔ جو ایک مائنس
لکھتا ہوں اگر میں قطبی نمائندگی لکھتا ہوں i اس طرح 1 جمع
چار ہے اب ہم ایک نقطہ پر غور کرتے ہیں ہم کہتے ہیں مائنس تھیٹا پوائنٹ پر غور کریں جو کہ روٹ 2 pi by 2 جڑ 2 ہے اور زاویہ جو r تو
ایک طاق فنکشن ہے ہمیں کیا sine ایک یکساں فنکشن ہے اور cos pi by four plus i sine pi by four مائنس cos of
بذریعہ چار جس سے ہمیں زیڈ بار اوکے کے سوا کچھ pi ہے i sine مائنس cos pi by four ملے گا جو کہ جڑ دو گنا ہے جو
حاصل نہیں ہوتا
تو یہ مثال واضح کرتی ہے کہ اگر ہم زاویہ کو گھڑی کی مخالف سمت میں ناپتے ہیں
تو ہم مثبت ریڈینز میں ناپتے ہیں اور اگر ہم زاویہ کو گھڑی کی سمت میں ناپتے ہیں
تو ہم منفی ریڈینز میں ناپتے ہیں۔ جو بالکل اس کنجگیشن کی طرح نمائندگی کرتا ہے جسے ہم قطبی نمائندگی کے ساتھ دیکھنے کے قابل ہیں اور ساتھ
ہی ہم اس مثال کو عام کرتے ہیں
بار اب ہم z میں ایک نقطہ ہے جو زاویہ تھیٹا کے ساتھ ہے اب ہم اس کی بالکل عکاسی کرتے ہیں۔ z تو فرض کریں کہ ہمارے پاس پیچیدہ طیارہ
جانتے ہیں کہ یہ زاویہ تھیٹا ہے لیکن ہمارے کنونشن میں ہم اسے مائنس تھیٹا کے طور پر ماپتے ہیں آئیے دیکھتے ہیں کہ قطبی نمائندگی کیا ہے جو
ہے تعریف کے لحاظ سے اسے زاویہ کے طور پر لیتے ہیں r cos theta پلس i sine theta ہمیں یہاں ملتی ہے یہ
پرائم کی طرح ہے جو ایک پیچیدہ عدد ہے جو زاویہ مائنس تھیٹا کے ذریعہ دیا گیا ہے جو کہ مائنس تھیٹا کا z تو ہم حاصل کرتے ہیں۔ ایسی چیز جو
سائن آف مائنس تھیٹا ہے i پلس r cos
بار کے سوا کچھ نہیں ہے z تو فوراً ہم دیکھتے ہیں کہ یہ
کے ساتھ عدد میں مختلف منفی اعداد کے ساتھ ہم دیکھتے k کو لے کر k pi پلس تھیٹا جمع r 2 تو یہ نکتہ بتاتا ہے کہ اس کا کیا مطلب ہے
اب پھر r sin theta بطور y اور a ہے r cos thet ہیں کہ یہ کارٹیشین کوآرڈینیٹ سسٹم میں ایک نمبر پر نقشہ بناتا ہے جو کہ
اور تھیٹا کے لحاظ سے ایک مختلف نمائندگی r ہم اپنی دلچسپی جو کرنے کی کوشش کر رہے ہیں وہ ہے پیچیدہ جہاز میں ہر ایک نقطہ کے لئے ہم
جو کہ ایک ہی وقت میں ایک ہی نقطہ کی k pi دینا چاہیں گے اب ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ تھیٹا کو تھیٹا پلس کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔ دو
نمائندگی کرتا ہے اس پورے جہاز کو کور کرنے کے لیے ہمیں کیا کرنے کی ضرورت ہے ہمیں دو پائی کے وقفہ کی لمبائی کے لیے تھیٹا کو
مختلف کرنے کی ضرورت ہے اس کا مطلب ہے کہ آپ تھیٹا کے ساتھ تھیٹا لے لیں ، تھیٹا کوئی چیز نہیں پلس دو پائی جہاں تھیٹا کوئی بھی حقیقی
نمبر نہیں ہو سکتا اگر ہم اس خطے میں اپنے تھیٹا کو مختلف کرتے ہیں
تو یہ پورے جہاز کا احاطہ کرتا ہے لہذا اہم بات یہ ہے کہ دلیل کو 2 پائی کے وقفے میں مختلف ہونا چاہئے لہذا روایتی ہے کہ آپ تھیٹا کو 0 نہیں
کے طور پر اگر ہم اسے دوبارہ یاد کرتے ہیں pi سمجھتے ہیں جو ہمیں ملتا ہے۔ یہ 0 سے 2
محور کے طور پر شروع کرتے ہیں جہاں تھیٹا صفر ہے اور پھر آپ مثبت سمت میں x تو اس کا مطلب ہے کہ ہم ابتدائی طبقہ کے ساتھ مثبت
پیمائش کرتے ہیں جو گھڑی کی سمت میں گردش کے ساتھ مخالف ہے۔ دو پائی اس طرح جو پورے جہاز کا احاطہ کرتا ہے اور دوسرا معیاری ہے
مائنس pi پلس 2 pi
محور ہے ہمیشہ تھیٹا کو صفر سمجھیں x محور ہمیشہ جیسا کہ تھیٹا صفر ہے یہ مخصوص لائن ہمیشہ x تو اب یہاں پوری بحث میں مثبت
جانئے کہ مثبت ریڈینز کا کیا مطلب ہے جس کا مطلب ہے کہ آپ صفر سے شروع کرتے ہیں اور پھر یہ چکر آتے ہیں جو یہاں ہے یہ لائن جو تھیٹا
اور دوسرا خطہ جس کو ہم گھڑی کی سمت جا کر کور کرتے ہیں pi ہے بطور
تو یہاں اس مخصوص لائن کو اگر ہم ناپیں
تو یہ ہو جائے گا. تھیٹا ایس مائنس پائی لہذا ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ وقفہ کی لمبائی دو پائی ہے اور اگر ہم اس وقفہ میں اپنے تھیٹا کو مختلف کرتے
ہیں
کا جو ایک تھیٹا ہے جو z تو ہم اس پورے طیارہ اور اس خطے کے زاویہ پر غور کرتے ہیں جسے پرنسپل اینگل یا اصولی دلیل کہا جاتا ہے اور
میں واقع ہے ہم پوچھنا چاہیں گے کہ اس نقطہ کی اصل کی قطبی نمائندگی کیا ہے جسے آپ اب اصل سمجھتے ہیں pi ٹو پلس pi وقفہ مائنس
جیسا کہ ہم نے بحث کی ہے ہم کیا کرتے ہیں کہ ہم ایک لائن لیتے ہیں جو 0 سے شروع ہوتی ہے اور پوائنٹ سے گزرتی ہے ٹھیک ہے لہذا اگر آپ
کوئی لائن لیں
سے r تو 0 سے شروع ہوتی ہے اور ویسے بھی وہ 0 سے بھی گزرتی ہے اس کا مطلب ہے کہ ہم کوئی بھی لائن لے سکتے ہیں جو صفر اور
صفر ہے لیکن اگر میں تھیٹا کو لیتا ہوں r شروع ہوتی ہے۔ اصل سے نقطہ تک کا فاصلہ ہے جو بذات خود ہے جس کا مطلب ہے
تو کوئی بھی لکیر صفر سے گزرتی ہے جسے ہم زاویہ کے طور پر لینے جا رہے ہیں اس کا مطلب ہے کہ تمام لائنیں بنیادی طور پر صفر سے جو
بھی گزریں اس کے ذریعے صفر ہوتا ہے جس کا مطلب ہے کہ تھیٹا صوابدیدی ہو سکتا ہے یہاں تھیٹا کوئی بھی ہو سکتا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ
لیتا ہوں اور تھیٹا کوئی بھی قدر ہو سکتا ہے اصل کی نمائندگی کرتا ہے اس کا مطلب ہے کہ ہمارے پاس اصل کے لیے r اگر میں صفر کے برابر
قطبی نمائندگی اچھی طرح سے نہیں ہے لہذا اصل نقطہ کے حوالے سے محتاط رہنے کی ضرورت ہے ہمارے پاس قطبی کوآرڈینیٹ سسٹم کے
حوالے سے اچھی طرح سے بیان کردہ نمائندگی نہیں ہے اب ہم تھیٹا ویلیو کا حساب لگانے کے بارے میں بات کرنے کے قریب ہیں تاکہ ایک یونیک
تک ہے اب ایک pi سے pi قدر اس کے لیے ہم نے اپنے آپ کو اصولی دلیل میں محدود کر دیا ہے کہ تھیٹا مائنس ue حاصل کیا جا سکے۔
کے ساتھ م pi پیریڈ tan اور مسئلہ ہے جو کہ
y اور x تواتر ہوتا ہے لہذا اس حساب کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں کواڈرینٹ کے حوالے سے کچھ ایڈجسٹمنٹ کرنے کی ضرورت ہے۔ جہاں
ایک م tan پہلے مشاہدے کے اصولی استدلال کے فارمولے میں موجود ہے z
کا ٹین ہے جو کہ k pi جمع x کے ساتھ آسانی سے تصدیق کی جا سکتی ہے یا عام طور پر ہمارے پاس pi تواتر فنکشن ہے جس کی پیریڈ
ہے اگر ہم تلاش کرنے کی کوشش کریں تاکہ ہماری دلچسپی بنیادی دلیل کو تلاش کرنے میں ہے جیسے تھیٹا کا ٹین x کے لئے ٹین k عدد میں
کے ساتھ کہا k pi دیا جائے گا جس میں زاویہ جمع x بذریعہ y لیکن اوپر کے تعلق سے ہم دیکھتے ہیں کہ تھیٹا کو ٹین کے الٹا x بذریعہ
ہے ks جائے گا۔ جہاں انٹیجرز میں
تک محدود کرتے ہیں اس لیے وقفہ مائنس pi by 2 سے pi by 2 تو اس ملٹی ویلیو سے بچنے کے لیے ہم ٹین الٹا کی قدر کو وقفہ مائنس
جو کہ x بذریعہ y کو محدود کریں ہم اسے کہتے ہیں آرک ٹین آف x کے y الٹا tan میں pi by two to plus pi by two w
تک pi by two to plus pi by two ہمارا ٹین فنکشن ہے اس کا مطلب ہے کہ یہ ٹین کا الٹا فنکشن ہے اس طرح کہ قدر وقفہ مائنس

کے کچھ ملٹیپل کے ذریعہ ایک مناسب ایڈجسٹمنٹ کرنے کی ضرورت ہے لہذا pi اور ہمیں x کا آرک ٹین ہے ۔ بذریعہ y محدود ہے لہذا تھیٹا
کی ہماری اصل z پلس کی قدر کو کس طرح ایڈجسٹ کیا جائے تاکہ ہمیں دیئے گئے کمپلیکس نمبر k ہم اب اس بات پر تبادلہ خیال کریں گے کہ
کے ذریعہ دیا جاتا ہے جہاں pi جمع k جمع x کے آرک ٹین بذریعہ y کی دلیل ہے۔ zz دلیل مل جائے لہذا ہمارا اصل دلیل فارمولہ جو کہ
پہلے اور چوتھے کواڈرینٹ میں ہے xy جمع 0 اگر so k کہاں ہے xy پلس جو مناسب ایڈجسٹمنٹ ہے اس بات پر منحصر ہے کہ ہماری k
صفر سے کم یا اس کے برابر ہے لہذا دونوں صور y ایک ہی چوتھا کواڈرینٹ r مثبت ys اور ys کے ذریعہ دیا گیا ہے مثبت ہے یا x جو
پلس کی قدر ہمیں یہاں ایڈجسٹ کرنے کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ آرک ٹین الٹا مائنس پائی کے درمیان قدر دو سے k توں میں ہم دیکھتے ہیں کہ
xy کی طرف سے دو جو پہلے اور چوتھے کواڈرینٹ کو پہلے کواڈرینٹ پر محیط ہے اور یہ چوتھا کواڈرینٹ ہے اور اگر pi دو دے گا۔ پلس
غیر منفی ہے y منفی ہے اور x دوسرے کواڈرینٹ میں ہے جو
تیسرے کواڈرینٹ میں ہے xy اور مائنس ون اگر x کا اضافہ کرتے ہیں بذریعہ pi میں r tan تو ہم لیتے ہیں ہم حاصل شدہ ویلیو
صفر کے برابر ہے x برابر صفر اگر x تو ہم یہاں جو کھو رہے ہیں وہ ہے
صفر کے برابر غیر صفر ہے x محور ہے اور ہم جانتے ہیں کہ کہتے ہیں کہ اگر y تو یہ
مثبت منفی ہے y ہے اگر pi by 2 کی دلیل z برابر ہے صفر پر پھر x تو ہمیں یہ فارمولا ملتا ہے اگر
zs کہتے ہیں rs اب i بذریعہ 2 لیتے ہیں آئیے ایک سادہ سی مثال دیکھتے ہیں فرض کریں کہ ہمیں کہا گیا ہے کہ مائنس ون pi تو ہم مائنس
k جمع x کے آرک ٹین بذریعہ y کو مربع جڑ سے دیا جاتا ہے۔ ایک جمع ایک کا جو جڑ دو ہے اور اصل دلیل تھیٹا r پھر i مائنس 1 جمع
کی قدر کو ایک کے طور پر لیتے ہیں لہذا یہ مائنس پائی بذریعہ k کے ذریعہ دی گئی ہے جہاں نقطہ دوسرے کواڈرینٹ میں ہے لہذا ہم pi جمع
ہمیں وہ تین پائی بائی چار ملتی ہے pi چار جمع ہے۔
اور تھیٹا کا r ڈیش روٹ 2 جمع 2 جڑ 3 ہے میں z تو اسی طرح آپ بھی کر سکتے ہیں۔ دوسرے پیچیدہ نمبروں کے لیے حساب لگائیں جو کہ
کے پرنسپل دلیل کے فارمولے کا خلاصہ کرنے دیں فرض کریں کہ نقطہ پہلے z حساب لگا کر اس کی قطبی نمائندگی کا حساب لگاتا ہوں، مجھے
اور چوتھے کواڈرینٹ میں ہے
کے تیسرے کواڈرینٹ y میں ہے اگر یہ pi پلس x کے دوسرے کواڈرینٹ آرک ٹین بذریعہ y اور اگر یہ x کا ٹین بذریعہ r y تو صرف
cos a دیا گیا ہے۔ جیسا کہ 1 جمع z سے آئیے ایک اور مثال دیتے ہیں فرض کریں کہ ہمیں ایک پیچیدہ نمبر pi مائنس x آرک ٹین میں ہے
میں ہے اب ہم ان پیچیدہ نمبروں کے لیے قطبی نمائندگی کا حساب لگانا یا تلاش کرنا چاہیں گے pi جہاں ایک وقفہ plus i sine a 2
y مربع جمع x کو rr تو آئیے صرف یہ دیکھیں کہ یہ قطبی نمائندگی کی شکل میں نہیں ہے لہذا تبدیل کرنے کے لیے پہلے حساب لگائیں
a اسکوائر sin مربع ہے جمع cos جو a اسکوائر sin پورے مربع جمع cos a مربع کے مربع جڑ سے دیا جاتا ہے جو کہ ایک جمع
ہمارے یہاں ہے
جو کہ مثلثی فارمولے کے ذریعے ہے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ cos a ایک جمع t imes ملتا ہے جو کہ دو ہے cos a تو ہمیں دو گنا دو
کے دو بار کے ماڈیولس کے برابر cos a کے دو گنا ماڈیولس کے برابر cos a حاصل کرتے ہیں r کا دو گنا ہے اور ہم a مربع cos
پہلے کواڈرینٹ z کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ a ہے اور دلیل تھیٹا کا حساب ہم فارمولے کے مطابق کریں گے لہذا صفر سے پی کے وقفہ میں
سائن کے حساب سے شمار کرتے x کے آرک ٹین کو y ہے آئیے ہم x کا آرک ٹین بذریعہ y میں ہے جس کا مطلب ہے کہ تھیٹا براہ راست
a by two cos a by two by two جو ہم اسے حاصل کرتے ہیں جیسا کہ یہ دو گنا سائن ہے a by 1 plus cos a ہیں۔
pi a by میں ہے وقفہ صفر سے a کے ٹین کے آرک ٹین کے سوا کچھ نہیں ہے اب دھیان دیں کہ چونکہ a یہ a by two مربع cos
میں ہوتا ہے لہذا آرک ٹین اسی طرح دیتا ہے جیسا کہ یہ آپ کے لیے ایک بائی ٹو ہے دوسری آسان pi by two میں وقفہ صفر سے two
مشقیں اگر وقفہ pi 2 2 pi میں جھوٹ ہے
کے دو گنا z cos a تو صرف اسے دکھائیں یا اخذ کریں۔ کہ تھیٹا سا بذریعہ 2 مائنس پائی تصدیق کریں کہ تھیٹا سا بذریعہ دو مائنس پائی لہذا
اور دوسرے خطے کے pi ٹو کا کہتا ہے اگر صفر سے a by ماڈیولس کے ذریعے لکھا جاتا ہے جس میں مختلف ہونے والا اینگولس کہتا ہے
کے درمیان ہے pi مائنس a by two لیے
ہے جو کہ صفر ہے اور صفر کی کوئی cos pi plus i sin pi جمع 1 z ہم دیکھ سکتے ہیں کہ pi برابر a تو قیمت کے لیے
منفرد قطبی نمائندگی نہیں ہے
تو اس مثال کے ساتھ ہم قطبی نمائندگی کا استعمال کرتے ہوئے کمپلیکس نمبر کی ضرب کی طرف چلتے ہیں فرض کریں کہ ہمارے پاس قطبی کے
دو تھیٹا 2 اب اگر ہم ان 2 کو صرف عام پیچیدہ عدد r دو z تھیٹا ایک اور cis ایک r ہیں۔ نمائندگی z one z two ساتھ دو پیچیدہ نمبر
ضرب سے ضرب دیں
تھیٹا 2 cos ہے اور اسی طرح یہاں فیکٹر cos i sin theta one دو ہے یہاں ہمارے پاس r ایک r تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ
sin theta 1 sine theta مائنس cos of theta 2 کے طور پر آتی ہے 1 cos تھیٹا 2 ان کی پروڈکٹ تھیٹا کے i sin پلس
اور ہم مثلثی فارمولے سے 2 plus i times cos theta 1 sine theta 2 plus sine theta 1 cos theta two
تھیٹا 1 جمع تھیٹا 2 میں cis دیکھ سکتے ہیں کہ یہ عنصر تھیٹا ون پلس تھیٹا 2 پلس آئی ٹائم سائن آف تھیٹا 1 جمع تھیٹا 2 کا ہے یہ ہمارے نوٹیشن
لکھا جا سکتا ہے۔ لہذا ہم نے ایک اہم مشاہدہ کیا کہ دو پیچیدہ نمبروں کی ضرب آسان ہو جاتی ہے۔ اگر ہم قطبی نمائندگی میں کرتے ہیں
پر ضرب دیتے ہیں 2 z کو 1 z تو یہ ہے کہ جب ہم
سے پیمانہ کرتے ہیں اور ہم ایک زاویہ سے گھومتے ہیں جو کہ اصل کے حوالے سے تھیٹا 1 ہے r 1 کو عامل z 2 تو ہم
تو کیا ہم یہاں ماڈیولس کی طرح مشاہدہ کرتے ہیں۔ قطبی نمائندگی کے ذریعہ دو پیچیدہ نمبروں کی پیداوار کے ہم دیکھتے ہیں کہ ماڈیولس کچھ نہیں
ٹو ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ شناخت بہت mod z ایک دوسرا عنصر mod z ایک کچھ نہیں ہے لیکن r دو اور پھر r ایک r ہے لیکن
سے mod z two کے ماڈیولس کو z one کا ماڈیولس کچھ نہیں ہے مگر z one z two آسانی سے ہم کر سکتے ہیں۔ محسوس کریں کہ
ٹو کا استدلال ہے اس لیے چونکہ ہم بنیادی دلیل پر غور کرنے کی کوشش کرتے ہیں z one z ضرب کیا گیا ہے اور
سے نیچے جا سکتا pi سے زیادہ جا سکتا ہے یا بصورت دیگر یہ مائنس pi تو ایسا ہو سکتا ہے کہ جب ہم دو زاویوں کا مجموعہ کرتے ہیں
ہے لہذا اصل دلیل حاصل کرنے کے لیے ہمیں کچھ ایڈجسٹمنٹ کرنے کی ضرورت ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ وہ کیا ایڈجسٹمنٹ کرنے کی ضرورت
ٹو کی دلیل جب ہم ضرب کرتے ہیں z one z ہے اس لیے
ہے pi پلس گنا دو k ٹو کی اور ہمیں ایک ایڈجسٹمنٹ کرنے کی ضرورت ہے جو z کی ایک دلیل z تو ہمیں اصولی دلیل کا مجموعہ ملتا ہے۔
کی دلیل کو جمع کریں فرض کریں کہ وہ اصل دلیل کے z ایک کی دلیل اور z پلس کو اقدار کے ذریعہ دیا جاتا ہے اگر فرض کریں کہ k جہاں
اندر موجود ہیں۔ رینج پھر کسی چیز کو تبدیل کرنے کی ضرورت نہیں ہے لیکن اگر یہ مائنس پائی سے زیادہ یا اس سے کم ہے کہئے کہ یہ مائنس
پائی سے کم ہے
پلس ایک ہے اور اگر یہ حد کو عبور کرتا ہے k تو ہمیں شامل کرنے کی ضرورت ہے جس کا مطلب ہے کہ
ہے pi by 4 ہے جو جڑ 2 ہے۔ اور زاویہ r سے زیادہ pi سے کم یا برابر ہے pi تو ہمیں کرنا ہوگا۔ دو پائی سے منہا کرنا مائنس

جس کا ہم پہلے ہی حساب لگا چکے ہیں اور یہاں ماڈیولس 2 ہے اور ہم اس کے زاویہ کا حساب لگا سکتے ہیں جس سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں
کے پیمانے بن جاتی ہے۔ یہ زاویہ جو چار پائی از بارہ sum اور modulus cis ہے اور پھر ان کی پیداوار صرف pi by six کہ یہ
تھیٹا کرتا ہے i sin تھیٹا پلس z r cos ڈی مورس فارمولہ ہے جو کہتا ہے کہ اگر
کے برابر ہونے کی وجہ سے فارمولہ اس ضرب n تھیٹا کے i sine n تھیٹا پلس rn cos n کے طور پر صرف n کی طاقت z تو
کے برابر 2 n مربع لیتے ہیں جس کا مطلب ہے z سے بہت آسانی سے اخذ کیا جاتا ہے جس کا ہم نے مشاہدہ کیا ہے مثال کے طور پر اگر آپ
کے طور پر cos مربع ہے اور ان دلائل کو جمع کریں جو ہم اسے r ہے جو کہتا ہے کہ ماڈیولس فیکٹر کو پیمانہ کریں جو z میں z جو کہ
n پاور z حاصل کرتے ہیں۔ دو تھیٹا جمع میں دو تھیٹا پر دستخط کرتا ہوں اس لیے انڈکشن کے ذریعے ہم اس بات کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ
تھیٹا سے ضرب کیا گیا ہے cis n کو n پاور r کچھ نہیں ہے مگر
کا حساب لگاتا ہوں اور اس کی طاقت کو ہزار کہتے ہیں۔ کہنے سے z میں zs one plus تو آئیے ایک سادہ سی مثال پیش کرتے ہیں جو کہ
ہم اس کا حساب لگانا چاہتے ہیں اگر ہم براہ راست ضرب کرتے ہیں
ہے اور اب cis pi by 4 تو کمپیوٹیشنل طور پر آسان نہیں ہوسکتا ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اگر آپ قطبی نمائندگی پر جائیں جو روٹ 2 اور
cis 1000 کی طاقتیں جو ہم اسے 2 پاور 500 کے طور پر حاصل کرتے ہیں اور پھر صرف r مورس فارمولہ کہتا ہے کہ لے لو d صرف
جو کہ دو پچاس پائی کہتے ہیں اور جس کے بارے میں ہم جانتے ہیں کہ یہ آپ کے لیے صرف ایک سادہ مشق ہے آئیے ہم درج pi by 4 گنا
ذیل شناخت سائن 5 کو ثابت کرتے ہیں۔ تھیٹا مساوی 16 سائن پاور 5 تھیٹا مائنس 20 سائن کیوب تھیٹا پلس 5 سائن تھیٹا اور کوس فائیو تھیٹا سولہ
cis phi theta s theta صرف استعمال کریں کہ hintus تھیٹا cos کیوب تھیٹا پلس فائیو cos پاور پانچ تھیٹا مائنس ٹوئنٹی cos
اس لیکچر میں ہم کمپلیکس نمبر کی قطبی نمائندگی پر تبادلہ خیال کرتے ہیں اور ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ اگر ہم قطبی نمائندگی کو power phi
استعمال کریں گے
تو ضرب آسان ہو جائے گی اور اگلے لیکچر میں ہم اس کے مزید نتائج پر بات کریں گے۔

Prutor@IITK