[موسیقی] پچھلے لیکچر میں ہم نے کمپلیکس نمبر کے کنجوگیٹ اور ایک کمپلیکس نمبر کے ماڈیولس پر بھی بات کی تھی مجھے صرف کسی بھی عام
کے ماڈیولس کے طور پر بیان کیا ہے۔ یہ ایک z اور ib بار ہے ہم نے اسے مائنس z جو کہ ib پلس a کمپلیکس نمبر کو یاد کرنے دیں
مربع کے مربع جڑ کے طور پر اب ہم ماڈیولس کی کچھ خصوصیات کو دیکھتے ہیں لہذا اس بحث کے دوران ہم فرض کریں گے کہ b مربع جمع
کے ماڈیولس سے یا اس کے برابر z کا اصل حصہ ہمیشہ کم ہوتا ہے۔ z ہے اور آئیے صرف یہ ثابت کریں کہ x plus iy کی شکل z
کے حقیقی حصے کا ماڈیولس z کا حقیقی حصہ یا z کے برابر سے بڑا ہے یہ اچھی عدم مساوات ہے کہ mod z اور ساتھ ہی یہ مائنس آف
سے کم یا اس کے برابر ہے mod z
کے اصلی حصے پر غور کریں z ہے اور جب ہم اس کے مربع کو x کا اصلی حصہ ہے جو z تو ثبوت آسان ہے کہ کیا ہمارے پاس
مربع سے کم یا اس کے برابر ہے کہ ہم کچھ غیر منفی نمبر y مربع جمع x مربع ہے جو یقینی طور پر x تو اس کے مربع پر غور کریں جو کہ
جوڑ رہے ہیں
کے مربع جڑ سے کم یا b کے مربع جڑ سے کم یا اس کے برابر ہے b ہے a آپ دیکھتے ہیں کہ جب بھی آپ کے پاس ly تو اب فوری
اس کے برابر ہے
کے سوا کچھ نہیں mod z مربع کے مربع جڑ سے کم یا اس کے برابر ہے۔ یہ y مربع جمع x کا اصلی حصہ z تو اس کا مطلب یہ ہے کہ
سے کم یا اس mod z ہے اور جو کچھ ہم یہاں دیکھتے ہیں وہ درحقیقت وہی ہے جس طرح سے ہم نے اسے اخذ کیا ہے بالکل بالکل اسی طرح یہ
mod سے بڑا ہے یا اس کے برابر ہے mod z کا خیالی حصہ مائنس z کے برابر ہوگا تاکہ پہلی تجویز کا اختتام اسی طرح ہم ثابت کر سکیں۔
کے لیے ایک غیر منفی نمبر z ہمیشہ پیچیدہ نمبروں میں تمام mod z سے کم یا اس کے برابر ہے تجویز دو یقیناً یہ سیدھا آگے ہے جو کہ z
صفر ہو ٹھیک ہے z کا ماڈیولس صفر ہوتا ہے اگر صرف ایک z ہوتا ہے اور جس کا ہمیں مشاہدہ کرنے کی ضرورت ہے جب بھی
کو صفر کے برابر سمجھتے ہیں mod z تو یہ بنیادی طور پر دوبارہ کی طرح ہے جس کا مشاہدہ کرنا آسان ہے کیونکہ ایک بار جب آپ
ہم یہ کہہ رہے ہیں w مربع یہ صفر ہے اور y مربع جمع x تو اس کا مطلب ہے کہ یہ اس کا مربع صفر ہے لہذا اس کا مطلب یہ ہے کہ
مربع صفر ہونا x کہ دو غیر منفی نمبروں کا مجموعہ صفر ہے جس کا مطلب ہے کہ بنیادی طور پر ہر غیر منفی عنصر کا صفر ہونا چاہیے یعنی
کے برابر صفر y کے برابر صفر x مربع صفر ہونا چاہیے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ y چاہیے اور ساتھ ہی
ایک صفر عنصر ہے جو بنیادی طور پر اس کی پیروی کی z ایک صفر عنصر ہے اور z تو یہ کچھ بھی نہیں ہے مگر یہ کہنے کے برابر ہے کہ
کے ماڈیولس پر غور کرتے ہیں z طرح ہے اور جب آپ
کے طور پر جو کہ ایک چھوٹی سی بات ہے شاید میں mod z ماڈیولس کے مقابلے میں بھی ہے۔ z تو دیگر آسان مشاہدات کیا ہیں جو کہ مائنس
اس میں اضافہ کروں گا جو بنیادی طور پر اس کا جوڑ ہے اور ساتھ ہی وہی ماڈیولس
لیتے ہیں az تو ہم بنیادی طور پر یہ کہہ رہے ہیں کہ جب آپ
آپ کے پاس ہوتا ہے z تو مائنس
ہے iy مائنس x آپ کے پاس مائنس z ہے۔ پھر مائنس iy پلس x تو آئیے یہ کہتے ہیں کہ یہ بنیادی طور پر
بار کا ماڈل ہے اب چوتھا ہے جب z محور کے بارے میں اس کی عکاسی کرتے ہیں جو x تو یہ فاصلہ اس فاصلے کے برابر ہے اسی طرح آپ
بار سے ضرب دیں گے z کو z آپ
z میں z one مربع لہذا تعریف کے لحاظ سے یہ واضح ہے لہذا میں بنیادی طور پر اس پر بحث نہیں کر رہا ہوں آئیے z تو ہمیں موڈ ملتا ہے۔
کو سمجھا mod z one z ٹو کے ساتھ ضرب کرنے پر mod z ایک کو mod z ٹو کے پانچویں ایک ماڈیولس پر جائیں یہ وہی ہوگا جیسا کہ
کے ساتھ پورے بار سے ضرب کر رہے ہیں اور دوبارہ ہم z ایک سے z ٹو کو z one z جاتا ہے۔ مندرجہ بالا تجویز کے ذریعہ پورا مربع ہم
دو سے ضرب کیا جاتا ہے۔ بار اور کمیوٹیو قانون کا z ایک بار z ٹو کے لیے جوڑ z one z کنجوجیشن کے تعلق کو جانتے ہیں اس لیے
بار کے ساتھ z2 بار z1 استعمال کرتے ہوئے ہم آخر کار مجھے صرف لکھنے کی اجازت دے سکتے ہیں تاکہ ہمارے پاس جو کچھ ہے وہ
پروڈکٹ ہے اور ہمیں بنیادی طور پر وہ ایسوسی ایٹیو قانون ملتا ہے جو آپ استعمال کر سکتے ہیں اور پھر مزید کمیٹیو قانون کا استعمال کرتے ہیں
حاصل ہو سکے۔ ایک مربع موڈ زیڈ دو مربع ٹھیک ہے mod z تاکہ آپ کو
تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ زیڈ ون زیڈ ٹو کا ماڈیولس یہ دیتا ہے موڈ زیڈ ایک کو موڈ زیڈ ٹو کے ساتھ ضرب دے کر آپ پہلے پروڈکٹ کو اس
ah یہ ٹھیک ہے اور چھٹی تجویز جو mu ltiply کا ماڈیولس لیں جو ہر ایک کمپلیکس نمبر کے لئے پہلے ماڈیولس لینے کے مترادف ہے۔ پھر
z مشہور یا اچھی عدم مساوات ہے جو بار بار استعمال کی جائے گی جسے مثلث عدم مساوات کہتے ہیں لہذا عدم مساوات یہ بتاتی ہے کہ اگر ہم
ٹو کے ماڈیولس پر غور کریں z ایک جمع
ٹو کے لیے پیچیدہ نمبروں میں آئیے ہم اس عدم مساوات کو سمجھنے z ایک z ٹو ہر mod z سے کم یا برابر ہے۔ پلس mod z one تو یہ
کی کوشش کریں کہ یہ کیا کہتا ہے
ٹو ہے اور پھر ہم قدرتی طور پر منسلک کر سکتے z ایک ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ z تو ہمارے پاس دو پوائنٹس ہیں آئیے ہم کہتے ہیں کہ یہ
ٹو کو دوسرے ویکٹر کے طور پر تصور کر سکیں پھر جو رقم ہمیں بنیادی z ایک کو ویکٹر کے طور پر اور z ہیں۔ اس کے لیے ایک ویکٹر تاکہ ہم
طور پر حاصل ہوتی ہے وہ یہ ہے کہ اس م
ٹو ہے، جیسا کہ میں نے پچھلے میں ذکر کیا ہے۔ لیکچر ماڈیولس اس کا مطلب z ایک جمع z توازی علامت کے لیے کون سا اختراع ہے جو کہ
ٹو کا ماڈیولس اس نمبر کے درمیان فاصلہ کو اصل سے ظاہر کرتا z ایک جمع z ہے کہ یہ کمپلیکس نمبر اور اصلیت کے درمیان فاصلہ ہے لہذا
کا استعمال z 1 پر جائیں اور پھر اس مقام تک پہنچنے کے لیے آپ ویکٹر o z 2 سے کم یا مساوی ہے . t ہے ٹھیک ہے لہذا فاصلہ فاصلہ
کریں
کا استعمال کریں جو ہمیشہ z1 پر جائیں اور پھر مزید یہاں تک پہنچنے کے لیے z2 تو اس کا مطلب ہے کہ فاصلہ طے کرتے ہوئے پہلے
سے بڑا ہوگا۔ الفاظ یہ سب سے کم فاصلہ ہے جس کا ہم مشاہدہ کر رہے ہیں ٹھیک ہے diss
کے ذریعہ mod z تو آئیے اس نتیجے کو ثابت کرنے کی کوشش کریں لہذا بائیں ہاتھ کی طرف اور مربع کے ساتھ اصطلاح پر غور کریں اور یہ
بار اب صرف براہ راست کہہ دیں کہ پراپرٹی کو لاگو z میں لکھا گیا ہے۔ z مربع کو mod z لکھا گیا ہے اگر مجھے یاد ہے کہ پراپرٹی
ٹو بار اور مزید آپ تقسیمی قانون کا اطلاق کریں z ایک بار جمع z کرنے سے جو ہمیں مل رہا ہے وہ ہے
z دو ضرب z ایک بار کے ساتھ z دو ضرب z دو بار جمع z ایک z ایک بار کے ساتھ ضرب z ایک کو z تو ہم حاصل کریں گے کہ
دو بار ہے اسے ایک z ایک z ایک مربع پلس کا ماڈیولس ہے یہاں ہم جو مشاہدہ کرتے ہیں وہ z دو بار کے ساتھ اور ہم جانتے ہیں کہ یہ مقدار
پیچیدہ نمبر کے طور پر مانتے ہیں پھر اگلا نمبر ہم اسے صرف اس کے طور پر دیکھ رہے ہیں۔ بالکل پچھلے کا جوڑ ہے لہذا اگر آپ صرف اس
بات کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ اگر میں اس بار کو لاگو کرتا ہوں
مربع ہے اور ہم z2 دیتا ہے لہذا ہم دیکھتے ہیں کہ یہ موڈ z سے ڈبل بار کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے جو خود کو دوبارہ z تو یہ ایک بار پر
کے حقیقی حصے کو دو سے ضرب دیتا ہے z بار z پلس z جانتے ہیں کہ
ٹو بار کے حقیقی حصے کا دو گنا ہے اور اب یہ دوبارہ یاد کرنے کی کوشش کریں کہ وہ کون سی z one z تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہاں یہ

عدم مساوات ہے جسے ہم ٹھیک ثابت کرنے کی کوشش کر رہے ہیں زیڈ ون پلس زیڈ ٹو کا ماڈیولس حاصل کریں موڈ زیڈ ون پلس موڈ زیڈ ٹو سے کم
یا اس کے برابر اب ہم دیکھ رہے ہیں کہ تقریبا ہم یہاں تک پہنچ چکے ہیں اگر ہم دائیں ہاتھ کی طرح کچھ حاصل کرنے کے قابل ہو جائیں جیسا کہ
موڈ زیڈ ون پلس موڈ زیڈ پورے مربع تک
ٹو کی اصطلاح کیسے لاتے ہیں ٹھیک ہے mod z اور mod z one تو ہم تقریباً مکمل ہو چکے ہیں لیکن ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے کہ ہم یہاں
z کا حقیقی حصہ ہمیشہ مائنس موڈ z کا حصہ z تو اگر مجھے وہ تجویز یاد آئے جو میں نے لکھی تھی وہ پہلی تھی یہ بتاتا ہے کہ اصلی
کے مساوی mod z یا n سے بڑا tha کے برابر کے ساتھ ساتھ کم
تو ہم یہاں اس خاص رشتے کو استعمال کرنے جا رہے ہیں لہذا جو ہم جانتے ہیں کہ اصل حصہ ہمیشہ اس سے کم یا برابر ہوتا ہے لہذا جب ہم اس
تعلق کو استعمال کر رہے ہیں
تو اس کے بارے میں بہت محتاط رہنے کی ضرورت ہے۔ میں نے آپ کو خبردار کیا تھا کہ کمپلیکس نمبر کے لیے اس طرح کا رشتہ لاگو نہیں ہوتا
اگر آپ کو ایک سے اوپر کی مقدار نظر آتی ہے
تو یہ مکمل طور پر حقیقی نمبر ہے ٹھیک ہے اب جب ہم یہاں موازنہ کر رہے ہیں
دو مربع اور پھر جو آپ دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ mod z بار کے ماڈیولس کا 2 گنا ہے پھر یہ ایک غیر منفی نمبر ہے۔ اور z1 z2 تو یہ
ٹو پلس موڈ z سے بار کے ماڈیولس سے ضرب جو کہ ماڈیولس z کے دو گنا کو mod z one مربع پلس z one mod z one پراپرٹی
ہے پورے مربع تک ٹھیک ہے ایک بار پھر mod z ایک پلس mod z پورے مربع کے برابر ہے اور ہم جان لیں کہ یہ کچھ نہیں ہے بلکہ یہ z
کے برابر ہے ٹھیک ہے لہذا یہ b اس سے کم یا a مربع سے کم یا برابر ہے جس کا مطلب ہے b ہمارے پاس جو ہے جو ہم نے اخذ کیا ہے وہ
ثابت ہوتا ہے ہماری مثلث کی عدم مساوات
z کا ماڈیولس z one تو میں اس کی نشاندہی کرنا چاہوں گا۔ سوال کوئی پوچھ سکتا ہے کہ یہ مساوات اس رشتے کے لیے کب ہوتی ہے جب کہ
کے ماڈیولس کے برابر ہو سکتا ہے کہ میں اسے یہاں ٹھیک یا اگلے صفحے پر لکھوں گا z one کے one
اخذ کیا ہے۔ موڈ زیڈ ون پلس موڈ زیڈ ٹو سے کم یا مساوی اب سوال یہ ہے کہ میں مساوات کو کب دیکھ mod z one z two تو ہم نے صرف
سکتا ہوں
تو اب یہ کب ہوگا جب ہم اس عدم مساوات کو حاصل کرتے ہیں
تو یہ وہ جگہ ہے جہاں ہم عدم مساوات کے تعلق کو استعمال کرتے ہیں لہذا مساوات ظاہر ہوتی ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب زیڈ ون
زیڈ ٹو بار کا اصلی حصہ زیڈ ون زیڈ ٹو بار کے ماڈیولس کے برابر ہو
تو مساوات ظاہر ہوتی ہے لہذا مساوات ظاہر ہوتی ہے میں اسے مساوات کے طور پر کہوں گا ایک ایک فراہم کردہ زیڈ ون زیڈ ٹو بار کا اصلی حصہ
ایک غیر منفی حقیقی نمبر ہے مجھے t کے اوقات میں ہے جہاں z 1 z 2 یہ یہ کہنے کے مترادف ہے کہ mod z1 bar یہ برابر ہے
دوبارہ دہرانے دو ہم نے ثابت کیا کہ یہ مثلث عدم مساوات کا سوال یہ ہے کہ جب مساوات ظاہر ہوتی ہے
دو وہ بالکل لکیری طور پر منحصر قسم کی z ایک اور z اور صرف اگر f کی مساوات i تو ہم صرف مشاہدہ کرتے ہیں کہ ظاہر ہوتا ہے
ٹو کا صرف ایک مستقل اوقات ہے اس صورت میں ہمیں z ایک z ٹو کے مستقل اوقات کی طرح ہے آپ کے پاس ہے جیسا کہ z طرح ہیں جو
مساوات ملتی ہے آئیے دیکھتے ہیں اس مثلث کی عدم مساوات کے دیگر نتائج کا مزید کہنا ہے
mod کا ماڈیولس صرف اس کو دہراتا ہوں کہ ہمارا یہ تعلق ہے اور اس سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ so of تو ہم نے ابھی مشاہدہ کیا ہے کہ
ٹو اس سے کم یا برابر ہے۔ ہم اسے کیسے اخذ کرتے ہیں صرف یہ کہتے ہیں کہ ہم اسے کہتے ہیں جیسا کہ یہ ایک mod z مائنس z one
دو کو جوڑتے ہیں اور گھٹاتے ہیں پھر ایک کا اطلاق کرتے ہیں پھر ایک کے بعد ہمیں موڈ زیڈ ایک z ایک پر غور کریں ہم صرف z ہے لہذا موڈ
موڈ زیڈ ون پلس زیڈ ٹو سے کم یا برابر ہوتا ہے۔ اور مزید آپ کو مائنس زیڈ ٹو کا ماڈیولس ملتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ مائنس زیڈ ٹو کا ماڈیولس ایک
بار پھر موڈ زیڈ ٹو جیسا ہے
تو اس سے ہم یہ حاصل کرتے ہیں کہ موڈ زیڈ ون مائنس موڈ زیڈ ٹو زیڈ ون پلس زیڈ ٹو کے ماڈیولس سے کم یا اس کے برابر ہے۔ ٹھیک ہے اسی
طرح ہم زیڈ ون اور زیڈ ٹو کے رول کو تھی میں بدل سکتے ہیں۔ اس صورت میں ہمیں ملتا ہے اگر میں کردار کو تبدیل کرتا ہوں کیونکہ z one
ٹو کے کردار کو تبدیل کر سکتے ہیں z اور z one ٹو صوابدیدی ہے لہذا آپ صرف z اور
ایک ہے جو اس سے کم یا برابر ہے۔ زیڈ ون پلس زیڈ ٹو کے ماڈیولس تک اور نتیجہ کے طور پر ہم جو z ٹو مائنس موڈ z تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ
مشاہدہ کرتے ہیں وہ یہ ہے کہ ایک مائنس موڈ زیڈ 2 پر موڈولس کا ماڈیولس ہے جو زیڈ 1 پلس زیڈ 2 کے ماڈیولس سے کم یا اس کے برابر ہے ٹھیک
ہے اب کوئی سوال پوچھ سکتا ہے کہ یہ پلس ہے کیا واقعی ضروری ہے ٹھیک ہے کیا میرے پاس یہاں مائنس صحیح ہے ٹھیک ہے آپ کے پاس
دوبارہ مائنس کا نشان ہوسکتا ہے
تو یہ یہاں جمع یا مائنس ہوسکتا ہے پھر بھی یہ موڈ زیڈ ون مائنس موڈ زیڈ ٹو کے ماڈیولس سے بڑا یا اس کے برابر ہے اسی طرح یہ اس سے کم یا
کا ماڈیولس mod z2 پلس z1 برابر ہے
تو یہاں مجھے مثلث سے کچھ زیادہ عمومی نظر آرہا ہے لہذا ہمارے پاس مثلث کی عدم مساوات ہے اور اب جو ہم دیکھتے ہیں وہ اس پیچیدہ اعداد
ہے غیر صفر z a جہاں z inverse s mod z inverse کے لیے بہت زیادہ عمومی عدم مساوات ہے لہذا تجویز 7 ماڈیولس کا
z سے شروع ہوتا ہے جو z inverse یہ کنجگیشن پراپرٹی کی طرح ہے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں جو ag ain کمپلیکس نمبر
میں دیا جاتا ہے آپ کو شناخت ملتی ہے پھر اس کا ماڈیولس دوبارہ ایک کا ماڈیولس ایک ہے اور ہم z inverse کے ذریعے z ہے inverse
کے ماڈیولس پر تبادلہ خیال کیا ہے۔ ایک میں زیڈ دو سے ایک موڈ زیڈ ایک کو موڈ زیڈ دو سے ضرب دیتا ہے لہذا آپ کو جو ملتا ہے z نے پہلے ہی
z الٹا بالکل mod z کے ماڈیولس سے ضرب یہ ایک کے برابر ہے لہذا ہم جو مشاہدہ کرتے ہیں وہ الٹا ہے لہذا z کو ایک سے mod z وہ ہے
z inverse کچھ نہیں ہے مگر mod z inverse الٹا موڈ لہذا یہ ہے نتیجہ جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ اس کا مطلب یہ ہے کہ
کا ماڈیولس جو z by one ہے
آپ فرض mod z two دیتا ہے۔ by z ایک mod z کا ماڈیولس ہے جو z one by z two تو یہ ہماری تجویز اور تجویز آٹھ ہے جو
سے الٹا ضرب z ایک کو z دو کمپلیکس نمبر کی مصنوع کے طور پر جو کہ c ٹو غیر صفر ہے نتیجہ پھر یہ ہے کہ ہم صرف z کرتے ہیں کہ
mod z ٹو الٹا کا ماڈیولس z دیا جاتا ہے پھر ہم دیکھتے ہیں کہ ماڈیولس ہر فیکٹر کے لیے لاگو ہوتا ہے اور پچھلی تجویز ہم صرف ثابت کیا کہ
ٹھیک ہے اب ایک اور دلچسپ نتیجہ ہے جسے م mod z one by mod z two ٹو مکمل معکوس جیسا ہی ہے اور یہ کچھ بھی نہیں مگر
z ایک مائنس z ٹو z one z دو پورے مربع کے علاوہ ماڈیولس کا ماڈیولس z one z توازی علم قانون کہا جاتا ہے اس میں کہا گیا ہے کہ
مربع کے دو مرتبہ کے برابر ہے ٹھیک ہے وہ اسے م mod z2 مربع پلس mod z one دو پورا مربع جو کہ
توازی علامت قانون کیوں کہتے ہیں آئیے ہم اس کا مشاہدہ کرنے کی کوشش کریں
ٹو جو بالکل وہی ویکٹر دیتا ہے جو z ایک جمع z ٹو ہے اور ہم جانتے ہیں کہ z ون کہتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ یہ z تو آئیے پوائنٹ کو
اس م
دو ویکٹر دیتا ہے۔ اب اگر آپ شناخت z ایک مائنس z دو ہے اور اسی طرح دوسرا اخترن z ایک جمع z توازی علامت کا اخترن ہے جو

دیکھتے ہیں
تو یہ کہتا ہے کہ اس اخترن کی وسعت کے مربع کو اس کا مجموعہ سمجھا جاتا ہے جو م
توازی علامت کے م
آسان ہے آپ کو صرف f توازی خط کے اطراف کے لئے مربع رقم کے دو گنا کے برابر ہے لہذا یہ بہت دلچسپ خاصیت ہے لہذا اور ثبوت
z پہنچ سکتے ہیں جو کہ lhs بائیں ہاتھ کی طرف پھیلانے کی ضرورت ہے پھر ہم آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں کہ آپ دائیں ہاتھ کی طرف
z دو ضرب کے ساتھ z ایک جمع z کا پورے مربع کا ماڈیولس ہے لہذا تعریف کے مطابق یہ ہے z ایک مائنس z ٹو مربع جمع z ایک پلس
پوری بار سے اس لیے ہم جس مقدار کا حساب لگا رہے ہیں وہ z ایک مائنس z دو ضرب کے ساتھ z ایک مائنس z دو بار جمع z ایک جمع
z دو ضرب کے ساتھ z ایک جمع z کو پورے مربع میں اس طرح ہم نے لکھا ہے z ایک مائنس z دو پورے مربع جمع z ایک جمع z ہے
ہے۔ ایک بار z ایک میں z ٹو بار کو آسان بنا کر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ z ایک بار مائنس z دو ضرب کے ساتھ z ایک z دو بار z ایک بار
جو موڈ زیڈ ایک مربع ہے اور دوسری اصطلاح جو کہ موڈ زیڈ 2 مربع ہے اور باقی اصطلاح جو ہمارے یہاں ہے وہ ہے زیڈ 1 زیڈ 2 بار پلس زیڈ 1
کے دو مربع باقی فیکٹرز مخالف علامت کے mod z بار زیڈ ٹو اس اصطلاح پر ہمیں دوبارہ اصطلاح ملتی ہے جو کہ موڈ زیڈ ون مربع ہے اور
ٹو ہیں کہتے ہیں کہ یہ اصطلاحات ایک دوسرے کو bar minus z one bar z سے z one z ساتھ آتے ہیں۔ یہ فیکٹرز جو مائنس
دو مربع کا دو گنا ہے اور آئیے ایک مسئلے پر بات کریں جس mod z ایک مربع جمع z منسوخ کر دیتی ہیں پھر ہمیں جو حاصل ہوتا ہے وہ موڈ
ٹو کا ماڈیولس بھی ایک کے برابر ہے اور اس z کا ماڈیولس ایک کے برابر ہے اور ساتھ ہی z میں ماڈیولس کا نشان شامل ہے۔ ثابت کریں کہ اگر
کے بعد ان کی پیداوار مائنس ون کے برابر نہیں ہے
دو سے تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک حقیقی نمبر ہے ٹھیک ہے z ایک z دو کو ایک جمع z ایک جمع z تو ہم دکھا سکتے ہیں کہ
ٹو ہے وہ بنیادی طور پر اصل سے یونٹ کے فاصلے پر ہیں اور z one z تو آئیے ہم اس مسئلے کو دیکھنے کی کوشش کریں جو دیا گیا ہے وہ
حقیقی نمبر یہ دیکھ کر بہت اچھا لگتا ہے کہ a ان کی پیداوار مائنس ون کے برابر نہیں ہے پھر مقدار جس کی ہم نے تعریف کی ہے وہ ہے
ایکسپریشن پیچیدہ نظر آتا ہے لیکن آخر میں ہمیں جو ملتا ہے وہ ایک حقیقی نمبر ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ اسے کیسے دکھایا جائے جیسا کہ میں نے
یہ برابر ہے جو ایک جیسا ہے۔ یہ کہتے ہوئے کہ خیالی حصہ bar z اور z پہلے کہا تھا کہ ایک پیچیدہ نمبر ایک حقیقی نمبر ہے بس اتنا کہ
صفر ہے
ٹو کے ساتھ سمجھیں z ایک پروڈکٹ کو z ٹو ایک جمع z ایک جمع z کو نمبر a تو آئیے اس کی تعریف کرتے ہیں جیسے
تو ہمارا دعوی ایک بار کے برابر ہے جو ظاہر کرتا ہے کہ خیالی حصہ صفر ہے لہذا اب ایک بار کو اب اس پراپرٹی پر غور کریں جو بھی ہم نے
مطالعہ کرنے سے پہلے اس کو لاگو کرنے جا رہے ہیں لہذا پرانے فیکٹر کے لیے جوڑ
z one ٹھیک ہے اب ہم z one bar z two bar ٹو بار جمع z one bar z تو جب ہم اس کے لیے کنجوجیشن کر رہے ہیں جو کہ
ٹو کے z کا کنڈیشن ماڈیولس استعمال نہیں کیا ہے اسی طرح z one سے جوڑنے کی ضرورت ہے کسی طرح ٹھیک ہے ہم نے z کو bar
برابر کا ماڈیولس ایک کے برابر ہے اس لیے ہمیں اس شرط کو استعمال کرنے کی ضرورت ہے
ایک کے برابر ہے۔ mod z تو اب دیکھتے ہیں کہ چونکہ
ایک مربع کہتے ہیں z تو یہ ہمیں دیا گیا ہے جو کہ اس کا مربع ایک کے برابر ہے آئیے ہم اسے پہلا نمبر
الٹا ہے z بار z بار کیا ہے z بار ایک ہے اور ٹھیک ہے ہم حاصل کرنے کے قابل ہیں کہ z میں z تو یہ وہی ہے جیسا کہ اس کا مطلب ہے
z ہے۔ 1 بذریعہ g بار z لہذا اس تعلق سے ہم صرف یہ حاصل کرتے ہیں کہ
bar s سے z اسی طرح z one bar کو اپنا کمپلیکس نمبر سمجھا ہے لہذا z one تو ہم نے اس اشارے کے ساتھ طے کیا ہے کہ ہم نے
ٹو ہے ٹھیک ہے اب ہمیں صرف اس تعلق کو استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔ ایک بار میں اس طرح ایک بار دیا جاتا ہے ہمارے پاس one by z
ایک سے z ٹو سے اور ایک جمع ایک کو z ٹو بار کو ایک سے z ایک سے بدل دیا جاتا ہے اور اسی طرح z ایک بار ہے جسے ایک سے z
دو کے طور پر ختم کرتے ہیں ایک z ایک جمع z دو سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس اظہار کو جو ہم z ضرب دیا جاتا ہے اور آسان بنا کر ایک کو
ایک حقیقی نمبر ہے ٹھیک ہے a دو سے ضرب کیا جاتا ہے جو کہ ایک ٹھیک کے سوا کچھ نہیں ہے اس کا مطلب ہے z ایک کو z جمع
بار ایک ہے z میں z ایک کے برابر ہے پھر ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ z تو آئیے یہاں اپنا تبصرہ یا تبصرہ لکھیں جو ہم نے دیکھا کیا موڈ
سے ایک ہے z بار کا ماڈیولس وہی ہے جو موڈ z کے طور پر ایک لکھا جا سکتا ہے اور صرف ایک بار پھر دیکھیں کہ z ok بار کو z اور
جو دوبارہ ایک ہے۔
ہے۔ ہم اسے سمجھنے let کمپلیکس نمبر کہتے ہیں جن کا ماڈیولس ایک z تو آئیے اس کے بارے میں دوبارہ سمجھنے کی کوشش کریں وہ تمام
کے طور پر سمجھیں جو تمام پیچیدہ نمبروں کے سیٹ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے جیسے u کی کوشش کرتے ہیں لہذا یونٹ کے دائرے کو سیٹ
کہ جس کا ماڈیولس ایک ہے اب یہ بیان کرنے کی کوشش کریں کہ سیٹ میں موجود تمام عناصر کیا ہیں
سمجھیں iy جمع x کو z لکھتے ہیں ایک یہ بالکل ٹھیک ہے اگر ہم mod z تو جب ہم
مربع کا مربع جڑ ہے اگر ہم اسے مربع سمجھتے ہیں y مربع جمع x جو کہ mod z تو
ایک کے برابر ہے mod z مربع ہے اور اسے دیا جاتا ہے کہ y مربع جمع x تو یہ
اس مساوات کو پورا کرتا ہے اور جس سے ہم بہت واقف ہیں کہ یہ xy تو یہ ایک ہے اب آپ پوچھیں گے کہ عناصر کے تمام جوڑے کیا ہیں
مرکز کے ساتھ یونٹ کے دائرے کو اصل کے طور پر بیان کرتا ہے
تو آئیے تصویر کھینچتے ہیں تاکہ ہمارے پاس اکائی کا دائرہ ہو
اس یونٹ کے دائرے کو u جو اس مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس کا مطلب ہے کہ سیٹ xy تو اس پر کوئی نقطہ نظر آتا ہے۔ دائرے پر جوڑا
پر وہ i جو اس مائنس 1 پر ہے اور مائنس i بالکل بیان کرتا ہے اب ہم اس کے پوائنٹس کو جانتے ہیں مثال کے طور پر ایک جو اس پر ہے اور
ایک کے برابر ہے پھر ہم نے نتیجہ اخذ mod z پچھلے مسئلے کا دائرہ بنائیں جس پر ہم نے بحث کی تھی جہاں nit جھوٹ بولتے ہیں یہ یو
بار کے برابر z میں z جو بہت آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے بس اس مساوات کا مطلب ہے کہ z بار کچھ نہیں ہے مگر ایک بذریعہ z کیا کہ
ایک ہے mod z مربع ایک کے برابر ہے جو سوراخ ہے کیونکہ mod z بار کے سوا کچھ نہیں z میں z ایک
لیتے ہیں i تو آئیے اس گراف پر تصور کرنے کی کوشش کریں جب ہم
الٹا بالکل اس کا جوڑ ہے جس کا مطلب ہے کہ میں احترام کے ساتھ الٹا ہوں۔ z ہے اور یہ مساوات بتاتی ہے کہ i تو اس کا کنجوجیشن مائنس
ہے اگر آپ اس دائرے پر اس لائن پر کوئی عنصر لیتے ہیں i پیچیدہ مصنوع کے لیے کچھ بھی نہیں مگر اس کا کنجوجیشن جو کہ مائنس
تو اس کے آئینہ کی تصویر پر غور کریں جو بالکل جوڑ ہے دائرے کے کسی بھی نقطہ پر غور کریں اس کے عکس کی تصویر پر غور کریں جو وہ
کا انوائس جو دائرے پر بھی ہے اس لیے اگر آپ ایک لیں z بار ہے بالکل
تو اس کا عکس خود الٹا ہے اور اگر آپ مائنس ون لیں گے
تو اس کا عکس دوبارہ خود الٹا ہے
مائنس ون st ہے۔ پیچیدہ پراڈکٹ کے حوالے سے ju تو الٹا

تو ہم نے یہاں کیا مشاہدات کیے ہیں جب بھی ہم یونٹ کے دائرے میں دو پیچیدہ نمبروں کو ان کے پروڈکٹ کو دوبارہ یونٹ کے دائرے میں لیتے ہیں
دو اور ہر ایک ماڈیولس ایک ہے لہذا ان کی z ہے۔ mod z one mod کا ماڈیولس z one z two یہ صرف ایک سادہ خاصیت ہے کہ
میں ہے اور نہ صرف یہ کہ یہ u بھی z میں uz inverse پیداوار ایک اور دوسری اہم خاصیت ہے جس کا ہم نے مشاہدہ کیا ہے جب بھی
z دو z ایک z کا جوڑ ہے لہذا اس مشاہدے کے ساتھ آئیے ایک اچھی شناخت ثابت کریں چار پیچیدہ اعداد z الٹا صرف اس کا z one z
چار یا پیچیدہ نمبروں پر غور کریں z تین
فور پروڈکٹ z ایک مائنس z فور جمع z تھری مائنس z ٹو پروڈکٹ کے ساتھ z ایک مائنس z تو یہ مندرجہ ذیل مساوات کو پورا کرتا ہے
چار کے ساتھ اس شناخت کا مشاہدہ کریں یہ z دو مائنس z تھری پروڈکٹ کے برابر ہے z ایک مائنس z تین کے ساتھ یہ z دو مائنس z
کوئی بھی چار کمپلیکس نمبر ہو سکتا ہے
تو درج ذیل مساوات کا مطمئن ثبوت آسان ہے بس پھیلائیں بائیں ہاتھ کی طرف اور دائیں ہاتھ کی طرف پھر آپ دیکھیں گے کہ دونوں ایکسپریشن
z فور جمع z تھری مائنس z ٹو z ایک مائنس z برابر ہیں آئیے ہم بائیں ہاتھ کی طرف غور کریں بائیں ہاتھ کی طرف وہ ایکسپریشن ہے جو
z فور مائنس z ایک z تھری مائنس z ایک z چار کے ساتھ ضرب کیا گیا ہے۔ زیڈ دو مائنس زیڈ تھری اب صرف اس کو بڑھاو z ایک مائنس
تین ٹھیک ہے اب ہم دیکھتے z 4 z پلس 2 z 4 z مائنس 3 z 1 z مائنس 2 z ایک z فور اور مزید پلس z ٹو z تھری پلس z ٹو
ٹو زیڈ فور ٹھیک ہے شاید ہمیں دائیں ہاتھ کی z ہیں کہ ان کے ساتھ کچھ مشترکہ اصطلاحات ہیں وہ ایک دوسرے کو منسوخ کر دیتے ہیں جو کہ
فور مائنس زیڈ تھری زیڈ ٹو پلس زیڈ تھری زیڈ چار z one z ٹو مائنس z one z ایک ہے آئیے اس کو بڑھاتے ہیں z طرف جانے دیں جو
پھر ہم ان دو عناصر کی شناخت کرتے ہیں اور اسی طرح زیڈ تھری اور اس کی ہم نے شناخت کی اور زیڈ ایک زیڈ فور ہم نے شناخت کیا کہ ایک زیڈ
ٹو کی شناخت ہو گئی ہے اور یہ دونوں منسوخ ہو جاتے ہیں
تو ہم نے بائیں کے بطور تصدیق کیا ہاتھ کی طرف دائیں ہاتھ کے برابر ہے
دلچسپ بات یہ ہے کہ یہ ایک غیر معمولی شناخت ہے جسے آپ کسی بھی چار کمپلیکس نمبر پر غور کرتے ہیں یہ اس ry ہے۔ ve تو یہ
مخصوص شناخت کو پورا کرتا ہے اب ہم ایک سادہ سا مسئلہ دیکھ سکتے ہیں جو یہ ظاہر کرتا ہے کہ یہ شناخت کتنی اچھی ہے مسئلہ فرض کریں
کہ ہمیں ایک جہاز میں چار پوائنٹس دیئے گئے ہیں
یا پوائنٹس abcd تو دکھائیں کہ اگر ایک جہاز میں
پلس cd جمع ca سے ضرب bd سے کم یا برابر کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے bc تو درج ذیل عدم مساوات کو پورا کرتا ہے جو اشتہار کو
کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے ab
تو آئیے ہم اس خاص عدم مساوات کو سمجھنے کی کوشش کریں
تو آئیے ہم ایک ڈرا کرنے کی کوشش کریں ڈایاگرام اگرچہ پوائنٹس کو کسی بھی طریقے سے تقسیم کیا جاسکتا ہے ٹھیک ہے لہذا سادگی کے لئے
میں کچھ ایسا فرض کرنے کی کوشش کر رہا ہوں جیسے وہ واقعی ایک لائن میں نہیں پڑے ہوئے ہیں حقیقت میں ہم یہ کہتے ہیں کہ یہ بنیادی طور
ہے abcd پر کسی قسم کی شکل دیتا ہے لہذا آئیے اسے اس طرح کہتے ہیں۔
AC سے کم یا مساوی ہوگا آپ جو bd سے ضرب پر غور کریں یہ ہمیشہ bc تو یہ عدم مساوات کہتی ہے کہ آپ لمبائی کے اشتہار کو لمبائی
کے ساتھ ضرب دیتے ہیں ٹھیک ہے ab کو cd ضرب کرتے ہیں اور
تو ثبوت یہ ہے کہ جو آسان ہے صرف پچھلی شناخت کا استعمال کرتے ہوئے مجھے صرف شناخت لکھنے دیں
تو ہمارے پاس کیا ہے
تو ہم کیا کر سکتے ہیں ایک بار جب یہ پوائنٹس جہاز میں رکھے جائیں
کے ساتھ منسلک a z one تو ہم ہر ایک عمودی یا اختتامی پوائنٹس کو ایک پیچیدہ نمبر کی طرف شناخت کر سکتا ہے لہذا ہم یہ کہتے ہیں کہ یہ
z تھری سے منسلک ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ اس کے ساتھ منسلک ہے z پوائنٹ c ٹو سے منسلک ہے اور z ہے اور یہ بنیادی طور پر
فور z دو مائنس z تین z ایک مائنس z تین جو کہ برابر ہے z دو مائنس z چار z ایک مائنس z چار پھر پچھلی شناخت کہتی ہے کہ
فور کے ساتھ ضرب دیا گیا z تھری مائنس z دو کو z ایک مائنس z مائنس
z 2 جو کہ c سے b چار ہے اور z ایک سے z کی اصطلاح ملتی ہے جو کہ a to d تو میں نے ابھی دوبارہ لکھا اس طرح کہ مجھے
ہے جب میں اس شناخت کی مطلق قدر لیتا ہوں z 3 سے
کا ماڈیولس جو دیتا ہے اس ویکٹر کی وسعت جو کہ لمبائی دیتی ہے۔ اشتہار z 4 مائنس z 1 تو
تھری کے ماڈیولس کے ساتھ اور z ٹو مائنس z فور پروڈکٹ کا ماڈیولس z ایک مائنس z تو اب ماڈیولس نشان کو اس شناخت پر لے جائیں پھر
ملے گا۔ ٹو مائنس زیڈ فور z one z three اب آپ کے پاس پوری اصطلاح کا ماڈیولس ہے اور مثلث کی عدم مساوات کو لاگو کریں ہمیں
جمع زیڈ ایک ماڈیولس آف زیڈ ون مائنس زیڈ ٹو ماڈیولس آف زیڈ تھری مائنس زیڈ فور اب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ اشتہار کی لمبائی کو بیان کرتا ہے جو
ac تھری جو z ایک مائنس z تھری سے ضرب کیا جاتا ہے جو کہ بی سی کی لمبائی ہے جو اس سے کم یا اس کے برابر ہے۔ z ٹو مائنس z
سے ضرب کیا جاتا cd ok سے ab ٹو ہے جسے z ایک مائنس z پلس bd فور سے ضرب کیا جاتا ہے جو z دو مائنس z کی لمبائی
ہے لہذا ہم اس شناخت کو استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ عدم مساوات حاصل کرنے کے قابل ہیں اب ہم کرتے ہیں ایک اور مسئلہ
کہا جاتا unimodular کو z کہا جاتا ہے unimodular کو z تو اس مسئلے کی طرف جانے سے پہلے میں صرف یہ بتاتا چلوں کہ
ایک ہے mod z ہے اگر
ہے۔ اکائی کے دائرے z ly کا ماڈیولس ایک ہو مطلب z ہے اگر unimodular تو صرف ایک اصطلاح ہم کہتے ہیں کہ ایک کمپلیکس نمبر
کے مسئلے پر غور کریں
ٹو z تقسیم کیا گیا ہے اور z1 z2 کو 2 سے مائنس z2 ایک مائنس z کو پیچیدہ اعداد ہونے دیں اور فرض کریں کہ نمبر z one z تو
نہیں ہے unimodular
محور کے آپشن کے م x پر ہے یہ z1 a تو ہمیں مندرجہ ذیل میں سے کسی ایک کو منتخب کرنے کی ضرورت ہے۔ نقطہ
محور آپشن کے م b y توازی سیدھی لکیر پر پڑا ہے
چاہے یہ رداس دو کے دائرے پر واقع ہے c توازی سیدھی لکیر
ایک دو ہے چاہے رداس جڑ کا دائرہ دو ٹھیک ہے z کے اس ایک ماڈیولس کا مطلب یہ ہے کہ آیا zs تو
ہے مطلب یہ ہے کہ اس نمبر کا unimodular دو بار z ایک ضرب z دو سے دو مائنس z ایک مائنس دو گنا z تو ہمیں یہ دیا گیا ہے کہ
ایک سیدھی لکیر میں ہے یا ایک z پھر ہمیں یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ آیا unimodular دو کا ماڈیولس نہیں ہے z ماڈیولس ایک ہے اور
دائرے میں مخصوص اختیار کے ساتھ کہ آیا رداس دو ہے یا جڑ دو اگر بالکل ایک دائرے میں ہے
ون کی شرائط کے ساتھ کیا ہوتا ہے۔ z تو آئیے ہم یہ جاننے کی کوشش کریں کہ
z ایک z دو کا ماڈیولس ہے دو بار کے دو بار سے دو مائنس z ایک مائنس دو z تو آئیے ہم یہ دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں کہ دیا گیا نقطہ
ٹو کا ماڈیولس ایک کے برابر نہیں ہے یہ دیئے گئے مفروضے ہیں۔ اور پہلے مفروضے کے ساتھ ہم دیکھ سکتے z دو بار کا ماڈیولس ایک ہے اور

mod دو بار مربع کے ماڈیولس جیسا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ z ایک z ٹو مربع کا دو گنا ہے جو دو مائنس z ایک مائنس کا ماڈیولس z ہیں کہ
بار سے یہ اسی طرح z ایک مائنس ٹو z دو ضرب سے z ایک مائنس ٹو z بار کے برابر ہے۔ لکھیں کہ اس کا مطلب ہے z میں z مربع z
دو بار سے ضرب پوری بار z ایک z دو بار کو دو مائنس z ایک z ہے جیسے دو مائنس
ایک مائنس زیڈ ون مائنس ٹو زیڈ ٹو اور زیڈ ون بار کے ساتھ ضرب دو بار زیڈ ٹو بار یہ دو مائنس زیڈ ون زیڈ ٹو بار z تو اس کا مطلب یہ ہے کہ
ایک مربع اور دوسرا عنصر z دو مائنس زیڈ ون بار اور زیڈ ٹو کے برابر ہے اور اب صرف سادہ حساب کریں ہم دیکھتے ہیں کہ یہ موڈ ہے۔
ایک بار کا دو گنا z دو بار اور مائنس z one z ایک ضرب ہمارے ساتھ z ایکٹر ہے مائنس f دو مربع کا چار گنا ہے اور باقی mod z
دو بار پر موڈ ہے مربع سے کوئی فرق نہیں پڑتا z دو کے ساتھ دائیں ہاتھ کی طرف یہ چار کے برابر ہے اس کا موڈ مربع جو ایک موڈ z ضرب
ٹو بار کے دو گنا ہیں ہم z one z دو مائنس z ایک بار z کا ماڈیولس ہے بقیہ فیکٹرز مائنس دو گنا z بار کا ماڈیولس دوبارہ z کیونکہ
ایک mod z دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں فیکٹرز عام طور پر ظاہر ہوتے ہیں وہ منسوخ کر دیتے ہیں لہذا ہم مندرجہ ذیل مساوات حاصل کریں کہ
پورے مربع کو بار کرنے کے لئے یہ صفر کے برابر ہے اب ہم دیکھتے z ایک z دو مربع مائنس چار مائنس mod z چار بار mod مربع پلس
ضرب کے طور پر تقسیم کر سکتے ہیں۔ بذریعہ موڈ زیڈ 1 مربع موڈ زیڈ 2 مربع پھر mod z1 ہیں کہ اس سے ہم صرف اس اصطلاح کو
[موسیقی] عام عنصر اگر ہم موڈ زیڈ اسکوائر زیڈ 1 اسکوائر ون مائنس موڈ زیڈ 2 اسکوائر اور بقیہ اصطلاح کو نکالنے کی کوشش کریں جو کہ اگر
ہم مائنس 4 کامن نکالیں
اسے پروڈکٹ کی اصطلاح کے طور پر لکھیں ٹھیک ہے جو آسانی سے دیکھتا ہے c تو 1 مائنس موڈ زیڈ 2 اسکوائر اس صفر کے برابر ہے اب ہم
کہ یہ آتا ہے کہ ایک مائنس موڈ زیڈ 2 مربع کو موڈ زیڈ کے ساتھ ضرب ایک مربع مائنس چار صفر کے برابر ہے اور یہ فرض کیا گیا ہے کہ موڈ
زیڈ ٹو ایک کے برابر نہیں ہے یہ فوری طور پر بتاتا ہے کہ یہ ہے ایک غیر صفر کی اصطلاح یہ ایک غیر صفر کی اصطلاح ہے
تو فوراً نتیجہ اخذ کرتا ہے کہ موڈ زیڈ ایک مربع ہے چار اور موڈ زیڈ ایک دو ہے یہ فوراً کہتا ہے کہ آپشن سی درست ہے جو کہ موڈ زیڈ ون رداس
دو کے دائرے پر ہے ٹھیک ہے
خلاصہ یہ ہے کہ ہم پیچیدہ نمبروں کے ماڈیولس کے بارے میں مزید خصوصیات پر تبادلہ خیال کرتے ہیں اور کمپلیکس نمبر کے i تو اگر
ماڈیولس کے ساتھ مل کر کمپلیکس نمبر کے کنجوجیشن کی خصوصیات کا استعمال کرتے ہوئے ہم نے کچھ مسائل اخذ کیے اور اگلے لیکچر میں ہم
پیچیدہ نمبروں کے لئے آرگن پلین اور قطبی نمائندگی کے بارے میں بات کریں گے شکریہ۔

Prutor@IITK