[موسیقی] پچھلے لیکچر میں ہم نے پیچیدہ اعداد اور اس کے الجبری آپریشنز کے اضافے اور ضرب کو متعارف کرایا تھا مجھے پچھلی تعریفوں کو
سے ظاہر کرتے c یاد کرنا شروع کرنے دیں جو ہم نے متعارف کرائی ہیں پہلے مجھے پیچیدہ اعداد کی تعریف کو دوبارہ دہرانے دیں جس کو ہم
حقیقی اعداد سے آتے ہیں اور جو ہم نے کہا وہ یہ ہے کہ دو b اور a جہاں ib ہیں اس میں تمام عناصر کا مجموعہ ہوتا ہے۔ ایک جمع
یہ برابر ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ دوبارہ تعریف ہو id جمع c برابر ہے ib کمپلیکس نمبرز برابر ہیں جو کہ ایک جمع
اس کے تحت مساوات کا رشتہ جو ہم نے دکھایا وہ یہ ہے کہ ہم ہر کمپلیکس نمبر کو ایک ترتیب شدہ d کے برابر b کے برابر اور c تو اگر
ہے مجھے ان کارروائیوں کو یاد کرنے دو جو اضافہ ہے لہذا دو پیچیدہ b ٹو سے ایک کوما r جوڑے سے شناخت کر سکتے ہیں جو ہوائی جہاز
نمبروں کے اضافے کی وضاحت کی گئی ہے۔ جیسا کہ آپ اصل حصہ اور خیالی حصہ اور ضرب کا مجموعہ کرتے ہیں جس کی تعریف ہم نے
کے طور پر کی ہے ٹھیک ہے i times ad plus dc پلس
تو ان دو آپریشنز کے حوالے سے ہم بتاتے ہیں ایک یہ کہ یہ بندش کے قانون ایسوسی ایٹیو قانون کمیوٹیو قانون اور شناخ
توں کے ساتھ ساتھ ان کے وجود کے الٹا اور تقسیمی قانون کو مطمئن کرتا ہے اس لیے اس جمع اور ضرب کے حوالے سے کمپلیکس نمبر سسٹم ایک
i فیلڈ بن جاتا ہے اس کا ایک فیلڈ اور دیگر ریمارکس ہم کیا ہیں اس پر غور کرتے ہوئے دیکھا کہ اس میں پروڈکٹ ہے پیچیدہ نمبر سسٹم میں ہم نے
ایک خیالی نمبر ہے جس کی شناخت ہم نے ہوائی جہاز میں کی ہے جو i اسکوائر کا مشاہدہ کیا ہے اگر آپ کو یاد ہے کہ ہم نے شروع کیا ہے
صفر کوما ون کے سوا کچھ نہیں ہے لہذا اس کا مطلب ہے کہ یہ اب کوئی خیالی نمبر نہیں ہے۔ ہم کمپلیکس نمبر سسٹم میں ہوائی جہاز کے کسی
بھی نمبر کے ساتھ کمپلیکس نمبر سسٹم کی شناخت کرنے کے قابل ہیں ہم ہوائی جہاز میں عنصر کو جوڑنے کے قابل ہیں لہذا اس پیچیدہ فیلڈ پر اس
مربع مائنس 1 بن جاتا ہے۔ اور اسی طرح کوئی اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ i مخصوص ڈاٹ پروڈکٹ کے حوالے سے ہم نے دیکھا کہ
ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ s صفر کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جو کہ i اگر آپ اصلی لائن پر صرف ان پوائنٹس پر غور کریں جنہیں جمع
ہے ab صفر کے ساتھ ایک نقطے کے طور پر ظاہر کریں گے لہذا اس ضرب کے تحت ہم صرف یہ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ i جمع b ہم اسے
سے ظاہر کرتے جارہے ہیں اور اگر ہم غور کریں ab صفر میں ایک مصنوعہ ہے جسے ہم صرف i یہ حقیقی نمبروں کے علاوہ
کے ساتھ کہتے ہیں id ڈاٹ پراڈکٹ کو ib تو کہیں۔ خیالی اعداد جو کہ
ہو جاتا ہے ہم صرف اصلی حصہ کو ظاہر کرنے جا i zero پلس bd ok تو ہم دکھا سکتے ہیں کہ اس پروڈکٹ کے حوالے سے یہ مائنس
براہ راست idi پلس c اور ib پلس a رہے ہیں اور اس کے ساتھ ضرب کہتے ہیں کہ ہم واقعی کیا کر سکتے ہیں اصل میں دیکھیں کہ
ضرب کر سکتے ہیں اب میں مصنوع کی وضاحت کیسے کروں
تو اب میں اسے کیسے کر سکتا ہوں
ایک اور پیچیدہ نمبر ہے c ہے خالصتاً ایک خیالی نمبر اور اسی طرح ib a ایک پیچیدہ عدد ہے اس میں صرف اصلی حصہ ہے اور a تو یہاں
لیکن صرف خیالی حصہ کے ساتھ صفر ہے
فور ہے اب اس مخصوص پروڈکٹ کو آپ استعمال کرنے جا رہے ہیں۔ z تین z دو ہے یہ z ایک ہے یہ z تو ہم واقعی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ
کے ساتھ ضرب دیا گیا اب id پلس c کو ib کے ساتھ ضرب کیا گیا اور id پلس c تقسیم کا قانون یہ ایک ڈاٹ ہے اس لیے سیٹ ایک کو اس
سب bd مائنس ibc پلس یہاں iad پلس ac ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دوبارہ مزید تقسیمی قانون کو مزید ایک بار اور لاگو کرنے کے لیے یہ ہے
ایک ساتھ ہم صرف وہی وصول کرتے ہیں جو ہم نے ایک پروڈکٹ کے طور پر بیان کیا ہے اب پیغام کے پیغامات کیا ہیں
تو مجھے صرف یہ دیکھنے دیں کہ ہم یہاں پروڈکٹ کو اس طرح سے ڈیفائن کرتے ہیں پھر نتیجے میں آنے والا ویکٹر ایک پیچیدہ نمبر ہے پھر ہم
نے تمام قوانین کی تصدیق کی اور پھر کہنے کی خصوصیات کا استعمال کیا۔ اس فیلڈ کے محور کے بارے میں اب ہم یہ دیکھنے کے قابل ہیں کہ اب
مزید کچھ کہنے کی ضرورت نہیں ہے کہ پروڈکٹ کو یاد رکھنے کی ضرورت ہے بس پروڈکٹ کو معمول کے مطابق کریں اور یہاں ہم اس حقیقت
مربع ہے مائنس ون ہے لہذا اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم میں بنیادی طور پر معمول کے مطابق پروڈکٹ i کو استعمال کر رہے ہیں کہ
کر سکتا ہوں ٹھیک ہے اب مجھے صرف کچھ اور اشارے متعارف کرانے دیں جن میں سے ایک یہ ہے کہ اس کا اصل حصہ ہے
کے طور پر کی گئی ہے جو کہ بہت حقیقی re re z کا حقیقی حصہ جس کی تعریف z ہے ib ایک پلس z تو ہم صرف یہ کہتے ہیں کہ
ہے اور اگر کہتے ہیں کہ یہ ایک دو b استعمال کیا جاتا ہے جو imz کا خیالی حصہ ہے جس میں اشارہ z ہے اور a کا حصہ z ہے۔
کا اصل حصہ صفر ہے z تنہائی ہے اگر فرض کریں کہ
خالصتاً ایک ہے۔ خیالی نمبر اس لیے یا z تو ہم کہتے ہیں کہ ہم کہتے ہیں کہ
کا خیالی حصہ صفر ہے z تو ہم کہتے ہیں کہ یہ خالصتاً ایک خیالی نمبر ہے یا صرف ایک ایک خیالی نمبر ہے اسی طرح اگر
خالصتاً حقیقی ہے z تو ہم کہتے ہیں کہ
ہے ایک پیچیدہ نمبر کی اس لیے کمپلیکس نمبر کے conju ate تو اس سادہ اشارے کے ساتھ میں نئی تعریف کے ساتھ آغاز کرتا ہوں جو کہ
بار کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے جو کہ z ہے جہاں ib ایک جمع z بار کنجوگیٹ سے ہوتی ہے جہاں z کے z کنجوگیٹ کی تعریف
کے ذریعے دیا جاتا ہے ib ok مائنس
پر غور کریں جو z بار کی تعریف ہے آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہے اس کا مطلب ہے کہ ہمارے پاس پیچیدہ طیارہ ہے اور آئیے پوائنٹ z تو یہ
ہے ib کہ پلس
بار ہے بالکل اس بات کی نشاندہی کرتا ہے کہ ہم اس یونٹ کو z ہے اور حقیقی اکائی پر یہ اب ib تو جس کا مطلب ہے کہ خیالی اکائی میں یہ
کے طور پر اگر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ اصل محور کے ib کو مائنس ng ہیں denoti بار ہم z اور ib لے رہے ہیں جو مائنس ہے
کی آئینہ دار تصویر کے سوا کچھ نہیں ہے z حوالے سے
محور یا حقیقی لکیر ہم سادہ دیکھتے x کی آئینہ دار تصویر ہے جس کے حوالے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ z بار کچھ بھی نہیں ہے بلکہ z تو
ہے اور فرض کریں کہ آپ نے کہا ہے i بار صرف دو مائنس تین iz ہم یہ کہتے ہیں کہ دو جمع تین z ہیں۔ مثال کے طور پر فرض کریں کہ
بار میں کوئی تبدیلی نہیں ہے جو صرف پانچ ہے کیونکہ یہ z کہ یہ صرف ایک حقیقی نمبر ہے خالصتاً ایک حقیقی نمبر ہے کہنے دیں کہ پانچ
اصلی لائن پر پڑا ہوا ہے اس لیے اس کا عکس دوبارہ لائن پر ہی بنتا ہے
ایک حقیقی نمبر ہو یا z بار کے برابر کہتے ہیں اگر اور صرف اس صورت میں جب z کو z تو آئیے کچھ خصوصیات دیکھیں فرض کریں کہ
دوسرے لفظوں میں
بار کے برابر ہے جس کا مطلب ہے کہ آئینہ کی z کا خیالی حصہ صفر ہے ٹھیک ہے لہذا اگر ہم دیکھتے ہیں کہ z تو اس کا مطلب صرف
تصویر لگانے کے بعد ہمیں وہی نمبر ملتا ہے
کے اس کا کیا z bar برابر z پھر فرض کریں کہ z a ہے plus ib تو یہ اصل لائن پر پڑے گا جس کا ہم دعویٰ کر رہے ہیں لہذا اگر
ہے ib ایک مائنس ib مطلب ہے اس کا مطلب یہ ہے۔ ایک جمع
تو یہ فوری طور پر واضح ہے کہ ہم دو کمپلیکس نمبروں کو برابر کرنے کا مطالبہ کر رہے ہیں
کو منسوخ کر a تو جزو کے لحاظ سے ایک جیسا ہونا ضروری ہے لہذا پہلے اجزاء بہرحال برابر ہیں لہذا صرف فیلڈ ایکسس کے ذریعہ آپ
صفر ہے جو کہ کچھ b کا دو گنا صفر کے برابر ہے اور یہ صرف اس صورت میں ہوتا ہے جب ib سکتے ہیں پھر کیا آپ کو ملتا ہے کہ یہ

کا خیالی حصہ صفر ہے z کا خیالی حصہ z نہیں ہے مگر
کے برابر ہوتا ہے۔ بار پھر یہ ایک حقیقی نمبر ہونا چاہیے لہذا اس مخصوص دلیل کو ہم z تو ہم نے جو مشاہدہ کیا وہ ایک سادہ تجویز ہے جب بھی
بار کے برابر z اکثر یہ کہنے کے لیے استعمال کریں گے کہ ایک پیچیدہ نمبر ایک حقیقی نمبر ہے یہ صرف یہ ظاہر کرنے کے لیے کافی ہے کہ
بار کے لیے z ہے اس طرح کے خیال کو ایک پیچیدہ نمبر دکھانے کے لیے اکثر استعمال کیا جائے گا۔ ایک حقیقی نمبر کی خاصیت دو اگر ہم دوبارہ
کنجوجیشن لگاتے ہیں
بار ایک مائنس ہے اس طرح اور اسے صرف اس z ہے پھر ib ایک جمع z پر واپس آتے ہیں ٹھیک ہے یہ پھر سیدھا آگے ہے z تو ہم واپس
طرح دیکھا جا سکتا ہے۔ مائنس بی اور زیڈ ڈبل بار
تو پھر آپ اس کا جوڑ لیں
ہے b ہے اور پھر مائنس کا مائنس i تو ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ دوبارہ کہتے ہیں کہ یہ پلس
جو ہم کر رہے ہیں وہ اتنا واضح ہے کہ ہم ایک دلیل لکھنے کی کوشش کر رہے ہیں۔ تیسری تجویز اگر i تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ پھر سے ہے یقینا
ہم دو کمپلیکس نمبروں کے مجموعے پر غور کریں
ایک ایک z کو طاقت کے برابر ہے یہ دوبارہ کہنا آسان ہے کہ تصور کرنا آسان ہے کہو کہ چلیں کہ z ایک بار پلس z تو اس کا جوڑ ہے یہ
ہے مکمل جوڑ بذریعہ d جمع b اوقات i پلس c دو بار جو کہ ایک جمع z ایک جمع z ہے پھر id پلس c دو z ہے اور ib جمع
کے طور پر id مائنس c جمع b ہے اور جو بنیادی طور پر ہمیں دیتا ہے جسے ہم اسے مائنس d جمع ib مائنس c تعریف یہ ایک جمع
کے z چوتھی خاصیت یہ ہے کہ ہمیشہ یہ ہے کہ پیچیدہ نمبر میں ہر z one bar plus z to bar لکھ سکتے ہیں۔ کچھ نہیں سوائے
کو بطور تصور کریں جنرل عنصر z بار ہمیشہ ایک حقیقی عدد ایک غیر منفی دو حقیقی نمبر ہوتا ہے لہذا یہ واضح ہے کہ ہم z میں z لیے
ہے اور ہم اس پر غور کرتے ہیں۔ ضرب کے ذریعہ ہم صرف اس بات کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ یہ ایک مربع جمع ib کہتے ہیں جو ایک پلس
بی مربع ہے اور ہر اصطلاح غیر منفی ہے لہذا جمع دوبارہ غیر منفی ہے لہذا اس مخصوص تجویز سے ہم مبصرین کیا خیال کر سکتے ہیں جیسے
ہے۔ دو ان کی مصنوع غیر صفر ہے ٹھیک ہے z one z تبصرہ یا تبصرہ فرض کریں کہ آپ کے پاس
دونوں نان زیرو ہیں لہذا ثبوت میں اسے ایک مشق کے طور پر چھوڑتا ہوں z one z 2 تو ہم حقیقت میں یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ دونوں
اس کے بارے میں سوچیں
تو کیا آپ پچھلی خاصیت کا مشاہدہ کرتے ہیں جب آپ اس کے جوڑ سے ضرب کرتے ہیں
تو یہ ایک دیتا ہے غیر منفی حقیقی نمبر آپ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے اس خاص تبصرہ کو ختم کرنے کے لیے پانچویں خاصیت کا استعمال
اس کا احساس کرنا آسان ہے اس لیے مجھے صرف z one bar in z to bar ہے ہمیں z one in z two bar کرتے ہیں جو کہ
ٹو بار پر غور کرنے دیں پہلے آپ لیتے ہیں۔ پراڈکٹ لیں اور پھر اس کا کنجوجیشن لیں جو کہ ہر کمپلیکس نمبر کے لیے کنجوجیشن z one z
لینے جیسا ہے پھر پروڈکٹ کریں دونوں ایک ہی کمپلیکس نمبر دیں گے
کے ساتھ ضرب دیں اور پھر اس کا جوڑ لیں c plus id کو a plus ib نمبر plex کی پہلی مصنوع پر غور کریں۔ com تو آئیے دو
ملنے والا ہے آپ تصدیق bc پلس iad ہے لہذا کنجوجیشن کے بعد آپ کو مائنس bd مائنس ac ہم جانتے ہیں کہ یہ کون سی پروڈکٹ ہے یہ
ایک بار میں z کر سکتے ہیں کہ یہ پروڈکٹ کچھ نہیں ہے مگر ایک سے آرہا ہے ۔ مائنس آئی بی اور سی مائنس آئی ڈی جو کچھ نہیں ہے سوائے
الٹا کنجوجیشن جو کہ پہلے کنجوجیشن کو لیں اور پھر اس کا الٹا لیں z ٹو بار میں اگلی تجویز z
کے لیے کنجوجیشن لیتے ہیں الٹا آپ کو کیا ملتا ہے یہ بنیادی طور پر ویسا ہی ہے جیسا کہ پہلے آپ کمپلیکس z تو ہم پوچھ رہے ہیں کہ کیا آپ
نمبر کے لیے کنجوجیشن لیتے ہیں اور پھر اس کا الٹا لیتے ہیں
تو اس کی طرح یہ آپریشن کمیٹیٹیو ہے، آئیے ہم صرف اس کو سمجھنے کی کوشش کریں
الٹا اس کا مطلب z کا غیر صفر ہونا ضروری ہے لہٰذا تعریف کے مطابق z الٹا ہے اس کا مطلب ہے کہ یقیناً یہاں ہمیں z تو ہمارے پاس تعریف
کے ساتھ ضرب کرنے سے ہمیں ایک ملتا ہے اور اب آپ مندرجہ بالا خاصیت سے کنجوجیشن کا اطلاق کرتے ہیں z یہ ہے کہ
تو ہم کنجوجیشن کا اطلاق کرتے ہیں۔ اس پروڈکٹ ایلیمنٹ کے لیے دائیں ہاتھ کی طرف ایک حقیقی نمبر ہے اس لیے یہ وہی عنصر دیتا ہے اور
z پراڈکٹ کنجوجیشن وہی ہے جیسا کہ آپ پہلے کنجوجیشن لیتے ہیں اور پھر اس کا پراڈکٹ لیتے ہیں یہ دوبارہ ایک دیتا ہے اس کا مطلب ہے کہ
بار کے لیے الٹا ہے۔ ٹھیک ہے inverse bar z
الٹا بار کے دائیں سا z بار الٹا z تو یہ بالکل وہی ہے جو آپ ثابت کرنا چاہتے ہیں اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ
سے تقسیم کیا جائے گا۔ z ایک بار کو z دو سے اس کا جوڑ لیں یہ وہی ہوگا جیسا کہ z ایک کو z تویں خاصیت ہے جس پر غور کرنا ہے
ٹو غیر صفر ہے z طاقت کو دوبارہ تقسیم کرنے کے معنی میں بنانے کے لیے ہمیں یہ فرض کرنے کی ضرورت ہے کہ جہاں
تو یہ رشتہ دوبارہ اوپر والے ایک سے آتا ہے اس لیے پانچ اور چھ کو ملا کر پانچ اور چھ سے کہتے ہیں کہ ہم مندرجہ ذیل اخذ کر سکتے ہیں جو
دو z دو الٹا کے ساتھ محسوس کیا جا سکتا ہے لہذا میں z ایک پروڈکٹ کو z دو کے ذریعے پورا جوڑ دیا گیا ہے اس طرح z ایک ہے z کہ
الٹا ہے z2 دو سے اس کا مطلب ہے کہ یہ z الٹا لکھ رہا ہوں کچھ بھی نہیں ہے لیکن میں صرف یہ دوبارہ ایک اشارہ ہوں
الٹا بار والی مصنوعہ ہے اور یہ بنیادی طور پر z 2 تو اس کی بار تجویز 5 کہتی ہے کہ اسے ہر فیکٹر پر بار لیا جا سکتا ہے جو ٹھیک ہے یہ
سے بار کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ الٹا مجھے z ایک بار کو z ہمیں اس طرح حاصل ہوتا ہے کیونکہ اوپر کی تجویز ہم دیکھتے ہیں کہ یہ
ہے الٹا بار کرنے کے لئے جیسا کہ میں نے z ایک بار میں z دوبارہ صرف یہ دہرانے دیتا ہوں کہ آخر یہ بار ہے جو ہم نے نتیجہ اخذ کیا ہے
ذکر کیا یہ الٹا عنصر کے سوا کچھ نہیں ہے ہم اسے ایک بائے زیڈ دو بار لکھتے ہیں لہذا تجویز آٹھ ہو سکتا ہے یہاں صرف ایک تبصرہ ہے یا ایک
لکھتے ہیں ok کے ذریعے z تبصرہ ہے جب ہم ایک کو
کے ساتھ پروڈکٹ لیتے ہیں z الٹا ایک عنصر ہے جو جب آپ z الٹا z الٹا ٹھیک ہے پھر z تو اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ صرف
تو یہ دیتا ہے۔ ایک ٹھیک ہے
اوکے صرف منسوخ کرنے کے لیے تاکہ آپ کو ایک مل جائے z الٹا لکھتے ہیں بطور ایک بذریعہ z تو اس خاص معنوں میں ہم اسے
الٹا z الٹا ہے اور یہاں ایک اور تبصرہ کہ لہذا ایک بار جب ہم نے z اس کا مطلب ہے کہ یہ z تو یہ صرف ایک نشانی ہے کہ ایک کے ذریعے
کے بارے میں تبصرہ کیا
بار میں z سے z بار کو z بار سے تقسیم کر سکتے ہیں پھر آپ کو جو ملتا ہے وہ z ہم ضرب اور z یہ دیکھیں کہ 1 سے ju تو آئیے
تقسیم کیا جاتا ہے
ہے ایک پلس آئی بی کے ذریعہ لکھا گیا ہے لہذا اگر z مربع ہے جہاں b اور مربع جمع ib تو ہم جانتے ہیں کہ یہ عنصر کیا ہے یہ ایک مائنس
آپ کو یاد آئے
الٹا کا حساب لگاتے ہیں z تو جب ہم
بار کا استعمال کرکے ہم z الٹا کی قدر معلوم کرنے کے لئے مساوات کو حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں اب ہم دیکھتے ہیں کہ فیکٹر z تو ہم
الٹا حساب کرنے کے قابل ہیں جو کہ ایک z بار سے تقسیم کرنے سے ہم z الٹا آسانی سے صرف ضرب اور z حساب کرنے کے قابل ہیں

کا حقیقی حصہ ہے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔ زیڈ پلس زیڈ z مربع تجویز آٹھ یہ سادہ ہے جو b مربع بذریعہ iba مربع مائنس b مربع جمع
پر z ٹھیک ہے یہ صرف تعریف ہے کہ اگر ہم i بار بائی ٹو اسی طرح زیڈ کے خیالی حصے کو زیڈ مائنس زیڈ بار بائی ٹو میں لکھا جاسکتا ہے
غور کریں
کا اندرونی حصہ z کا حقیقی حصہ ہے . i times imag مائنس z تو یہ زیڈ کے حقیقی حصے کے علاوہ کچھ نہیں ہے اور اس کا جوڑ
بار از دو z مائنس z کا خیالی حصہ z بار دو سے ہے اور اسی طرح z جمع z کا حقیقی حصہ کچھ نہیں بلکہ z اب یہ واضح ہے کہ
کا مربع id جمع c جمع ib اس مساوات کو پورا کرتا ہے۔ جو کہ ایک جمع iy جمع x ہے آئیے ہم ایک سادہ مسئلہ کرتے ہیں پیچیدہ نمبر
مربع دیتا ہے d مربع ہے c مربع بذریعہ b مربع ہے پورا مربع آپ کو ایک مربع جمع y مربع x جو کہ xy جڑ ہے پھر دکھائیں کہ یہ اعداد

سے id پلس c کے مربع جڑ کے برابر ہے جس کو ib جو کہ ایک جمع iy جمع x تو آپ کیا دیکھتے ہیں کہ فرض کریں کمپلیکس نمبر
تقسیم کیا جائے
مربع z کا مربع جڑ ہے بذریعہ تعریف b کچھ z تو ہم اس تعلق کو حاصل کرنے کے قابل ہیں لہذا ہمیں یہ ثابت کرنا ہوگا کہ میں کہتا ہوں کہ
ہے ٹھیک ہے
اس مساوات کو پورا کرتا ہے az کے برابر ہونا چاہئے لہذا جب بھی b ok کا کیا مطلب ہے اور یہ z میں z تو ہم جانتے ہیں کہ
ہے پورا iy جمع x کے طور پر لکھتے ہیں لہذا دیئے گئے مفروضے سے ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے z کے مربع جڑ کے برابر b تو ہم اسے
id پلس c تقسیم کے برابر ہونا چاہیے۔ بذریعہ ib مربع ایک جمع
تو اب پیچیدہ نمبر ہے لہذا اگر آپ شناخت کو دیکھتے ہیں
تو اس میں کوئی پیچیدہ قدر شامل نہیں ہے بس آخر میں یہ اس عنصر کے برابر ایک حقیقی نمبر ہے لہذا اب جیسا کہ آپ کو یاد ہے کہ پراپرٹی میں
بار سے ضرب دیتے ہیں۔ جو ایک غیر منفی حقیقی نمبر دیتا ہے ٹھیک ہے جو ایک اشارہ دیتا ہے کہ شاید ہم اس z کو z سے ایک وہ ہے جب ہم
بار z عنصر کے ساتھ ضرب کر سکتے ہیں جو بالکل اس کا جوڑ ہے لہذا یہاں ایک ہی کمپلیکس نمبر کے لئے کنجوجیشن ہم یہ کہتے ہیں کہ ہم
کو بار لیتے ہیں z one z سے ضرب کر رہے ہیں پھر دوبارہ پچھلی خصوصیات جب آپ
دو بار سے ضرب دیا جاتا ہے z ایک بار کو z تو
پورے مربع سے ضرب دیا جاتا ہے اور اب یہ اس کے ذریعے iy مائنس x مربع کو iy جمع x تو اس تعلق سے آپ دیکھیں گے کہ یہ فوراً
کیا جا سکتا ہے۔ ایسوسی ایٹیو قانون
iy مائنس x ضرب iy مائنس x مزید یہاں x plus iy ضرب x plus iy تو آپ صرف یہ لکھ دیں کہ اس کا کیا مطلب ہے یہ ہے
مربع دیتا ہے لہذا ہمیں y مربع جمع njugation x سے ضرب co اس کے iy جمع x مائنس x ہم جانتے ہیں کہ اس کی مصنوع ہے
وہی ہے جسے ہم نے سمجھا اور اسی طرح lh مربع کا پورا مربع دائیں ملتا ہے لہذا یہ بنیادی طور پر بائیں ہاتھ کی طرف ہے لہذا y مربع x
پلس آئی ڈی ہے اور ہم اس سے متعلقہ کنجوگیشن کنجوگیشن لے ibc پورا مربع کیا ہے ایک پلس iy جمع x دائیں ہاتھ کی طرف آپ کے پاس
سے بار تقسیم کیا جاتا ہے جس کا مطلب ہے کہ یہ ایک مائنس z ایک بار کو z دو بار دیا جاتا ہے z ایک سے z رہے ہیں ہم جانتے ہیں کہ
مربع ہے اس لیے دیے گئے مفروضے d مربع جمع c مربع اور یہ b ہے اور اس کی مصنوعات کو ایک مربع جمع دیتا ہے id مائنس ibc
سے یہ دونوں برابر ہیں
مربع ہے لہذا D مربع جمع c مربع بذریعہ b مربع ہے پورا مربع ایک مربع جمع y مربع جمع x تو ہمیں مطلوبہ رشتہ ملتا ہے اس طرح
ٹو پورا مربع میں براہ راست لکھ دیتا z ایک جمع z استعمال کرتے ہوئے ضرب کی خاصیت ایک درج ذیل آسان شناختیں حاصل کر سکتا ہے یعنی
ایک کے z ایک کو z تقسیمی قانون d ٹو کے ساتھ z ایک جمع z ٹو پروڈکٹ ہے z ایک جمع z ہوں کہ ہمارے پاس یہ پروڈکٹ کیا ہے یہ
دو دوبارہ آپ تقسیمی لاگ استعمال کرتے ہیں لہذا z ایک جمع z دو ضرب کے ساتھ z دو جمع دوبارہ z ایک جمع z ساتھ ضرب کیا جاتا ہے
دو مربع اور z ایک جمع z دو ضرب ہے بذریعہ z دو جمع z ایک z ایک مربع جمع z ہم دو بار تقسیمی قانون استعمال کر رہے ہیں جو کہ
ایک مربع پیاس کے دو بار اس لئے جو ہم نے اخذ کیا ہے وہ اصلی لائن کے حقیقی اعداد z مصنوع بدلی ہوئی ہے لہذا یہ دونوں عوامل برابر ہیں
کی طرح ہے جب ہم ایک جمع ہی پورے مربع کو لیتے ہیں
مربع ایک ہی فارمولہ کمپلیکس نمبر کے لیے بھی رکھتا ہے اور اس کا مطلب ہے کہ ایک بار جب آپ b جمع ab تو ہمیں ایک مربع ملتا ہے۔ پلس ٹو
یہ نتیجہ دیکھ لیں
تو آپ کہہ سکتے ہیں کہ دیگر شناخ
ایک مربع مصنوعہ زیڈ دو تین بار زیڈ ایک z ایک کیوب جمع تین بار z پورا کیوب دیتا ہے z two جمع z one توں کو ثابت کریں جیسے
زیڈ دو مربع جمع زیڈ دو مکعب اور زیڈ ایک مربع مائنس زیڈ دو مربع کو زیڈ ون مائنس زیڈ ٹو زیڈ ون پلس زیڈ ٹو لکھا جاسکتا ہے لہذا ہم بنیادی طور
پر یہ کہنے کی کوشش کر رہے ہیں کہ جب آپ کر رہے ہیں یہ آپریشن یہ ضروری نہیں ہے کہ آپ پہلے حقیقی حصے کو جوڑیں اور پھر اس
خیالی حصے کو جو آپ جمع کرتے ہیں اور پھر آپ پروڈکٹ لیتے ہیں یہ ضروری نہیں ہے لہذا یہ بنیادی طور پر اس طرح ہے جیسے یہ جو بھی
شناخت دیتا ہے وہ اس حقیقی نمبر کے نظام سے ملتا جلتا ہے جو ہم کر سکتے ہیں۔ ہمارے پرو کا کہنا ہے کہ الجبری آپریشنز کو کام کرنے کے
ایک بار کو z دو بار سے ضرب دیں اور پھر z ایک کو z دو کو دو پیچیدہ اعداد ہونے دیں پھر یہ ظاہر کریں کہ z ایک z لیے ایک سادہ مشق
جوڑیں اس طرح ایک حقیقی عدد ہے اب آئیے یہاں ایک اور مسئلہ کرتے ہیں۔ تین کمپلیکس نمبرز کے ساتھ دیے جاتے ہیں اگر تین کمپلیکس نمبروں کا
مجموعہ اور مصنوع حقیقی ہے
ٹو کے z one z ممکن ہے کچھ لوگ کہتے ہیں کہ پیچیدہ نمبروں میں تین ٹوپل r تو مندرجہ ذیل میں سے کون سا ممکن ہے مندرجہ ذیل
جوڑے کے لیے ممکن ہے
تو کیا یہاں دیا گیا ہے ہم تین پیچیدہ نمبروں پر غور کر رہے ہیں ان کا مجموعہ اور مصنوع ایک حقیقی نمبر دیتا ہے لہذا اب ہمارا سوال یہ ہے کہ
نمبر غیر حقیقی ہیں بالکل تین نمبروں میں سے دو غیر حقیقی hree میں سے ایک t مندرجہ ذیل میں سے کون سا پہلا انتخاب ممکن ہے بالکل
ہیں تیسرا انتخاب تینوں نمبر غیر حقیقی چوتھے انتخاب ہیں تینوں نمبر مکمل طور پر خیالی اور غیر صفر ہیں
تین ان کا مجموعہ اصلی ہے اور ان کی مصنوع z دو کے ساتھ دیئے گئے ہیں۔ z ایک z تو آئیے اپنے سوال پر نظر ڈالیں ہمیں تین پیچیدہ نمبر
حقیقی نمبر ہے اب ہم پہلی پسند کو دیکھتے ہیں کہ کیا یہ بالکل ممکن ہے تین نمبروں میں سے ایک غیر حقیقی ہے کیا یہ ممکن ہے جواب نہیں ہے
ہے ممکن نہیں a تو
تو یہاں یہ ہے بیان میں کہا گیا ہے کہ آپ کم از کم وحدانیت کا خیالی نمبر باقی سمجھتے ہیں یا حقیقی نمبر ہو سکتا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ جب
بار کے برابر نہیں ہے جس کا مطلب ہے کہ یہ z ہے جو z1 کے ساتھ کوئی سیٹ ہے جو کہ حقیقی نمبر نہیں ہے جو z1 بھی ہمارے پاس
دو بنیادی طور پر اسے حقیقی نمبروں کے طور پر منتخب z ایک پیچیدہ نمبر ہے۔ کیا خیالی حصہ صفر نہیں ہے ٹھیک ہے اور باقی کہتے ہیں کہ
ہوتا ہے b اور a کے طور پر کال کرتا ہوں جہاں حقیقی نمبروں سے b اور a کر سکتے ہیں میں اسے
ہے یقیناً یہ کوئی b جمع a ایک جمع z تھری جو آپ کے پاس ہے وہ صرف z ٹو پلس z one pl us z تو میں فوراً دیکھتا ہوں کہ

ایک میں ایک خیالی حصہ ہوتا ہے جسے دوسری اصطلاح سے منسوخ نہیں کیا جاتا ہے اس لیے جو z حقیقی نمبر نہیں ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ
b کے امکان کو رد کر دیا جاتا ہے آئیے ہم دیکھتے ہیں کہ a ہے ویسا ہی رہتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ کوئی حقیقی نمبر نہیں ہے اس لیے
کا امکان بالکل تین نمبروں میں سے دو غیر حقیقی ہیں
تو کیا ہم جوڑوں کے دو سیٹ فراہم کر سکتے ہیں جس کا کہنا ہے کہ وہ ایک ساتھ پیچیدہ اعداد ہیں اصل نمبر ہماری دی گئی شرط کو پورا کرے گا
ٹھیک ہے
تو آئیے دیکھتے ہیں کہ ہم کیا مانگ رہے ہیں آپ مجھے تین جوڑے دیں
تو رقم حقیقی ہونی چاہیے میں صرف وہی دہرا رہا ہوں جو ہمارا دیا گیا مفروضہ ہے ٹھیک ہے
تو ہم ایک ٹرپل تلاش کر رہے ہیں جو پورا ہو یہ حالت
ہو $z1$ تو یہاں ہم کیا کر سکتے ہیں ہم ایک انتخاب کر سکتے ہیں ایک بار جب آپ کے پاس
ہم زندہ رہ سکتے ہیں کیونکہ یہ ایک $z3$ کو اس کے جوڑ کے طور پر لے سکتے ہیں پھر ان کا مجموعہ ایک حقیقی نمبر بن جاتا ہے لہذا $z2$ تو ہم
حقیقی نمبر ہے
ایک کو بطور فکسڈ مثال کے طور پر لیتا z تو آپ بنیادی طور پر اسے پسند کریں گے۔ ایسا لگتا ہے کہ یہ ممکن ہے جس کا مطلب ہے کہ میں
تھری ہے ہم صرف ایک کو کہتے ہیں پھر مجھے کیا معلوم ہے کہ ان کا مجموعہ اصلی ہے اور جب z ٹو لیتا ہوں اس کا جوڑ ہے اور z ہوں میں
آپ پروڈکٹ لے رہے ہوں
کے ساتھ دوبارہ ایک حقیقی z 3 بار میں ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک غیر منفی حقیقی نمبر ہے پھر z میں z تھری ایک حقیقی نمبر دیتا ہے۔ z تو
تمام تین نمبر غیر حقیقی ہیں یہ دوبارہ c نمبر ہے لہذا یہ بنیادی طور پر اس طرح ہے جیسے یہ مطمئن کرتا ہے ہاں یہ ممکن ہے لہذا انتخاب
ممکن ہے ہاں صرف بنیادی طور پر جیسا کہ میں آپ کو جوڑے کا ایک سیٹ دیتا ہوں شاید آپ جوڑے کے دوسرے سیٹ کے ساتھ کوشش کر سکتے
تین پر غور کریں اب آپ دیکھیں کہ میں z دو کو ایک ہی نمبر اور iz ہیں جہاں یہ اس تعلق کو پورا کرتا ہے لہذا ایک سیٹ کو صرف ایک مائنس
ابھی جا رہا ہوں۔ ہیرا پھیری کریں
تو جب میں اس کا خلاصہ کرتا ہوں
i تو مجھے جو ملتا ہے وہ ہے مائنس 2
تو مجھے کیا کرنے کی ضرورت ہے جب میں اس کا خلاصہ کرتا ہوں
کا انتخاب کرتا ہوں لیکن یقیناً ہمیں یہ دیکھنا ہوگا جب آپ پرو کرتے ہیں yتو یہ ایک حقیقی نمبر ہونا چاہئے لہذا قدرتی طور پر میں 2
تو پروڈکٹ حقیقی نمبر ہے یا نہیں۔ ڈکٹ
مربع ہے z ٹو میں ہم دیکھتے ہیں کہ یہ بالکل z ایک میں z تو
مربع جو کہ مائنس ایک اور مائنس دو گنا ہے i مربع یہ کہتے ہیں کہ ایک مربع جمع z تو
اب آپ جب آپ پروڈکٹ کرتے ہیں کہو جو آپ حاصل کر رہے ہیں وہ ایک حقیقی نمبر ہے i تو آپ کو مائنس ٹو ہے
تو آپ کے لئے کیا مشق ہے آپ جوڑے کا دوسرا سیٹ تلاش کریں جہاں یہ اس ڈی کو پورا کرتا ہے میں اسے ایک مشق کے طور پر چھوڑ دیتا ہوں
لیکن میں جواب لکھوں گا جواب دوبارہ یہ انتخاب نہیں ہے ممکن ہے لیکن آپ اسے کرنے کی کوشش کرتے ہیں
تو میں صرف خلاصہ کرتا ہوں کہ ہم نے کیا کیا ہے ہم نے ایک کمپلیکس نمبر کا کنجوجیشن متعارف کرایا ہے اور ہم نے کئی خصوصیات کا مطالعہ
کیا ہے اب ہم جس پر بات کریں گے وہ ایک کمپلیکس نمبر کا ماڈیولس ہے
a کے تو پہلے مجھے یاد کرنے دیں کہ ہم اس کی تعریف کیسے کرتے ہیں؟ اصلی نمبر سسٹم کے لیے ماڈیولس اس لیے حقیقی نمبروں میں
غیر منفی ہے a ماڈیولس کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ اگر
کے ساتھ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہ a کے ساتھ زیادہ سے زیادہ a صفر سے کم ہے ٹھیک ہے اسی طرح ہم اسے مائنس a اگر a تو مائنس
سوال یہ ہے کہ کیا ہم کمپلیکس نمبر سسٹم کے لیے بھی کر سکتے ہیں w ماڈیولس تعریف نمبر دیتا ہے۔
تو ایک بار جب ہم پہلی تعریف یا یہاں تک کہ دوسری تعریف کو دیکھتے ہیں جو ان کا تعلق اس تعلق سے ہے جو بنیادی طور پر آپ کسی نمبر کا 0
سے موازنہ کر رہے ہیں
تو ہم بنیادی طور پر اس ماڈیولس سوال کی وضاحت کر سکتے ہیں کہ کیا ہم واقعی کمپلیکس نمبر سسٹم میں رشتہ سے کم کا کہنا ہے جواب نہیں
ہے
تو مجھے صرف ایک فوری خیال کرنے دو کہ ہمارے پاس ایک قسم کا رشتہ نہیں ہوسکتا ہے جو ترتیب دینا ہے جو ہمارے پاس حقیقی نمبر میں ہے
جو ممکن نہیں ہوسکتا ہے۔ کمپلیکس نمبر سسٹم اس لیے میں تفصیل سے نہیں لکھ رہا ہوں لیکن مجھے صرف تھوڑا سا خیال دینے دیں ٹھیک ہے
تو آئیڈیا کے لیے
میں موازنہ نہیں کر سکتے c تو پہلے مجھے یہ لکھنے دیں کہ اس سے کم کوئی نہیں ہے جس کا مطلب ہے کہ ہم دو کمپلیکس نمبروں کا
تو بس آہ آئیڈیا ہے اگر فرض کریں کہ کوئی رشتہ ٹھیک سے کم ہے
میں کوئی رشتہ ہے c تو فرض کریں کہ
تو کیا ہوگا کسی بھی نمبر کا موازنہ دوسرے نمبر کے ساتھ کیا جاسکتا ہے مثال کے طور پر اس معاملے میں
تو یا
یا ly تو ہم فوری طور پر ختم ہوجاتے ہیں
صفر سے بڑا ہے لہذا ایک بار جب ہمارے پاس یہ ہو جائے ri تو صفر سے کم ہے
تو یقیناً ہمیں بنیادی طور پر اس خاص تعلق پر غور کرنے کی ضرورت نہیں ہے ہم براہ راست یہ کہنے کے ساتھ شروع کر سکتے ہیں یا اصل میں
مربع صفر سے بڑا ہونا چاہیے اس کی وجہ یہ ہے کہ جب بھی آپ کے پاس آرڈر کا تعلق ہوتا ہے i ہم براہ راست کہہ سکتے ہیں کہ
تو ہم یہ ظاہر کر سکتے ہیں کہ اگر کوئی آرڈر تعلق ہے
مربع ہم جانتے ہیں کہ یہ مائنس 1 i مربع 0 سے بڑا ہونا چاہیے لیکن i تو خود سے ضرب کی گئی تعداد غیر منفی ہو گی، اس کا مطلب ہے کہ
ہے جو 0 سے کم ہے
تو اس کا مطلب یہ ہے کہ یہ خاص رشتہ آپ کو بتائے گا کہ مائنس 1 0 سے بڑا ہے لیکن ہمارے پاس یہ تضاد ہے ٹھیک ہے
تو ہم جس چیز کا سامنا کر رہے ہیں ہم اس کا سامنا کر رہے ہیں کہ ہم معمول کی طرح ماڈیولس کی وضاحت کرنے کے قابل نہیں ہیں ۔ اصلی لائن
لیکن ہم بنیادی طور پر یہ دیکھنے کی کوشش کر سکتے ہیں کہ یہ جسمانی طور پر کس چیز کی نمائندگی کرتا ہے پھر ہم مختلف معنوں میں ماڈیولس
کو منسلک کر سکتے ہیں لہذا جب ہم ایک حقیقی لائن لے رہے ہیں
ہے یہ ایک مثبت ہو سکتا ہے ای نمبر ہے نمبر شاید ایک منفی نمبر ہے موڈ اے ہمیشہ کہتا ہے صفر سے فاصلے کا ذکر کرتا ہے ٹھیک ہے اسی aa تو وہاں
طرح اگر یہ کہا جائے کہ آپ کے پاس جو بھی ہے اگر آپ کے پاس منفی نمبر ہے
کے درمیان فاصلہ ٹھیک ہے b تو ہمیں مائنس ہی کہنا ہے پھر بھی بنیادی طور پر اس کی طرح جو یہ کہتا ہے کہ موڈ ہی کہتا ہے صفر اور مائنس

کو ایک z لہذا اس فاصلے کے ساتھ ایک خیال کے طور پر ہم ایک پیچیدہ نمبر کے ماڈیولس کے بارے میں سوچنے کی کوشش کر سکتے ہیں لہذا
کے برابر سمجھیں ib کو جمع z ہونے دیں پھر پوائنٹ ib جمع
ہے اور جو ہمارے پاس صفر a ہے اور یہاں لمبائی ib جو بنیادی طور پر یہاں اکائی ہے جو b تو یہاں میرا کہنا ہے کہ یہاں لمبائی ہے ہے
کے ماڈیولس کی وضاحت کرنا چاہیں گے جو اس اشارے سے پائیتھاگورس z کو جوڑنے کی کوشش کر رہے ہیں لہذا ہم mod z ok ہے اب ہم
تھیوریم کی طرف سے اشارہ کیا گیا ہے۔ جان لیں کہ اس کے لیے کیا فاصلہ ہے یہ فاصلہ ایک مربع جمع ہی مربع کے مربع جڑ سے دیا جاتا ہے
لہذا یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اب ہم ماڈیولس کو اصل سے نقطہ تک کے فاصلے کے طور پر بیان کرنے کی کوشش کر رہے ہیں لہذا ماڈیولس جس
کی وضاحت مربع کے طور پر کی جاتی ہے کی جڑ ایک مربع جمع بی مربع اب جو ہم مشاہدہ کرتے ہیں وہ فوری طور پر یہ ہے کہ یہ ہمیشہ ایک
دو طیارہ سے وابستہ دیکھتے ہیں r غیر منفی نمبر ہوتا ہے اور ایک اور نقطہ ہوتا ہے لہذا اگر ہم
ہے اور یہ نقطہ ہم جانتے ہیں۔ کہ یہ صفر کوما صفر ہے b تو اس نقطہ کو ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک کوما
تو ان دو پوائنٹس کے درمیان فاصلہ جو یوکلیڈن فاصلے سے دیا گیا ہے جو کہ ہم نے جو لکھا ہے اس سے بھی موافق ہے
تو ہم جو کچھ کر رہے ہیں وہ اس کے مطابق ہے جو ہماری آر ٹو جہاز کے ساتھ ہے
ہے i ایک ون پلس z تو آئیے ایک سادہ سی مثال دیکھتے ہیں کہ فرض کریں کہ
تعریف کے لحاظ سے یہ 1 مربع جمع 1 مربع ہے mod z تو
صرف ایک حقیقی نمبر کرتا ہے z تو آپ کو جڑ 2 ملے گا اور اگر فرض کریں کہ
تو ہم کہتے ہیں 5
مربع دوبارہ جو ہم منسلک کرتے ہیں وہ مثبت نمبر ہے کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ ہم اسے ایک فاصلے کے طور پر phi صرف ہے۔ mod 0 تو
بالکل ٹھیک ہے z ہے اور اگر phi دیکھ رہے ہیں لہذا جو
ہمیں ماڈیولس فنکشن mples کے ساتھ exa ایک مربع کا مربع جڑ ہے لہذا اس سادہ z کے برابر سمجھیں i mod کو z تو آئیے صرف
کے لیے کچھ خاصیتیں دیکھنے دو میں صرف خلاصہ کرتا ہوں کہ ہم نے کیا کیا ہے ہم نے ایک کمپلیکس نمبر کا کنجوجیشن متعارف کرایا ہے اور ہم
نے اس کی خصوصیات کا مطالعہ کیا ہے اب ہم ایک کمپلیکس نمبر کے ماڈیولس کو متعارف کراتے ہیں جو کہ اصل سے کمپلیکس نمبر سے فاصلے
کو جوڑتا ہے ۔ مزید خصوصیات پر ہم اگلے لیکچر میں بات کریں گے آپ کا شکریہ

Prutor@IITK