[संगीत ] शेवटच्या लेक्चरमध्ये आम्ही कॉम्प्लेक्स नंबरचे संयुग्मित आणि कॉम्प्लेक्स नंबरचे मोड्यूलस यावर चर्चा केली होती , मला फक्त कोणतीही सामान्य कॉम्प्लेक्स संख्या a प्लस ib आठवते जे z बार आहे आणि आम्ही ते z चे मायनस ib आणि मोड्यूलस म्हणून परिभाषित केले आहे.
हे चौरस अधिक b वर्गाचे वर्गमूळ म्हणून
आता आपण मॉड्युलसचे काही गुणधर्म गुणधर्म पाहू या
त्यामुळे या संपूर्ण चर्चेसाठी आपण गृहीत धरू की z हा x प्लस iy फॉर्म आहे आणि z चा हा खरा भाग नेहमी कमी असतो हे सिद्ध करूया.
z च्या मॉड्युलस पेक्षा किंवा त्याच्या समान तसेच ते mod z च्या उणेच्या बरोबरीने मोठे आहे ही चांगली असमानता आहे की z चा वास्तविक भाग किंवा z च्या वास्तविक भागाचा मॉड्यूलस mod z पेक्षा कमी किंवा समान आहे म्हणून पुरावा काय आहे आपल्याकडे z चा खरा भाग आहे जो x आहे आणि जेव्हा आपण त्याचा चौरस z चा खरा भाग विचारात घेतो तेव्हा त्याचा वर्ग म्हणजे x चौरस आहे जो निश्चितपणे x चौरस अधिक y वर्गापेक्षा कमी किंवा समान आहे म्हणजे आपण आता काही गैर-ऋण संख्या जोडत आहोत.

तात्काळ ly तुम्ही पाहाल की जेव्हाही तुमच्याकडे a हे b च्या वर्गमूळ पेक्षा कमी किंवा बरोबरीचे असते तेव्हा b च्या वर्गमूळाच्या पेक्षा कमी किंवा बरोबरीचे असते तेव्हा याचा अर्थ असा होतो की z चा वास्तविक भाग
x वर्ग अधिक y वर्गाच्या वर्गमूळापेक्षा कमी किंवा समान आहे हे mod z शिवाय दुसरे काहीही नाही
आणि आपण येथे जे पाहतो ते खरे तर आपण ज्या प्रकारे काढले आहे तेच आहे अगदी अगदी निरपेक्ष अर्थाने हे mod z पेक्षा कमी किंवा समान असेल जेणेकरुन पहिल्या प्रस्तावाचा निष्कर्ष निघेल त्याचप्रमाणे आपण हे सिद्ध करू शकतो z चा काल्पनिक भाग उणे mod z पेक्षा मोठा किंवा समान आहे mod z पेक्षा कमी किंवा समान आहे प्रस्ताव दोन हे निश्चितपणे सरळ पुढे आहे की mod z ही जटिल संख्यांमधील सर्व z साठी नेहमीच एक नॉन-ऋणात्मक संख्या असते आणि आपल्याला काय निरीक्षण करणे आवश्यक आहे जेव्हा जेव्हा z चे मॉड्युलस शून्य असते तेव्हा फक्त एक z शून्य असेल तर ठीक आहे हे मुळात पुन्हा सारखे आहे जे निरीक्षण करणे सोपे आहे कारण एकदा तुम्ही mod z ला शून्य बरोबर मानले तर याचा अर्थ त्याचा वर्ग शून्य आहे
त्यामुळे याचा अर्थ असा होतो की x चौरस अधिक y चौरस हा शून्य आणि w आहे आम्ही असे म्हणत आहोत की दोन गैर-ऋणात्मक संख्यांची बेरीज शून्य आहे याचा अर्थ असा होतो की मूलतः प्रत्येक नॉन-ऋणात्मक घटक शून्य असणे आवश्यक आहे म्हणजे x चौरस शून्य असणे आवश्यक आहे तसेच y वर्ग शून्य असणे आवश्यक आहे जे निष्कर्ष काढते की x बरोबर शून्य y समान शून्य म्हणजे हे झेड हे शून्य घटक आहे आणि z हे शून्य घटक आहे असे म्हणण्यासारखेच नाही आणि जे मूलत: त्याच्या खालीलप्रमाणे आहे आणि इतर साधी निरीक्षणे कोणती आहेत जेव्हा तुम्ही z चे मापांक विचार करता जे वजा z मोड्यूलस विरुद्ध देखील समान असते.
mod z प्रमाणेच जे एक क्षुल्लक आहे कदाचित मी यात जोडेल जे मुळात त्याचे संयुग्म आहे तसेच समान मॉड्युलस आहे म्हणून आम्ही मुळात असे म्हणत आहोत की जेव्हा तुम्ही az घ्याल तेव्हा मायनस z तुमच्याकडे असेल तर आपण म्हणूया की हे मुळात x अधिक iy आहे नंतर वजा z तुमच्याकडे उणे x वजा iy आहे
त्यामुळे हे अंतर या अंतरासारखे आहे त्याचप्रमाणे तुम्ही त्याचे प्रतिबिंब x अक्ष बद्दल घ्या जे z बारचे मॉडेल देखील तेच आहे आता चौथा एक आहे जेव्हा तुम्ही z बारसह z गुणाकार करता तेव्हा आम्हाला मोड मिळेल z चौरस म्हणजे व्याख्येनुसार हे स्पष्ट आहे म्हणून मी मुळात यावर चर्चा करत नाही, चला z one च्या z टू च्या पाचव्या एक मोड्युलसकडे जाऊ या ते mod z one ला mod z दोन सह गुणाकार केल्यास mod z one z ला समजा.
वरील प्रस्तावानुसार संपूर्ण वर्ग आपल्याला z वन z दोन ने z एक ते z सह गुणाकार करून संपूर्ण बारला मिळत आहे आणि पुन्हा आपल्याला संयुग्माविषयीचा संबंध माहित आहे म्हणून z एक z दोन साठी z एक z दोन सह गुणाकार केला जातो.
बार आणि कम्युटेटिव्ह कायद्याचा वापर करून आम्ही शेवटी मला फक्त लिहू देऊ शकतो जेणेकरुन आमच्याकडे जे आहे ते z1 बार z2 बार असलेले उत्पादन आहे आणि आम्हाला मुळात तुम्ही वापरता येणारा सहयोगी कायदा मिळेल आणि नंतर पुढील कम्युटेटिव्ह कायदा वापरा जेणेकरून तुम्हाला mod z मिळू शकेल.
एक स्क्वेअर मोड z दोन स्क्वेअर ओके
त्यामुळे हा निष्कर्ष निघतो की z एक z दोनचे मापांक ते mod z एक mod z दोन सह गुणाकार देते, तुम्ही प्रथम उत्पादन घ्या त्याचे मापांक घ्या जे प्रत्येक संमिश्र संख्येसाठी प्रथम मॉड्यूलस घ्या नंतर mu ltiply ते ठीक आहे आणि सहावा प्रस्ताव जो ah प्रसिद्ध किंवा छान असमानता आहे जी वारंवार वापरली जाईल ती वापरली जाईल ज्याला त्रिकोण असमानता म्हणतात म्हणून असमानता सांगते की जर आपण z वन प्लस z दोनचे मॉड्यूलस मानले तर हे mod z वन पेक्षा कमी किंवा समान आहे.
plus mod z two प्रत्येक z साठी प्रत्येक z one z two मध्ये कॉम्प्लेक्स नंबर्स मध्ये हे असमानता काय म्हणते ते समजून घेण्याचा प्रयत्न करू या
त्यामुळे आपल्याकडे दोन गुण आहेत हे z one आहे असे म्हणू या आणि हे z दोन आहे असे म्हणू या आणि मग आपण नैसर्गिकरित्या संबद्ध करू शकतो यासाठी व्हेक्टर म्हणजे z एक व्हेक्टर आणि z दोन हे दुसरे व्हेक्टर म्हणून व्हिज्युअलायझ करू शकू मग बेरीज देते जे आपल्याला मुळात मिळते ते या समांतरभुज चौकोनासाठी कोणता कर्ण आहे जो z वन अधिक z दोन आहे म्हणून मी मागील मध्ये नमूद केल्याप्रमाणे लेक्चर मॉड्युलस याचा अर्थ असा आहे की ही कॉम्प्लेक्स संख्या आणि मूळ यामधील अंतर आहे म्हणून z वन प्लस z दोनचे मॉड्यूलस या संख्येतील मूळ ते अंतर दर्शविते ठीक आहे म्हणून अंतर t पेक्षा कमी किंवा समान आहे o z 2 वर जा आणि नंतर

या बिंदूवर पोहोचण्यासाठी व्हेक्टर z 1 वापरून पुढे जा म्हणजे याचा अर्थ असा आहे की एक अंतर घेऊन प्रथम z2 वर जा आणि नंतर येथे पोहोचण्यासाठी z1 चा वापर करा जे नेहमी डिस्कपेक्षा मोठे असेल.
शब्द हे सर्वात कमी अंतर आहे जे आपण पाहत आहोत ठीक आहे, तर आपण हा निकाल सिद्ध करण्याचा प्रयत्न करू या म्हणून

डावीकडील बाजू आणि चौकोन या शब्दाचा विचार करू आणि हे mod z ने लिहिलेले आहे जर मला आठवत असेल तर mod z चौरस z ने लिहिलेला आहे z बार आता थेट सांगा की मालमत्ता लागू करून आम्हाला जे मिळत आहे ते z एक बार अधिक z दोन बार आहे आणि पुढे तुम्ही वितरण कायदा लागू कराल तर आम्हाला z एक z एक बार अधिक z एक z दोन बार अधिक z ने गुणाकार मिळेल.

z वन बारसह दोन गुणाकार अधिक z दोन z दोन बारसह गुणाकार केला आणि आपल्याला माहित आहे की हे प्रमाण z वन स्क्वेअर प्लसचे मॉड्यूलस आहे आणि येथे आपण जे पाहतो ते z वन z दोन बार आहे त्याला एक जटिल संख्या म्हणून मानू.

पुढील क्रमांक आम्ही फक्त त्याचा म्हणून पाहत आहोत मागील एकाचे तंतोतंत संयुग्मन

त्यामुळे जर तुम्ही फक्त असे निरीक्षण केले तर मी ही पट्टी लावली तर ती एका पट्टीवर z ने दुहेरी पट्टीने गुणाकार केली जाते जी स्वतःला पुन्हा z देते

त्यामुळे आपल्याला हे mod z2 चौरस आहे आणि आपल्याला माहित आहे की z प्लस z बार हा z चा खरा भाग दोनने गुणाकार देतो म्हणून आपल्याला कळते की येथे ते z वन z दोन बारच्या वास्तविक भागाच्या दोन पट आहे अधिक हे आता पुन्हा आठवण्याचा प्रयत्न करूया की असमानता काय आहे हे आपण ठीक आहे हे सिद्ध करण्याचा प्रयत्न करत आहोत.

z one plus z two चे modulus मिळवा mod z one plus mod z two पेक्षा कमी किंवा बरोबरीचे mod z one plus mod z दोन आता आपण पाहत आहोत की जर आपल्याला उजव्या बाजूस mod z one plus mod z असे काहीतरी मिळू शकले तर आपण जवळजवळ येथे पोहोचलो आहोत.

संपूर्ण स्क्वेअरमध्ये मग आपण जवळजवळ पूर्ण झालो आहोत पण फक्त आपण हे पाहणे आवश्यक आहे की आपण येथे mod z one आणि mod z दोन शब्द कसे आणायचे ठीक आहे, जर मला मी लिहिलेले प्रस्ताव आठवले तर ते असे नमूद करते की वास्तविक z चा भाग z चा खरा भाग नेहमी वजा मोड z च्या समान पेक्षा मोठा तसेच कमी than किंवा mod z च्या बरोबरीचे आहे म्हणून आपण हे विशिष्ट संबंध येथे वापरणार आहोत

त्यामुळे आपल्याला जे माहित आहे ते खरे भाग नेहमी पेक्षा कमी किंवा समान असते म्हणून आपण हे संबंध वापरत असताना आपण या बद्दल खूप सावधगिरी बाळगणे आवश्यक आहे मी तुम्हाला चेतावणी दिली की कॉम्प्लेक्स नंबरसाठी असा संबंध लागू होणार नाही जर तुम्हाला एक वरील प्रमाण दिसले तर ती पूर्णपणे वास्तविक संख्या आहे ठीक आहे आता जेव्हा आम्ही येथे तुलना करत आहोत तेव्हा ती z1 z2 बारच्या मॉड्यूलसच्या 2 पट आहे पुन्हा ती एक गैर-ऋण संख्या आहे.

आणि mod z दोन चौरस आणि पुन्हा तुम्ही जे पाहता ते असे आहे की गुणधर्म z one mod z एक चौरस अधिक mod z one च्या दोन पटीने z च्या मोड्युलसने बार ते बार गुणाकार केला म्हणजे संपूर्ण स्क्वेअरला modulus z दोन अधिक mod z आणि आम्ही हे जाणून घ्या की हे काहीही नाही पण हे mod z वन प्लस mod z ते संपूर्ण स्क्वेअर आहे ठीक आहे पुन्हा जे आपल्याकडे आहे ते b स्क्वेअर पेक्षा कमी किंवा समान आहे जे a चा अर्थ b च्या पेक्षा कमी किंवा समान आहे ठीक आहे जेणेकरून ते सिद्ध होईल आमची त्रिकोण असमानता म्हणून मी ते दाखवू इच्छितो

या संबंधासाठी ही समानता केव्हा असेल असा प्रश्न कोणी विचारू शकतो म्हणजे जेव्हा z one plus z two चे modulus of z one च्या modulus च्या बरोबरीचे असते तेव्हा हा निष्कर्ष असू शकतो मी ते इथे ठीक आहे किंवा पुढच्या पानावर लिहीन

त्यामुळे आम्ही फक्त mod z one z two काढले आहे.

मॉड झेड वन प्लस मॉड झेड टू पेक्षा कमी किंवा समान आता प्रश्न आहे की मला समानता केव्हा दिसली तर आता हे केव्हा होईल जेव्हा आपण ही असमानता मिळवू तेव्हा परत जा हीच ती जागा आहे जिथे आपण असमानता संबंध वापरतो

त्यामुळे समानता दिसून येते जर आणि फक्त जर z वन z ते बारचा वास्तविक भाग z वन z दोन बारच्या मॉड्यूलसच्या बरोबरीचा असेल तर समानता दिसते म्हणून समानता दिसून येते मी याला समीकरण म्हणू याला

z one z दोन बारचा वास्तविक भाग प्रदान केला आहे mod z1 bar हे z 2 च्या वेळी z 1 असते असे म्हणण्यासारखे आहे जेथे t ही एक नॉन-ऋणात्मक वास्तविक संख्या आहे मी पुन्हा पुन्हा सांगतो आम्ही हे सिद्ध केले की त्रिकोण असमानता प्रश्न आहे जेव्हा समानता दिसते तेव्हा आम्ही फक्त निरीक्षण करतो की समानता दिसते if आणि फक्त जर z एक आणि z दोन ते रेखीय अवलंबित प्रकारासारखे आहेत जे z दोनच्या स्थिर वेळांसारखे आहेत, तुमच्याकडे z एक म्हणजे z दोनची फक्त एक स्थिर वेळा आहे अशा परिस्थितीत आम्हाला समानता मिळते ते पाहू या या त्रिकोणाच्या असमानतेचे इतर परिणाम पुढे सांगा म्हणून आम्ही आत्ताच पाहिलं की मॉड्युलस ऑफ सो मी फक्त हेच पुन्हा सांगतो की आमचा हा संबंध आहे आणि यावरून आपण काढू शकतो की mod z एक वजा mod z दोन पेक्षा कमी किंवा समान आहे.

आपण हे कसे मिळवूया फक्त असे म्हणूया की हा एक आहे म्हणून मॉड z एक विचारात घ्या आम्ही फक्त z दोन जोडतो आणि वजा करतो मग एक लागू करतो मग एक करून mod z एक मॉड z वन प्लस z दोन पेक्षा कमी किंवा समान असतो.

आणि पुढे तुम्हाला मायनस z टू चे मापांक मिळेल पण आम्हाला माहित आहे की मायनस z टू चे मापांक पुन्हा mod z टू सारखे आहे त्यामुळे यावरून आपल्याला mod z one वजा mod z दोन हे z वन प्लस z दोन च्या मॉड्युलस पेक्षा कमी किंवा समान मिळते.

ठीक आहे त्याचप्रमाणे आपण z वन आणि z दोन ची भूमिका अदलाबदल करू शकतो जर मी भूमिका बदलली तर z एक आणि z दोन हे अनियंत्रित आहेत म्हणून आपण फक्त z वन आणि z दोनची भूमिका अदलाबदल करू शकता तर आपण हे z दोन वजा मोड z वन पेक्षा कमी किंवा समान असल्याचे निरीक्षण करतो.

z वन प्लस z टू च्या मॉड्युलसमध्ये आणि निष्कर्ष म्हणून आपण जे निरीक्षण करतो ते म्हणजे

एक मायनस मॉड z 2 वर मोड्सचे मॉड्यूलस जे z 1 अधिक z 2 च्या मॉड्यूलसपेक्षा कमी किंवा समान आहे ठीक आहे आता कोणीही प्रश्न विचारू शकतो की हे प्लस आहे खरोखर आवश्यक आहे ठीक आहे माझ्याकडे येथे उणे खरे आहे ठीक आहे, तुमच्याकडे पुन्हा वजा चिन्ह असू शकते म्हणून ते येथे अधिक किंवा वजा असू शकते तरीही हे mod z एक वजा mod z दोन च्या मॉड्यूलसपेक्षा मोठे किंवा समान आहे त्याचप्रमाणे हे पेक्षा कमी किंवा समान आहे z1 plus mod z2 चे मॉड्युलस म्हणून येथे मला त्रिकोणातून

काहीतरी अधिक सामान्य दिसत आहे
 त्यामुळे आपल्याकडे त्रिकोण असमानता आहे आणि आता आपण पाहतो ती या जटिल संख्यांसाठी अधिक सामान्य असमानता आहे म्हणून प्रस्तावित करा 7 मॉड्यूलसचे z व्युत्क्रम s mod z व्युत्क्रम जेथे z आहे शून्य नसलेली जटिल संख्या ag आयन हे संयुग्मन गुणधर्मासारखेच आहे जे z व्युत्क्रमाने सुरू होणारा हा परिणाम z व्युत्क्रमाने z द्वारे z व्युत्क्रमात दिला जातो, तुम्हाला ओळख मिळते मग त्याचे मॉड्यूलस पुन्हा एकचे मॉड्यूलस एक आहे आणि आम्ही आधीच z च्या मोड्यूलसची चर्चा केली आहे.
 one in z two देते mod z एक ला mod z दोन ने गुणाकार केला तर तुम्हाला जे मिळेल ते mod z चा मोड्युलस एक ने z ने गुणाकार केला तर हे एक बरोबर आहे म्हणून आपण जे निरीक्षण करतो ते mod z व्युत्क्रम आहे म्हणून mod z व्युत्क्रम हे नक्की z व्युत्क्रम मोड आहे म्हणून हे आहे निष्कर्ष म्हणजे आपण जे पाहतो तो असा आहे की mod z व्युत्क्रम हे z व्युत्क्रमाचे मॉड्युलस आहे जे z एक बाय z आहे, तर ते आमचे प्रपोझिशन आणि प्रपोझिशन आठ आहे जे z वन बाय z टू चे मोड्युलस आहे जे mod z एक बाय z देते.
 mod z दोन तुम्ही असे गृहीत धरले की z दोन शून्य शून्य आहे , परिणामी पुन्हा फक्त c हा दोन जटिल संख्येचा गुणाकार म्हणून म्हणा जो z एक z ने z ने व्युत्क्रमात गुणाकार केला तर आपण पाहतो की प्रत्येक घटकासाठी मॉड्युलस लागू केला जातो आणि मागील प्रस्ताव आम्ही फक्त हे सिद्ध केले z दोन व्युत्क्रमांचे मापांक हे mod z दोन संपूर्ण व्युत्क्रमासारखे आहे आणि हे दुसरे काहीही नाही परंतु mod z one by mod z दोन ठीक आहे आता आणखी एक मनोरंजक परिणाम आहे ज्याला समांतरभुज चौकोन म्हणतात तो असे सांगतो की z one z दोन संपूर्ण चौरस अधिक मॉड्युलसचे मॉड्युलस z one z दोन z एक वजा z दोन पूर्ण चौरस जो mod z एक चौरस अधिक mod z2 चौरस च्या दोन पट सारखा आहे ठीक आहे ते त्याला समांतरभुज चौकोन का म्हणतात , आपण हे पाहण्याचा प्रयत्न करूया म्हणून आपण से बिंदूला z वन म्हणू या आणि आपण असे म्हणूया की हे z दोन आहे आणि आपल्याला माहित आहे की z एक अधिक z दोन हे तंतोतंत वेक्टर देते जे या समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण z एक अधिक z दोन आहे आणि त्याचप्रमाणे दुसरा कर्ण z एक वजा z दोन सदिश देतो.
 आता जर तुम्ही ओळख पाहिली तर ते असे म्हणते की
या कर्णांच्या परिमाणाचा
चौरस समांतरभुज चौकोन कायद्याच्या बाजूंच्या परिमाणाच्या चौरस बेरीजच्या दुप्पट मानला जातो,
 त्यामुळे हा अतिशय मनोरंजक गुणधर्म आहे म्हणून आणि पुरावा f सोपे आहे तुम्हाला फक्त डाव्या बाजूसाठी विस्तारित करणे आवश्यक आहे मग आम्ही सहजपणे मिळवू शकतो तुम्ही उजव्या बाजूला lhs पोहोचू शकता जे z एक अधिक z दोन चौरस अधिक z एक वजा z संपूर्ण चौरसाचे मॉड्यूलस आहे म्हणून व्याख्येनुसार हे z एक अधिक z दोन सह गुणाकार z एक अधिक z दोन बार अधिक z एक वजा z दोन सह गुणाकार z एक वजा z संपूर्ण पट्टीवर
 त्यामुळे आपण जे प्रमाण मोजत आहोत ते z एक अधिक z दोन संपूर्ण वर्ग अधिक z एक आहे वजा z संपूर्ण स्क्वेअरला अशा प्रकारे आम्ही z एक अधिक z दोन गुणाकार z एक बार z दोन बार अधिक z एक z दोन सह गुणाकार z एक बार वजा z दोन बार असे लिहिले एक बार म्हणजे mod z एक स्क्वेअर आणि दुसरी टर्म जी mod z2 स्क्वेअर आहे आणि बाकीची टर्म जी आपल्याकडे आहे ती z1 z2 बार अधिक z1 bar z two या टर्मवर आपल्याला पुन्हा mod z वन स्क्वेअर ही संज्ञा मिळेल आणि mod z चे दोन चौरस उरलेले घटक हे विरुद्ध चिन्हासह येतात हे घटक जे वजा z वन z ते बार वजा z वन बार z दोन म्हणतात या संज्ञा एकमेकांना रद्द करतात मग आपल्याला जे मिळते ते mod z वन स्क्वेअर अधिक mod z दोन स्क्वेअरच्या दुप्पट आहे आणि आपण एका समस्येवर चर्चा करू या ज्यामध्ये मॉड्यूलस चिन्हाचा समावेश आहे हे सिद्ध करा की जर z one चे मॉड्युलस एक च्या बरोबरीने तसेच z दोन चे मॉड्युलस देखील एक समान असेल आणि पुढे त्यांचे उत्पादन वजा एक च्या बरोबर नसेल तर आपण दर्शवू शकतो की z एक अधिक z दोन ला एक अधिक z एक z दोन ने भागले आहे.
 खरी संख्या आहे ठीक आहे, म्हणून आपण या समस्येचे निरीक्षण करण्याचा प्रयत्न करूया जे दिले आहे ते z एक z दोन आहे ते मुळात उत्पत्तीपासून एकक अंतरावर आहेत आणि त्यांचे उत्पादन वजा एकच्या बरोबरीचे नाही तर आम्ही परिभाषित केलेले प्रमाण a आहे.
 वास्तविक संख्या ही अभिव्यक्ती क्लिष्ट दिसते हे पाहून खरोखर छान आहे परंतु शेवटी आपल्याला जे मिळते ती एक वास्तविक संख्या आहे हे कसे दाखवायचे ते पाहू या मी आधी सांगितल्याप्रमाणे जटिल संख्या ही वास्तविक संख्या आहे असे म्हणायचे आहे जेणेकरून z आणि z bar ते समान आहे जे समान आहे काल्पनिक भाग शून्य आहे असे म्हणणे म्हणजे a ला संख्या z वन प्लस z दोन बाय वन प्लस z वन हे z दोन बरोबरचे उत्पादन समजा अशी व्याख्या करूया
 त्यामुळे आमचा दावा हा काल्पनिक भाग शून्य आहे हे दाखवणाऱ्या पट्टीच्या बरोबरीचा आहे.
 आता बारचा विचार करा आपण आधी जे काही अभ्यास केले आहे ते आपण लागू करणार आहोत म्हणजे जुन्या घटकासाठी संयुग्म, जेव्हा आपण यासाठी संयुग्म करत आहोत जे z एक बार z दोन बार अधिक z एक बार z दोन बार आहे ठीक आहे आता आपण z वन बारला z ला z ला जोडण्याची गरज आहे, ठीक आहे, आपण z one चा कंडिशन मॉड्यूलस वापरला नाही त्याचप्रमाणे z दोन समान टू एकचा मोड्युलस वापरला आहे, म्हणून आपल्याला ही अट वापरण्याची आवश्यकता आहे, म्हणून आता आपण म्हणू की mod z बरोबर एक आहे.
 तर हे आपल्याला दिले आहे जे त्याचा चौरस एक आहे याला प्रथम क्रमांक z वन स्क्वेअर म्हणू या म्हणजे हे z मध्ये z बार एक आहे असे सूचित करते आणि ठीक आहे आपण z बार काय आहे हे समजू शकतो.
 z बार हा z व्युत्क्रम आहे म्हणून या संबंधाने आपल्याला फक्त z बार g आहे असे प्राप्त होते 1 बाय z द्वारे आयव्हन म्हणून आपण z वन ला आमची कॉम्प्लेक्स संख्या मानली आहे असे नोटेशनसह निश्चित केले आहे
त्यामुळे z एक बार अशा प्रकारे z ते बार s एक बाय z दोन आहे ठीक आहे आता आपल्याला फक्त हा संबंध वापरण्याची आवश्यकता आहे बारमध्ये एक बार दिलेला आहे म्हणून आपल्याकडे z एक बार आहे जो एकाने z वन ने बदलला आहे आणि त्याचप्रमाणे z दोन बार एक ने z दोन ने आणि एक अधिक एक z एक ने z एक ने गुणाकार केला आहे ही अभिव्यक्ती आपण z एक

अधिक z दोन भागिले एक अधिक z एक z दोन ने गुणाकार करतो जे एक बरोबर काहीच नाही हे दर्शविते की a ही खरी संख्या आहे ठीक आहे म्हणून आपण येथे फक्त तुमची टिप्पणी किंवा आम्ही काय निरीक्षण केले ते एक टिप्पणी लिहूया mod z एक बरोबर आहे मग आपण जे पाहतो ते z मध्ये z बार एक आहे आणि z बारला z बरोबर एक असे लिहिले जाऊ शकते आणि फक्त लक्षात घ्या की z बारचे मॉड्यूलस एक बाय मोड z सारखे आहे जे पुन्हा एक आहे चला तर मग या बद्दल पुन्हा समजून घेण्याचा प्रयत्न करूया त्या सर्व z कॉम्प्लेक्स नंबर ज्यांचे मॉड्यूलस एक let आहे आपण हे समजून घेण्याचा प्रयत्न करतो म्हणून युनिट वर्तुळाचा सेट u म्हणून विचार करू जो सर्व जटिल संख्यांचा संच म्हणून परिभाषित केला जातो जसे की ज्याचे मॉड्यूलस एक आहे आता संचातील सर्व घटक कोणते आहेत याचे वर्णन करण्याचा प्रयत्न करा

म्हणजे जेव्हा आपण mod z च्या बरोबरीने लिहू एक हे अगदी तंतोतंत आहे जर आपण z ला x अधिक iy मानले तर mod z जे x वर्ग अधिक y वर्गाचे वर्गमूळ आहे, जर आपण त्याचा वर्ग मानला तर तो x वर्ग अधिक y वर्ग आहे आणि त्याला mod z एक बरोबर दिलेला आहे.

आता तुम्ही विचाराल की xy घटकांची सर्व जोडी कोणती आहे या समीकरणाचे समाधान करते आणि जे आपल्याला खूप परिचित आहे की ते केंद्र असलेल्या एकक वर्तुळाचे मूळ म्हणून वर्णन करते म्हणून आपण चित्र काढू या म्हणजे आपल्याकडे एकक वर्तुळ आहे त्यामुळे यावरील कोणताही बिंदू घ्या वर्तुळावरील xy ची जोडी जी या समीकरणाचे समाधान करते आणि याचा अर्थ u हा संच या एकक वर्तुळाचे तंतोतंत वर्णन करतो, आता आपल्याला यावरील बिंदू माहित आहेत, उदाहरणार्थ यावर असलेला एक आणि i जो या वजा 1 वर आहे आणि वजा i वर आहे.

हा यू nit वर्तुळ आधीच्या समस्येवर आपण चर्चा केली होती जिथे mod z एक च्या बरोबरीचे आहे मग आपण असा निष्कर्ष काढला की z बार हे एक बाय z शिवाय दुसरे काहीही नाही जे अगदी सहज पाहण्यासारखे आहे फक्त या समीकरणाचा अर्थ असा आहे की z मध्ये z बार बरोबर एक z मध्ये z बार याशिवाय दुसरे काहीही नाही mod z चौरस समान एक म्हणजे छिद्रे आहेत कारण mod z एक आहे म्हणून आपण या आलेखावर कल्पना करण्याचा प्रयत्न करूया जेव्हा आपण i घेतो तेव्हा त्याचे संयुग्मित वजा i असते आणि हे समीकरण सांगते की z व्युत्क्रम हे त्याचे संयुग्म आहे म्हणजे मी आदराने उलट करतो गुंतागुंतीचे उत्पादन हे दुसरे तिसरे काही नाही, तर त्याचे संयुग्मन जे वजा i आहे, जर तुम्ही या वर्तुळावरील या रेषेवरील कोणताही घटक घेतला तर त्याची आरशातील प्रतिमा विचारात घ्या जी अचूक संयुग्मन आहे, z वर्तुळावरील कोणत्याही बिंदूचा विचार करा, त्याची आरशातील प्रतिमा विचारात घ्या जी ती बार आहे.

z चे इन्व्हॉइस जे वर्तुळावर देखील आहे,

त्यामुळे जर तुम्ही एक घेतले तर त्याची आरशातील प्रतिमा स्वतःच व्युत्क्रम आहे आणि जर तुम्ही वजा एक घेतली तर तिची आरशाची प्रतिमा पुन्हा स्वतःच उलट आहे.

क्लिष्ट उत्पादनाच्या संदर्भात st वजा एक म्हणून जेव्हा आपण एकक वर्तुळावर दोन संमिश्र संख्या घेतो तेव्हा त्यांचे उत्पादन पुन्हा एकक वर्तुळात घेतो तेव्हा आपण येथे कोणती निरिक्षणे केली आहेत, हा फक्त एक साधा गुणधर्म आहे की z one z two चे modulus mod z one mod आहे z दोन आणि प्रत्येक मापांक एक आहे म्हणून त्यांचे उत्पादन एक आणि दुसरा महत्त्वाचा गुणधर्म आहे ज्याचे आपण निरीक्षण केले आहे जेव्हा जेव्हा z मधील uz व्युत्क्रम देखील u मध्ये असतो आणि इतकेच नाही की हा z एक z व्युत्क्रम फक्त त्याचे z चे संयोग आहे म्हणून या निरीक्षणासह आपण पाहू या एक छान ओळख सिद्ध करा चार जटिल संख्या z एक z दोन z तीन z चार किंवा जटिल संख्या विचारात घ्या मग ते खालील समीकरण z एक वजा z दोन गुणाकार z तीन वजा z चार अधिक z एक वजा z चार गुणाकार z दोन वजा z तीन सह हे समान आहे z एक वजा z तीन गुणाकार सह z दोन वजा z चार या ओळखीचे निरीक्षण करा ही कोणतीही चार जटिल संख्या असू शकते तर खालील समीकरण समाधानी पुरावा सोपे आहे फक्त विस्तार करा डाव्या हाताची बाजू आणि उजवी बाजू नंतर तुम्हाला दिसेल की दोन्ही अभिव्यक्ती समान आहेत डाव्या बाजूचा विचार करूया डाव्या हाताची बाजू म्हणजे z एक वजा z दोन z तीन वजा z चार अधिक z एक वजा z चार सह गुणाकार z दोन वजा z तीन आता फक्त त्याचा विस्तार करा z एक z तीन वजा z एक z चार वजा z दोन z तीन अधिक z दोन z चार आणि पुढे अधिक z एक z 2 वजा z 1 z 3 वजा z 4 z 2 अधिक z 4 z तीन ठीक आहे आता आपण पाहतो की काही सामान्य अटी आहेत ज्यात ते एकमेकांना रद्द करतात ते z दोन z चार दंड आहे कदाचित आपण फक्त उजव्या बाजूकडे जाऊ या जी z एक आहे चला या z एक z दोन वजा z एक z चारचा विस्तार करूया उणे z तीन z दोन अधिक z तीन z चार मग आपण हे दोन घटक ओळखतो आणि त्याचप्रमाणे z तीन आणि हे आम्ही ओळखले आणि z एक z चार आम्ही ओळखले की एक z दोन ओळखले गेले आहे आणि हे दोन रद्द होतात म्हणून आम्ही डावीकडे काय सत्यापित केले हाताची बाजू उजव्या बाजूच्या समान आहे म्हणून ती ve आहे ry मनोरंजक आहे की ही एक क्षुल्लक ओळख आहे जी तुम्ही कोणत्याही चार जटिल संख्येचा विचार करता ती या विशिष्ट ओळखीचे समाधान करते आता आम्ही एक साधी समस्या पाहू शकतो जी दर्शवते की ही ओळख किती छान आहे समस्या समजा आम्हाला एका विमानात चार गुण दिले आहेत तर ते दाखवा जर abcd किंवा समतल बिंदू नंतर खालील असमानता समाधानी आहे जी जाहिरात bc पेक्षा कमी किंवा समान सह गुणाकार केली जाते bd सह गुणाकार ca अधिक cd अधिक ab सह गुणाकार ok म्हणून आपण ही विशिष्ट असमानता समजून घेण्याचा प्रयत्न करूया म्हणून आपण a काढण्याचा प्रयत्न करूया आकृतीत जरी बिंदू कोणत्याही प्रकारे वितरीत केले जाऊ शकतात ठीक आहे,

त्यामुळे साधेपणासाठी मी असे काहीतरी गृहीत धरण्याचा प्रयत्न करीत आहे की ते खरोखर एका ओळीत पडलेले नाहीत असे आपण म्हणू या की ते मुळात एक प्रकारचा आकार देते म्हणून आपण त्याला असे म्हणू या abcd असेल

तर ही असमानता म्हणते की तुम्ही

लांबीच्या जाहिरातीला बीसी लांबीने गुणाकार करता हे नेहमी bd या कर्णाच्या पेक्षा कमी किंवा समान असेल AC तुम्ही गुणाकार plus cd ने ab ने गुणाकार केला आहे ठीक आहे तर पुरावा आहे जो साधा आहे फक्त मागील ओळख वापरून मला फक्त ओळख लिहू द्या म्हणजे आमच्याकडे काय आहे मग आम्ही काय करू शकतो एकदा हे बिंदू विमानात ठेवले की आम्ही प्रत्येक शिरोबिंदू किंवा शेवटचा बिंदू एका जटिल संख्येकडे ओळखू शकतो म्हणून आपण असे म्हणूया की हे a z one शी संबंधित आहे आणि हे मुळात z दोनशी

संबंधित आहे आणि c बिंदू z तीनशी संबंधित आहे आणि आपण असे म्हणूया की हे त्याच्याशी संबंधित आहे z चार नंतर मागील ओळख सांगते की z एक वजा z चार z दोन वजा z तीन म्हणजे z एक वजा z तीन z दोन वजा z चार वजा z एक वजा z दोन z तीन वजा z चार ने गुणाकार केला म्हणून मी पुन्हा लिहिले अशा प्रकारे मला a ते d ही संज्ञा मिळते
जी z एक ते z चार आणि b ते c जे z 2 ते z 3 असते जेव्हा मी या ओळखीसाठी परिपूर्ण मूल्य घेतो तेव्हा z 1 वजा z 4 चे मॉड्यूलस जे देते या सदिशाची विशालता जी लांबी देते ad म्हणून आता या ओळखीसाठी मॉड्युलस चिन्ह घ्या नंतर z एक वजा z चार उत्पादनाचे मापांक z दोन वजा z तीनचे मॉड्यूलस घ्या आणि आता तुमच्याकडे संपूर्ण पदाचे मापांक आहे आणि त्रिकोण असमानता लागू करा आम्हाला ते z एक z तीन z मिळेल दोन वजा z चार अधिक z एक z एक मापांक z एक वजा z दोन मापांक z तीन वजा z चार आता आपण पाहतो की हे z दोन वजा z तीन सह गुणाकार केलेल्या जाहिरातीच्या लांबीचे वर्णन करते जे bc पेक्षा कमी किंवा समान आहे z एक वजा z तीन जो ac ची लांबी
z दोन वजा z चार ने गुणाकार केला आहे जो bd अधिक z एक वजा z दोन आहे जो ab ने cd ok ने गुणाकार केला आहे
त्यामुळे ही ओळख वापरून आपण इच्छित असमानता प्राप्त करण्यास सक्षम आहोत आता आपण करूया आणखी एक समस्या म्हणून समस्येकडे जाण्यापूर्वी मी फक्त नमूद करतो की z हे युनिमॉड्युलर आहे असे म्हटले जाते z हे युनिमॉड्युलर आहे असे म्हटले जाते जर mod z एक असेल तर आम्ही असे म्हणतो की जर z चे मॉड्यूलस एक असेल तर एक जटिल संख्या युनिमॉड्युलर असते.
म्हणजे z ly आहे एकक वर्तुळाच्या समस्येवर ing म्हणून z one z ही जटिल संख्या असू द्या आणि समजा संख्या z एक वजा z2 ने भागाकार 2 वजा z1 z2 बार एकसमान आहे आणि z दोन एकसमान नाही तर आपल्याला खालीलपैकी एक निवडण्याची आवश्यकता आहे बिंदू z1 a वर आहे तो
x अक्षाच्या समांतर सरळ रेषेवर आहे पर्याय b सरळ रेषेला समांतर y अक्ष पर्याय c तो त्रिज्या दोनच्या वर्तुळावर आहे की नाही त्यामुळे zs च्या या एका मॉड्यूलसचा अर्थ z एक दोन आहे की नाही त्रिज्या रूटचे वर्तुळ दोन ठीक आहे की नाही, म्हणून आपल्याला दिलेले आहे की z एक वजा दोन गुणिले z दोन भागिले दोन वजा z एक गुणाकार z दोन पट्टी म्हणजे या संख्येचे मापांक एक आहे आणि z दोनचे मॉड्यूलस नाही युनिमॉड्युलर मग आपल्याला हे शोधून काढावे लागेल की z एक सरळ रेषेत आहे की वर्तुळात विशिष्ट पर्याय आहे की त्रिज्या दोन आहे की मूळ दोन आहे की नाही हे मुळीच वर्तुळात असेल तर z वनच्या स्थितीचे काय होते ते शोधण्याचा प्रयत्न करूया.

त्यामुळे आपण हे पाहण्याचा प्रयत्न करूया की दिलेला बिंदू z एक वजा दोन z दोन भागिले दोन गुणिले दोन गुणिले दोन वजा z एक z दोन बारचे मापांक एक आहे आणि z दोनचे मापांक एकाच्या बरोबर नाही ही दिलेली गृहितके आहेत.
आणि पहिल्या गृहीतकाने आपण हे पाहू शकतो की z एक वजा दोन पट z दोन स्क्वेअरचे मॉड्यूलस जे दोन वजा z एक z दोन बार स्क्वेअरचे मॉड्यूलस सारखे आहे आणि आपल्याला माहित आहे की mod z स्क्वेअर z मध्ये z बार प्रमाणेच आहे.
खाली लिहा की याचा अर्थ z एक वजा दोन z दोन ने गुणाकार z एक वजा दोन z पट्टीवर हे दोन वजा z एक z दोन बारने दोन वजा z एक z दोन बारने गुणाकार पूर्ण बार सारखे आहे म्हणजे याचा अर्थ असा होतो की z एक वजा zz एक वजा दोन z दोन आणि z एक बार दोन गुणिले z दोन बार हे दोन वजा z एक z दोन बार दोन वजा z एक बार आणि z दोन सारखे आहे आणि आता फक्त साधी गणना करा आपण पाहतो की हे मोड आहे z एक चौरस आणि दुसरा घटक mod z च्या चार पट दोन चौरस आणि उर्वरित f अभिनेता वजा z एक आमच्या बरोबर गुणाकार केला z एक z दोन बार आणि z एक पट्टीच्या दोन पटीने गुणाकार केला z दोन उजव्या बाजूने हा चार बरोबर आहे आणि त्याचा मॉड स्क्वेअर एक मोड z दोन बारवर मोड आहे स्क्वेअर काही फरक पडत नाही कारण z बारचे मापांक पुन्हा z चे मापांक आहे उर्वरित घटक z एक बारचे वजा दोन पट z दोन z एक z दोन बारचे वजा दोन पट आहेत आपण पाहतो की हे दोन घटक सामान्यतः दिसतात ते रद्द करतात म्हणून आपण खालील समीकरण मिळवा की mod z एक चौरस अधिक mod चार गुणा mod z दोन चौरस वजा चार वजा z एक z पूर्ण चौरस बार करण्यासाठी हे शून्य आहे आता आपण पाहतो की यावरून आपण या शब्दाला mod z1 गुणाकार असे म्हणू शकतो मॉड z1 स्क्वेअर मॉड z2 स्क्वेअर नंतर [संगीत ] कॉमन फॅक्टर जर आपण मॉड z स्क्वेअर z1 स्क्वेअर एक वजा मोड z2 स्क्वेअर आणि उरलेला टर्म आणण्याचा प्रयत्न केला तर उणे 4 कॉमन काढले तर 1 वजा मोड z2 स्क्वेअर हा शून्य बरोबर आहे आता आपण c एक उत्पादन संज्ञा म्हणून लिहा ठीक आहे जे सहज लक्षात येते की एक वजा mod z2 चौरस mod z सह गुणाकार केला जातो एक चौरस वजा चार शून्याच्या समान आणि गृहीत धरले की mod z दोन एक समान नाही हे लगेच सांगते की हे आहे शून्य नसलेली संज्ञा ही शून्य नसलेली संज्ञा आहे म्हणून लगेच निष्कर्ष काढला की mod z एक चौरस चार आहे आणि mod z एक दोन आहे हे लगेच म्हणते की पर्याय c बरोबर आहे म्हणजे mod z एक त्रिज्या दोनच्या वर्तुळावर आहे
तर ठीक आहे संक्षेपात आम्ही जटिल संख्यांच्या मापांकाच्या अधिक गुणधर्मांबद्दल चर्चा करतो आणि जटिल संख्येच्या संयुगाच्या गुणधर्मांचा एकत्रित वापर करून
आम्ही काही समस्या काढल्या आणि पुढील व्याख्यानात आम्ही जटिल संख्यांसाठी आर्गॉन प्लेन आणि ध्रुवीय प्रतिनिधित्व याबद्दल चर्चा करू धन्यवाद.