مثلثی افعال پر لیکچر سات میں خوش آمدید آخری لیکچر میں ہم نے مثلثی مساوا
کی شکل کی tan y مساوی tan x اور sin y cos x equal to cos y کے مساوی sin x توں پر تبادلہ خیال کیا تھا ہم نے
مثلثی مساوات کے عمومی حل پیش کیے ہیں اور ہم کچھ مسائل حل کیے
تو اس لیکچر میں بھی ہم مسائل کو حل کرنا جاری رکھیں گے آئیے سب سے پہلے ہم نے پچھلی کلاس میں کیا کیا تھا اس کا ایک سرسری جائزہ لے
کر شروع کریں
اور ہم نے کہا کہ اس مساوات کا حل sine x equal to sin y تو ہم نے اس فارم کی مثلثی مساوات کے عمومی حل پر تبادلہ خیال کیا
کی cos y کے برابر cos x ایک عدد عدد ہے اسی طرح n کی طاقت جہاں y اوقات n پلس مائنس 1 کے لئے n pi برابر ہے x
شکل کی مثلثی مساوات کے لئے ہم نے دکھایا کہ عمومی حل ہے فارم کی
اس سیٹ سے تعلق رکھتا ہے x کا بنیادی طور پر مطلب یہ ہے کہ x equal to تو یہاں جب میں کہتا ہوں کہ
کے لیے جمع n سے ہے تمام عدد pi کا تعلق سیٹ ٹو اور cos phi x کے برابر cos x تو یہ اس مساوات کا عمومی حل ہے اور
کی شکل y جمع n pi کے لیے n کے لیے ہم نے ظاہر کیا کہ عمومی حل سیٹ عدد tan x کے برابر مساوات tan y اور y مائنس
کا تھا
کا عمومی حل تلاش کرنے cosecant کی مساوات x تو آئیے کچھ اور مسائل کو حل کرتے رہیں ، اس لیے اس مسئلے میں ہم سے پوچھا گیا
cotangent اور cosecant کے برابر ہے لہذا مسائل کو حل کرنے کی ایک تکنیک جہاں آپ cotangent پلس جڑ تین کے x کے لئے
استعمال کریں تمام شناخ ah کے لحاظ سے ظاہر کریں اور پھر tan اور sine cos حاصل کرتے ہیں انہیں
کے x ایک سے زیادہ سائن cosecant کا x اس لیے ہم جانتے ہیں کہ tan اور sin cos توں کے لئے اس مساوات کو حل کرنے میں
جمع 3 کے مربع جڑ کے طور پر لکھ سکتے ہیں اور پھر ہم x کے طور پر سائن cosecant کے x کو cosecant کے x برابر ہے ہم
ایسی چیز ہے جسے ہم جانتے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ 1 مائنس cos x اس اصطلاح کو بائیں طرف لاتے ہیں۔ کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ 1 مائنس
اس لیے ہم اسے استعمال کرنے کی کوشش کریں گے x by two مربع sine برابر ہے cos x 2
تو یہ بن جاتا ہے یا پھر یہ ایک راستہ ہے یا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم ضرب کرتے ہیں۔ سائن ایکس کے دونوں طرف اور پھر ہمیں 1 برابر
ملتا ہے x جمع جڑ کے 3 بار سائن x کاسائن
کی شکل میں ہے اور پھر ہم نے پچھلے لیکچرز میں سے ایک میں اس پر بات کی تھی کہ اسے آسان کیسے b sin x جمع cos x تو یہ شاید
بنایا جائے۔ اسے دو گنا نصف کوس ایکس پلس روٹ تھری کو سائن ایکس میں لکھا جا سکتا ہے جسے مزید لکھا جا سکتا ہے جیسا کہ اب یہاں ہم
ah جانتے ہیں کہ ہم آدھے کو کوس ساٹھ ڈگری اور جڑ تین کو دو کو ساٹھ ڈگری کے سائن سے بدل سکتے ہیں یا ہم یہ بھی کر سکتے ہیں ورنہ ہم
sine کے pi کے طور پر اور نصف کو 30 ڈگری کے سائن کے طور پر بھی لکھ سکتے ہیں جیسے cos جڑ تین کو دو کو تیس ڈگری کے
پر دستخط کریں cos a sin b plus cos b میں اور یہ شکل ہے ایک sin x کو 6 کو cos pi کے ساتھ cos x کو 6 میں
کے دو گنا سائن ہے لہذا ہم نے پچھلی sine x x x plus pi over six کے pi جمع x تو منحنی خطوط وحدانی کے اندر یہ چیز
اوور چھ کا سائن نصف ہے لیکن نصف pi جمع x اوور چھ میں کر دیا ہے۔ ایک کے برابر یا pi پلس sin x سلائیڈ پر اسے گھٹا کر دو کو
چھ سے زیادہ ہے pi سائن کے برابر ہے۔ تیس ڈگری کا جو
pi جمع x اور اس کے لیے ہم جانتے ہیں کہ عام حل یہ ہے کہ sin y برابر sine x تو یہاں ہمارے پاس دوبارہ فارم کی ایک مساوات ہے
ہے y pi by 6 کی طاقت اس صورت میں y گنا n جمع مائنس سے ہونا چاہیے۔ 1 سے n pi کا تعلق سیٹ by six
کی n pi by six جمع مائنس ون کا pi کا تعلق سیٹ سے ہے اور x کے لیے اور یہ وہی ہے جیسے کہ n تمام عدد pi by 6 تو
کے x کی مساوات کوسیکینٹ کے لئے مقرر کیا گیا ہے x طاقت مائنس پائی اوور سکس ایک انٹیجرز سے تعلق رکھتا ہے لہذا یہ عام حل ہے
cos x کے حل ایک کے برابر ہیں لہذا ہم دوبارہ secant کے علاوہ cosecant کوٹینجینٹ کے علاوہ تین کے مربع جڑ کے تھیٹا کے
تھیٹا برابر ہوگا اور پھر جب آپ سائن تھیٹا کوس تھیٹا کے ساتھ cos کو ون اوور سائن تھیٹا کے طور پر ظاہر کریں گے اور یہ ون اوور theta
دونوں اطراف کو ضرب دیں گے
تھیٹا کے برابر کرتا ہے لیکن ایسا ظاہر نہیں ہوتا جب یہ cos تھیٹا پلس سائن ٹی حاصل کرنا بیٹا سائن تھیٹا کو cos تو آپ ختم ہوجائیں گے۔
کی پیداوار sin theta cos theta ah کی شکل میں ظاہر ہوتا ہے لیکن پھر یہاں ہمارے پاس b sin theta پلس cos theta
اسکوائر sin ہے یہاں کرنے کے بہت سے ممکنہ طریقے ہیں اس مسئلے کا ایک ممکنہ طریقہ یہ ہے کہ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ
تھیٹا سے تعبیر کر سکتے ہیں اور cos کو سائن تھیٹا پلس t اسکوائر تھیٹا ایک ہے جو ہم کر سکتے ہیں ہم cos اسکوائر تھیٹا cos تھیٹا پلس
پھر اگر آپ ایسا کرتے ہیں
اسکوائر cos اسکوائر سائن اسکوائر تھیٹا پلس t تو یہ ایک مختلف نیا متغیر ہے۔ جس کی یہاں تعریف کی گئی ہے اور پھر آپ دیکھیں گے کہ
اسکوائر ایک جمع دو سائن تھیٹا t اسکوائر تھیٹا ایک ہے اور اس لیے cos اسکوائر تھیٹا پلس sin تھیٹا ہے لیکن cos تھیٹا sin تھیٹا پلس ٹو
مربع مائنس ایک اوور ٹو کے برابر ہے لہذا t تھیٹا میں بدل جاتا ہے۔ اور یہاں سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ سائن تھیٹا کوس تھیٹا میں اصل میں cos
اب اگر ہم دیکھیں کہ آہ مثلثی مساوات پر واپس جائیں
کے sin theta plus cos theta کو t مربع ہے مائنس ایک دو سے زیادہ اور t ہے دائیں ہاتھ کی طرف t تو بائیں ہاتھ کی طرف
مائنس ایک صفر کے برابر t مربع مائنس دو t یا t مربع مائنس ون بن جاتی ہے دو t کے لحاظ سے مساوات t طور پر بیان کیا گیا ہے لہذا
میں ایک چوکور مساوات ہے دو ممکنہ جڑیں ہیں جڑیں دو جمع مائنس مربع جڑ آٹھ ہاں دو کے برابر ہے جو ایک جمع t ہے اور اس لئے چونکہ یہ
برابر ہے سائن تھیٹا پلس کوس تھیٹا جسے دراصل مربع جڑ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ t مائنس مربع جڑ دو کے برابر ہے اب ہم جانتے ہیں کہ
جو کہ اب ہم جانتے ہیں of 2 in sine theta times 1 over root 2 plus cos theta times 1 over root 2
cos کے بھی برابر ہے لہذا آپ یہاں لکھ سکتے ہیں۔ sine pi by four ہے اور یہ cos pi by four دو over root کہ ایک
کی شکل ہے اور اس لیے cos a sin b پلس sine a cos b تھیٹا میں سائن پائی اوور فور یہ ایک بار پھر cos فور پلس pi by
فور کا سائن ہے pi by منحنی خطوط وحدانی کے اندر یہ اظہار تھیٹا جمع
کی شدت ہوسکتی ہے چونکہ سائن کی قدر t چار اور اس لیے اس سے پھر ہم جانتے ہیں کہ pi by تو یہ تھیٹا کے سائن کے برابر ہے۔ پلس
کی مطلق قدر دو کے مربع جڑ کے برابر سے کم ہونی چاہیے اگر آپ اس مساوات کی جڑوں پر واپس t مائنس ون اور پلس ون کے درمیان ہے
تھیٹا ہے جو اس کے برابر ہے cos تھیٹا پلس t sin جائیں اگر ہم دیکھیں جڑ جو ایک جمع جڑ 2 ہے جو کہ قابل عمل حل نہیں ہے کیونکہ
جہاں سے ہم نے دیکھا تھا کہ مطلق قدر روٹ 2 سے کم ہونی چاہیے۔ اس لیے ہم جڑ نہیں لے سکتے جو ایک جمع جڑ دو ہے کیونکہ یہ اس سے
برابر ہے 1 مائنس جڑ 2 کے اور ہمارے یہاں یہ آسانیاں پہلے ہی t باہر ہے جو اس رکاوٹ کو پورا نہیں کرتا ہے لہذا واحد حل یہ ہے کہ
کے ساتھ ختم ہوتے ہیں۔ تھیٹا پلس پائی کے سائن میں بذریعہ چار برابر اس لیے ہم صرف دوسری t موجود ہیں لہذا آخر کار ہم جڑ 2 کے برابر
جڑ لیتے ہیں جو اس رکاوٹ کو پورا کر رہا ہے جو کہ دو کا ایک مائنس مربع جڑ ہے لہذا اس ساری چیز کو دوبارہ تھیٹا پلس پائی کے سائن میں جڑ
دو کے طور پر لکھا جا سکتا ہے بذریعہ چار برابر دو کا ایک مائنس مربع جڑ جس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ تھیٹا پلس پائی کا سائن ایک اوور روٹ دو

مائنس ایک کے برابر ہے اور اسے کچھ زاویہ فائی کے سائن کے برابر ہونے دیں کیونکہ منحنی خطوط وحدانی میں یہ قدر مائنس ون اور جمع ایک
کا سائن اس phi کے لئے ہمیشہ ایک قدر تلاش کریں جیسے phi کے درمیان ہے لہذا ہم کر سکتے ہیں صفر اور دو پائی کے درمیان اس زاویہ
کو وہ قدر رہنے دیں phi قدر کے برابر ہے لہذا
کے سائن کے برابر ہے ہمارے پاس حل ہے کہ تھیٹا پلس فائی y کی وہی مساوات ہے جس کے لئے sine x تو اب ہمارے پاس دوبارہ فارم
ٹائم فائی کی طاقت سے اور اس وجہ سے حل نے کہا کہ n کے لئے n پلس مائنس 1 سے ہونا چاہئے تمام انٹیجر n pi بائی 4 کا تعلق سیٹ
ٹائمز فائی مائنس پائی کی طاقت 4 سے ہے n کے لیے n جمع مائنس 1 سے ہوگا۔ تمام انٹیجر n pi تھیٹا کے لئے عام حل سیٹ
تو اگر آپ اس مسئلے کے حل کی طرف واپس جائیں
a اور سائن کا مجموعہ تھا دوسری طرف ہمارے پاس cos تو ہم نے یہاں ایک چھوٹی سی چال استعمال کی ہے کیونکہ ایک طرف ہمارے پاس
اسکوائر تھیٹا ایک ہے cos اسکوائر تھیٹا پلس sin پروڈکٹ اس لیے ہمیں یہ چال استعمال کرنا پڑی۔ ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہیں کہ
تو یہاں اگلا مسئلہ ہے
تو یہ ہم سے اس مثلثی مساوات کا عمومی حل تلاش کرنے کو کہہ رہا ہے اور پھر ہم یہاں کیا کر سکتے ہیں کہ ہم اسے 1 لکھ سکتے ہیں۔ پلس 1
تھیٹا کے برابر ہے اور پھر ہم بائیں ہاتھ کی طرف اور دائیں ہاتھ کی cos تھیٹا پر sin تھیٹا cos تھیٹا میں 1 جمع 1 اوور cos 2 اوور
طرف دونوں کو ضرب دیتے ہیں
cos 2 theta times cos 4 theta times sine theta اور دائیں ہاتھ کی طرف سے ضرب کرتے ہیں lhs تو ہم
cos 4 theta times sine theta is equals cos theta to تھیٹا میں 1 جمع cos 2 تو ہم حاصل کرتے ہیں 1 جمع
مربع کے cos اسکوائر تھیٹا اور یہ دوسرا ایکسپریشن دو cos فور تھیٹا یہ پوری چیز دو کے برابر ہوگی۔ cos میں cos two theta
فور تھیٹا اور پھر آہ لینے سے جو بھی دائیں طرف ہے ہر چیز کو بائیں cos ٹو تھیٹا cos تھیٹا cos برابر ہوگا دو تھیٹا ٹائم سائن تھیٹا برابر
طرف لے جانے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ صفر اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان دونوں اصطلاحات میں کچھ مشترک اصطلاحات ہیں لہذا آپ ان کو فیکٹر
آؤٹ کرتے ہیں
تھیٹا بھی مشترک ہے لہذا ہم ان دونوں کو نکال دیتے ہیں cos 2 ایک عام اصطلاح ہے یہاں cos theta تو آخر میں ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے
اور پھر ہم صفر کے برابر ہے اور یہاں ہم ایک نمونہ دیکھتے ہیں کہ آہ دو گناہ تھیٹا کوس تھیٹا حقیقت میں گناہ دو تھیٹا کے برابر ہے لہذا اس حقیقت
تھیٹا اور پھر ہم اسی پیٹرن کو دیکھتے ہیں۔ دو تھیٹا cos 4 تھیٹا مائنس cos 2 کو استعمال کرتے ہوئے ہمارے پاس 2 سائن 2 تھیٹا ہے
تو یہ چیز اب سائن فور تھیٹا ہے
صفر کے برابر ہے یا سائن فور تھیٹا cos تھیٹا صفر ہے یا دو تھیٹا کا cos تو اب یہ مساوات صفر ہے اگر اور صرف اس صورت میں جب
مائنس کاس فور تھیٹا صفر ہے ان تینوں میں سے کسی ایک کو ہم ان تینوں مختلف مساوا
توں میں سے ہر ایک کا حل تلاش کرنے اور ان سب کو ملانے کی ضرورت ہے
کے cos تھیٹا کی شکل ہے cos تھیٹا صفر کے برابر کا مطلب ہے کہ تھیٹا سیٹ سے تعلق رکھتا ہے کیونکہ یہ cos تو یقیناً ہم جانتے ہیں کہ
کے برابر ہے لہذا اس کا cos y کی مساوات کا عمومی حل cos x استعمال کر سکتے ہیں۔ ای فارم th اور پھر ہم pi by two برابر
انٹیجر ہے n اوور ٹو ہے جہاں pi جمع مائنس ایک میں n حل دو
ٹو تھیٹا صفر کے برابر ہے عمومی حل یہ ہے کہ تھیٹا تعلق رکھتا ہے۔ cos تو اس مساوات کے لئے
کے لیے اب n تو بالکل ایک جیسا ہی ہو گا سوائے اس کے کہ ہمارے یہاں دو تھیٹا ہے اسے دو این پلس مائنس ون میں پائی اوور فور تمام انٹیجر
اس آخری مساوات کے لیے جو کہ یہ دوبارہ لکھا جا سکتا ہے اس کا مطلب ہے اور دوسری سے اس مساوات کا مطلب ہے جہاں اگر میں ایک اوور
جڑ سے ضرب کروں
sin pi by برابر cos pi by four پر جانا لکھا جا سکتا ہے کیونکہ cos تو بھی دائیں ہاتھ کی طرف صفر برابر صفر ہے اور اسے
sine a cos b کا مطلب ہے اب یہ بائیں ہاتھ کی طرف ہے جس کی شکل ہے ism کے برابر ہے ون اوور روٹ ٹو پر جو مزید ایک four
کی سائن ہے لہذا یہ بائیں ہاتھ کی طرف چار تھیٹا کی سائن کے برابر ہے مائنس پائی از چار ای b جو مائنس cos a sin b مائنس
n کے لیے سیٹ n چار کا تعلق تمام عدد pi by ہوتا ہے اس حقیقت سے مضمر ہے کہ چار تھیٹا مائنس n جس کا مطلب quals zero
برابر صفر اور یہ پھر اس کا y کے ساتھ sin y برابر sine x سے ہونا چاہیے اس لیے یہاں ہم فارمولہ استعمال کر رہے ہیں کہ pi
سے زیادہ عدد میں منتقل کرتے ہیں لہذا n کے اندر 16 pi کے اندر 4 پلس n pi کو pi مطلب یہ ہے کہ تھیٹا سے تعلق رکھتا ہے ہم
تھیٹا cot مسئلے کا حتمی حل مسئلہ کا عمومی حل 1 جمع سیکنڈ تھیٹا میں 1 جمع سیکنڈ 4 تھیٹا کے برابر
جمع مائنس ایک دفعہ n یونین کے ساتھ 2 n تمام عدد pi by 2 جمع مائنس 1 گنا n تو عمومی حل ان سیٹوں کے اتحاد سے دیا جاتا ہے 2
n سے زیادہ سولہ عدد pi سے زیادہ چار جمع n pi یونین کے ساتھ n سے چار دوبارہ عدد pi
تو یہ اس مثلثی مساوات کا حتمی حل ہے
تو آئیے ایک اور مسئلے پر غور کریں
کی سب سے چھوٹی مثبت قدر تلاش کریں تاکہ یہ مثلثی مساوات مطمئن ہو جائے تاکہ ہم دوبارہ x تو اس مسئلے میں ہم سے کہا جاتا ہے کہ
جمع x پر cos جمع 100 کی x جمع سو ڈگری کا سائن بن جاتا ہے x اور اس لیے یہ cos x بذریعہ nx لکھیں۔ si کو tan x
کی x مائنس 50 کی سائن میں نہیں لکھ رہا ہوں۔ x کی سائن میں x کی سائن کے برابر ہے۔ اس لیے میں وقت کے مفاد میں ڈگری کو 50
میں تقسیم کیا اور پھر ہم دونوں اطراف کو ضرب دیں cos مائنس 50 کے x کو cos x سے cos 50
cos x plus 50 cos x x minus 50 cos x minus 50 سے 100 گنا cos کے x اور دائیں ہاتھ کی طرف کو lhs تو
cos x x x x جمع پچاس گنا cos x جمع سو گنا x سے ضرب دیں اور پھر اس ضرب کے بعد ہم جو حاصل کرتے ہیں وہ ہے سائن
جمع 100 ہم دیکھتے ہیں کہ بائیں ہاتھ اور دائیں cos of x گنا sine x plus 50 x sine x minus 50 مائنس 50 کے برابر
جمع سو کی x طرف دونوں طرف ہمارے پاس سائن اور کوسائن کی مصنوعات ہیں لیکن اب سوال یہ ہے کہ ہمیں اس کے ساتھ جوڑنا چاہئے یا
کے ساتھ جوڑتے ہیں۔ پھر cos x جمع سو کی سائن کو x کے ساتھ جوڑنا چاہئے اور جو ہم دیکھتے ہیں وہ ہے کہ اگر ہم cos x سائن کو
مائنس ففٹی cos x جمع پچاس کو cos x ہمیں ایک اصطلاح ملتی ہے جو سائن آف سو ہے اور ہمیں اسی طرح کی اصطلاح ملتی ہے اگر ہم
پلس سو cos x مائنس ففٹی کے ساتھ جوڑیں اور x جمع پچاس کو سائن x کے ساتھ جوڑیں اور اس طرف بھی کچھ ایسا ہی ہوگا اگر ہم سائن
sin x کے ساتھ
تو آئیے ہم ایسا کرنے کی کوشش کریں اور دیکھیں کہ کیا ہوتا ہے لہذا ہم سب سے پہلے بائیں ہاتھ کی سمت کو آسان بنانے کے ساتھ شروع کرتے
ہیں اور یقیناً ہم دونوں اطراف کو چار سے ضرب دے سکتے ہیں لہذا ہمیں اس چار کی ضرورت ہے کیونکہ ہم یاد کرنے کی کوشش کریں گے۔ دو
کے لیے cos a sin b اور دو cos a cos b اور دو sin a cos b دو sin a sin b
توسیع
cos جمع پچاس گنا cos x کو دو سے ضرب cos x جمع 100 بار sine x تو بائیں ہاتھ کی طرف وہی ہوگا جسے ہم لکھ سکتے ہیں 2

x کا سائن جو سو ڈگری ہے b کا سائن ہے مائنس b ایک جمع cos b مائنس پچاس اب ہم جانتے ہیں کہ
cos a cos b cos کا نمونہ دیکھتے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ دو cos a cos b تو یہ پہلی اصطلاح ہے بائیں طرف اور پھر یہاں ہم دو
a plus b plus cos a مائنس b ہے
تو یہ اصطلاح بن جاتی ہے
ہونے والا ہے اور پھر یقیناً ہم چاروں b cos 100 مائنس cos a جمع x ٹو cos سے ضرب کیا جائے گا b جمع cos a تو اس کو
x دو cos جمع سائن کا سو گنا cos 100 اصطلاحات لکھ سکتے ہیں یہاں بہت اچھی طرح سے جمع کی جمع سائن آف جمع کا 100 گنا
سو جب ہم اب دائیں ہاتھ کی طرف سے ایسا ہی کرنے کی کوشش کرتے ہیں cos of جمع سائن کا سو گنا
جمع x جمع سو اور یہاں ہم سائن cos x مائنس پچاس گنا x مائنس x گنا x جمع 50 گنا سائن x تو دائیں ہاتھ کی طرف ہم 4 میں سائن
جمع سو کے ساتھ جوڑیں گے cos x کو x مائنس ففٹی اور سائن x پچاس کو سائن
ہے جو b بن جائے گا۔ جمع پچاس انٹ سائن ایکس مائنس 50 گنا 2 سائن ایکس کوس ایکس پلس سو اب یہ شکل دو گناہ ایک گناہ x تو یہ دو سائن
ہوگی ایک جمع ہی کا سو cos cos کی b مائنس a اس طرح b جمع cos a کے b کے برابر ہے مائنس cos کے b ایک مائنس
ہوگا x دو cos ڈگری مائنس
ہے b ہے اور یہ a تو یہ
ہو جائے گا ایک مائنس ب کا سائن اے مائنس سائن ہمیں a cos b کو ضرب دے کر دو سائن x دو sb تو پلس اس دوسری اصطلاح کے لیے
x مائنس سو کا سائن دینے والا ہے جو سو کی سائن کا مائنس ہے اور پھر ہم دوبارہ ان چاروں اصطلاحات کو لکھتے ہیں جو ہمیں ملتے ہیں ہمیں دو
کے سائن ملتے ہیں۔ cos 100 جمع 100 گنا
سائن سو میں x دو cos جمع سو جمع x سائن دو x ٹو cos مائنس cos 100 تو یہ ہے اس مائنس سائن 100 میں
x کا جمع سائن کا دو x دو cos کا جمع سو گنا x کی سائن ہے دو x تو یہ دائیں ہاتھ کی طرف ہے اور یہ بائیں ہاتھ کی طرف ہے جو دو
سو اور ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں کچھ شرائط منسوخ ہونے cos جمع سائن سو x دو cos کا سو جمع سائن کا سو گنا cos جمع سو گنا
سو یہاں اور یہاں دونوں ہے cos والی ہیں کیونکہ یہ اصطلاح گناہ کرے گی۔ دو ایکس جمع سو بار
بار سائن سو بھی بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ دونوں طرف ہوتا ہے x ٹو cos تو وہیں یہ منسوخ ہو جاتا ہے اور پھر
تو یہ بھی منسوخ ہو جاتا ہے
اسے اس طرف لاتی ہے ah میں بنیادی طور پر یہ اصطلاح x جمع سو کوس ٹو x تو آخر میں جو باقی رہ جاتا ہے وہ یہ ہے کہ دو سائن دو
x کے برابر ہے جسے مزید آسان بنایا جا سکتا ہے جیسا کہ پچھلی سلائیڈ سے ہمارے پاس 2 ہے دو 0 cos 100 اور پھر جمع دو سائن سو
کی شکل میں ہے a cos b سو کے برابر صفر اب یہ دو سائن cos جمع دو سائن سو x کے دو cos جمع سو گنا
b مائنس a جمع گناہ b جمع a ہے سائن a cos b تو ہم جان سکتے ہیں کہ دو سائن
ہمیں سو جمع کا سائن دے گا اور اور یہ ہے اگر b جمع دے گا سو اور سائن ایک مائنس x آپ کو چار b جمع a تو یہ سائن بن جاتا ہے لہذا
آپ یہاں پیٹرن دیکھتے ہیں
a cos a تو یہ دو سو کا سائن ہے یہ اس شکل کا ہے دو سائن
فارمولہ استعمال b جمع علامت a جو دو سو کا سائن ایک بار 0 ہے اور پھر ہم یہاں چاہیں گے۔ میں علامت a ہے دو a cos a تو دو گناہ
کرنے کی کوشش کرتا ہوں
تو یہ چیز 2 بذریعہ سائن بن جائے گی
ڈگری ہوگی لیکن 150 کی سائن ان کی سائن کے برابر ہے۔ 30 cos 50 بذریعہ 2 کی b بذریعہ 2 150 ڈگری ہے ایک مائنس b تو ایک جمع
ڈگری
تو جو نصف ہے
تو یہ آدھے کے برابر ہے
تو دو کو نصف سے ضرب ایک ہے
کی cos 50 جمع سو کا سائن مائنس 50 ڈگری کاس کے برابر ہے جو 40 ڈگری کے سائن کا مائنس ہے کیونکہ x تو ہمارے پاس جو ہے چار
کی سائن کے برابر ہے۔ جسے مائنس 40 ڈگری کی سائن کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے 40
جمع 100 سے دیا جائے گا اس سیٹ سے تعلق رکھتا x فارم ہے جس کے لیے سول جنرل حل 4 x کے برابر سائن y تو پھر ہمارے پاس سائن
استعمال pi مائنس ٹھیک ہے یہاں ہمیں نہیں کرنا چاہئے کیونکہ ہم یہاں y گنا مائنس 40 کی طاقت کیونکہ n جمع مائنس 1 سے n pi ہے۔
کر رہے ہیں اور ہم جواب کا اظہار ریڈین کے لحاظ سے کر رہے ہیں ہمیں اسے واپس ریڈین میں تبدیل کرنے کی ضرورت ہے لہذا ایسا نہیں ہے۔
درست ہے
تو چونکہ یہ ڈگری ہے
کے ساتھ ضرب کرنے کی ضرورت ہے تاکہ اس pi تو ڈگریوں سے اگر ہم یاد کرتے ہیں۔ پچھلے لیکچرز میں ہمیں اسے صرف 180 سے زیادہ
n کو ریڈین میں تبدیل کر دیا جائے لیکن پھر یہی بات ہمیں یہاں بھی کرنی ہے لہذا کسی بھی صورت میں یہ بیان درست ہے لہذا تمام
گنا مائنس کی طاقت ہے n جمع مائنس ون سے ہے اور n pi کا تعلق x سے ہے اور پھر ہم لکھ سکتے ہیں کہ چار z کا تعلق
نائن کے طور پر آسان بنا سکتے ہیں اور پھر ہمیں یہاں مائنس سو لگانا ہوگا لیکن مائنس سو یہ اس میں ہے۔ ڈگری pi by تو اس چالیس کو ہم دو

ہے x ہو گا 9 سے زیادہ اور دوبارہ انٹیجرز سے تعلق رکھتا ہے اور لیکن یہ pi 4 تو ریڈینز کے لحاظ سے جو کہ مائنس 5
تو پھر ہمیں یہاں ہر چیز کو چار سے تقسیم کرنا ہے
اوور فور سے ہے پلس ہم اصل میں مائنس کو باہر لا n pi کا تعلق x تو ہمیں آخر میں جو حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ حل سیٹ کا ہے فارم
کا تعلق عدد کے سیٹ سے ہے لہذا یہ اس مسئلے کا عمومی n سے زیادہ 36 میں تمام pi سے زیادہ 18 مائنس 5 pi سکتے ہیں لیکن مائنس
ڈالتے ہیں n حل ہے اور آپ حقیقت میں تلاش کر سکتے ہیں۔ امتحان کے لئے سب سے پہلے باہر مثال کے طور پر اگر آپ ایک کے برابر
تو وہ حل pi by مائنس پھر اور چار pi by 18 مائنس 5 pi by 36 جو کے مساوی ہے pi by 4 جمع pi by 18 minus 5 pi by 36
ہے 180 ہے pi ہے جو کہ ڈگری میں ہے 45 ڈگری ہے یہ 10 ڈگری ہے اور یہ
تو یہ 25 ڈگری ہے
چھ pi x تو یہ 30 ڈگری کے برابر ہے یا
کی مختلف قدریں ڈالیں گے n کے برابر ایک کے ساتھ ہے اور پھر آپ n تو یہ
x تو آپ کو تمام عمومی ملیں گے۔ اس مساوات کے تمام حل یہاں ایک اور دلچسپ آہ مسئلہ ہے جہاں ہم سے یہ ظاہر کرنے کو کہا جاتا ہے کہ تمام
وقفہ 0 سے x ہمیشہ برابر کے برابر سے بڑا ہوتا ہے تمام cos x کا cos x دو سے یہ بیان درست ہے pi کے لیے وقفہ صفر سے

Prutor@IITK

میں۔ pi by 2
کے برابر x cos x کی سائن بذریعہ دو مائنس pi تو اس کے لیے ہمیں ایسا لگتا ہے کہ ہمیں یہ شناخت استعمال کرنے کی ضرورت ہے کہ
کے لیے اسی طرح کی شناخت ہے لہذا ہم سائن سے شروع کر سکتے ہیں۔ بائیں طرف کی اس آہ اصطلاح کو دو مائنس کے ذریعے cos ہے اور
sine by two minus theta کے pi برابر ہے cos theta کیونکہ sine x کے سائن کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ pi
کے، لہذا اگر آپ اسے دکھانا چاہتے ہیں
کا تعلق ہونا چاہیے۔ x کے سائن کے برابر سے بڑا ہے اب یاد رکھیں کہ ہم نے کہا ہے کہ cos x تو یہ ظاہر کرنے کے برابر ہے کہ یہ
سے دو تک pi وقفہ صفر سے
سے دو سے ہوتا ہے pi کا تعلق صفر سے x تو جب
کے درمیان تعلق کا جائزہ لیتے ہیں cos x اور pi by two minus sin x تو آئیے ہم
سے pi کا تعلق صفر سے x سے کب ہے بذریعہ دو یقیناً جب pi کا تعلق صفر سے x تو آئیے ہم ان دو اصطلاحات کا جائزہ لیتے ہیں کہ
کے درمیان ہوگا cos x دو
پر یہ صفر ہے x کے دو pi برابر x کے برابر صفر پر یہ ایک ہوگا اور x تو
کے x ہوگا اور pi by two برابر صفر کے برابر یہ x پر pi by two minus sin x تو یہ صفر اور ایک کے درمیان ہوگا اور
کے درمیان pi by two minus one two pi by کے برابر ہوگا لہذا یہ pi by two minus one پر یہ pi by two برابر
یہ وقفہ صفر le دو کے ذیلی سیٹ ہیں pi مختلف ہوگا دو اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ وقفہ اور یہ وقفہ یہ دونوں مثال کے لیے وقفہ صفر سے
کے ذریعہ لیا گیا ہے وہ بھی صفر کے درمیان ہے اور ایک بھی cos x تمام قدروں کا سیٹ جو ah بذریعہ دو کا سب سیٹ ہے وقفہ pi سے
جو یہاں دلائل cos x اور sin x بذریعہ دو مائنس pi کا ذیلی سیٹ ہے لہذا یہ ہمیں بتاتا ہے کہ دونوں pi by two وقفہ صفر سے
برابر a ہے لہذا sine b کی sine اور b کی شکل a سے دو سے ہے لہذا بنیادی طور پر ہمارے پاس pi ہیں ان کا تعلق وقفہ صفر سے
کے b نشان a ہے اور ہم سے یہ ظاہر کرنے کے لئے کہا جاتا ہے کہ نشان b cos x اور sin x کو کہتے ہیں دو مائنس pi ہے
سے دو کے وقفہ سے ہوگا اگر آپ نے دیکھا ہوتا سائن فنکشن کا pi دونوں کا تعلق صفر سے b اور a برابر سے بڑا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ
ہے دو سے ہے pi گراف ہم جانتے ہیں کہ میں جلدی سے سائن فنکشن کا گراف پلاٹ کروں گا لہذا اگر یہ صفر ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہ
کے x برابر ہے سائن y ہے اور یہ x تو یہ
کے درمیان دو سے یہ یکطرفہ طور پر صفر سے بڑھ رہا ہے ایک تک pi صفر ہے اور پھر صفر اور x پر صفر کے برابر سائن x تو
کے برابر ہے جیسا کہ اس گراف میں دکھایا گیا ہے a b اگر b اور a تو اس کا کیا مطلب ہے کہ کسی بھی دو قدروں کے لیے ہم کہتے ہیں
کا سائن جو یہاں یہ قدر ہے a تو
کے برابر سے بڑا ہو گا sine کے b کا وِل a تو یہاں یہ قدر سائن ہے
ہے sine کا b تو
ہے sine کی b تو یہ قدر
کے برابر سے بڑا ہے b گناہ a کا مطلب یہ ہے کہ سائن n کے برابر سے بڑا b تو
کے a b یہ صرف یہ دکھانے کے لیے کافی ہے کہ اس وقفہ میں b کا سائن گناہ کے برابر سے بڑا ہے a تو اگر ہمیں یہ دکھانا ہوگا کہ
تھا cos x کا b x اور sin x مائنس a was pi 2 برابر ہے اگر آپ کو یاد ہے کہ
سے دو سے ہے pi کا تعلق صفر سے x تو جب تک ہم اس بیان کو دکھا سکتے ہیں اگر یہ وقفہ میں درست ہے
سے دو سے ہے جب تک کہ ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ اس سے مسئلہ ٹھیک ہوجائے گا pi کا تعلق صفر سے x تو
کی سائن x جمع cos کی x تو آئیے کوشش کریں اس مخصوص مساوات کا دوبارہ جائزہ لینے کے لیے یہ ظاہر کرنے کے مترادف ہے کہ
کے لئے اس لئے ہم pi by two for all x کے برابر سے کم وقفہ میں صفر سے pi by two کے لئے x ہے وقفہ میں تمام
sin x plus cos x is equal to اسے اگلی سلائیڈ پر دکھانے کی کوشش کرتے ہیں لہذا یہ دونوں ایک بار پھر مساوی بیانات ہیں
جڑ دو گنا ایک پر جڑ دو سائن ایکس پلس ایک اوور جڑ کی دو کوزائن ایکس کے برابر ہے
بذریعہ چار اور ایک اوور روٹ دو کو یہاں سائن پائی بذریعہ لکھ cos تو ہم ایک بار پھر کر سکتے ہیں ہم ایک اوور روٹ دو کو بطور پائی کے
کا تعلق 0 x کی سائن کو چار سے آسان بناتی ہے لیکن پھر ہم جانتے ہیں کہ یہ قدر جب pi جمع x سکتے ہیں۔ چار اس لیے یہ پوری چیز
سے ہے pi by 2 x سے
اس کا برابر 1 سے pi by 4 جمع x کے لیے x تو یہ یقیناً ٹھیک ہے اب دیکھنے کے لیے زیادہ کچھ نہیں ہے کیونکہ سائن کی قدر کسی بھی
pi کو جڑ دو کے برابر سے کم ہونا چاہیے کیونکہ جڑ دو sine x plus cos x کم ہونا ضروری ہے اور اس لیے یہاں اس مساوات سے
ایک نکتہ پانچ سات ان دو بیانات i s بذریعہ دو pi سے سختی سے کم ہے۔ دو اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ جڑ دو ایک پوائنٹ چار ایک چیز اور
تک، ٹھیک ہے آئیے pi by 2 سے کم ہے 0 سے pi by 2 کے لیے x تمام cos x جمع x سے کچھ اس کے بعد یہ نکلتا ہے کہ سائن
جس کے لیے یہ مثلثی مساوات مطمئن ہے اور p اس مسئلے میں ایک اور مسئلہ لیتے ہیں ہمیں تلاش کرنا ہے۔ سب سے چھوٹی مثبت عدد
میں اس لیے یہاں ہم دوبارہ یہ شناخت استعمال pi ہو وقفہ صفر سے دو x اس طرح ہونا چاہیے کہ اس مساوات کا ایک حل p درحقیقت نمبر
کا سائن ہے دو مائنس تھیٹا cos pi کرتے ہیں کہ تھیٹا کا
کے اور یہ دوبارہ شکل p cos x کے برابر sine by 2 minus p sine x کے pi تو ہم اس بائیں ہاتھ کی طرف لکھتے ہیں جیسے
sin y کے برابر ہے sine x
پلس مائنس 1 کے برابر ہونا چاہئے کچھ n pi کو p sine x کو 2 مائنس pi تو اس کے درست ہونے کے لیے یہ ہونا ضروری ہے۔ اس
کی طاقت کے لئے p cos x اوقات n کے لئے n یا کچھ عدد n عدد
کے لئے مختلف امکانات آزماتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ہم کیا کرتے ہیں۔ حاصل کریں اگر ہم مثال کے طور پر 0 کے برابر n تو آئیے اب اس عدد
کوشش کریں n
sine x کے طور پر لکھا جا سکتا ہے p ہے جیسے p cos x برابر p sine x مائنس pi by 2 تو مساوی جو آئن ہمیں ملتا ہے وہ
جڑ دو میں آسان بنایا جا سکتا ہے اور پھر ہم اسے دوبارہ p کو sine x plus cos x اور پھر pi over two برابر cos x پلس
سے زیادہ دو اب ہم اس سوال pi چار کے برابر ہے pi by جمع x جو cos x جمع ایک بذریعہ جڑ دو x لکھتے ہیں ایک از جڑ دو گناہ
جمع x کا انتخاب کرنا ہوگا کہ x مثبت ہونے کے لیے ہمیں p لیکن p میں ہیں کہ یہ سب سے چھوٹی مثبت عدد تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے۔
تلاش کرنا چاہتے ہیں p مثبت ہے اور جڑ دو مثبت پلس ہے کیونکہ ہم سب سے چھوٹی pi by two کا نشان بھی مثبت ہے کیونکہ pi by 4
چار کی سب سے بڑی ممکنہ مثبت قدر ہے جو ہم جانتے ہیں کہ pi by جمع x کے طور پر x ہمیں منتخب کرنے کی کوشش کرنی چاہیے۔
ایک ہے
تو جب یہ ایک کے برابر ہے

برابر صفر کے لیے ہم n کے برابر ہوگی دو سے زیادہ جڑ دو لیکن یہ ہے صرف pi کی سب سے چھوٹی ممکنہ قدر ملتی ہے جو p تو ہمیں کو ایک کے برابر رکھیں n کے برابر ایک کے ساتھ اگر ہم n کوشش کر سکتے ہیں

ہے اور اگر ہم اسے دوبارہ ترتیب دیں p cos x مائنس pi برابر p sine x تو ہم ختم ہو جائیں گے اپ حاصل کرنا دو مائنس کے برابر ہے اور یہاں تک کہ ہم ah p times cos x مائنس sin x برابر pi over two تو آخر ہمیں کیا ملے گا وہ یہ ہے کہ sin میں ایک بذریعہ جڑ دو مائنس ایک بذریعہ جڑ دو cos x کے طور پر دو گنا کے مربع جڑ میں اور پھر یہ p اسے دوبارہ لکھ سکتے ہیں۔ کے x پر دو ہے لیکن یہاں تک کہ سب سے بڑا ممکن ہے pi سے زیادہ y y 4 کے طور پر لکھا جا سکتا ہے cos کے x ہو گا جیسے x کے لیے n کی سب سے چھوٹی مثبت قدر اب بھی ایک ہی قدر ہوگی اور ہم منفی p اب بھی ایک ہے اور اس لیے cos plus pi by four صرف اسی n بھی اس طرح کوشش کر سکتے ہیں اور ہم عام طور پر وہی ختم کریں گے جو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات ایک جنرل کے لیے صورت میں مطمئن ہو گا اگر ایسا ہے

لینا آسان ہو جائے x پلس 1 کی طاقت پر اگر میں اسے لاتا ہوں یا معذرت بلکہ اس طرف سائن n تو اسے مائنس 1 کے طور پر لکھا جا سکتا ہے گا

bec کے برابر ہے جو کہ n کے مائنس دو سے دو میں pi کی طاقت n cos x plus sine x ہو جائے گا مائنس ون سے p تو یہ ہے اس اصطلاح کا استعمال مائنس ایک لیکن ایک چیز جس کا یہاں احساس کرنا ہے وہ یہ ہے کہ اگر ہم اسے مزید لکھتے ہیں جیسا کہ ہم جڑ دو کو باہر لیتے ہیں اور پھر ہم جڑ دو کو یہاں لاتے ہیں اور اگر ہم یہاں دیکھیں کہ اگر ہم مطلق اقدار کو لیتے ہیں۔ بائیں ہاتھ کی طرف اور دائیں طرف کو دو کے مربع جڑ میں اب منحنی خطوط mod p ویسے بھی ہم مثبت ہونا چاہتے تھے لہذا p دونوں طرف ہم جو دیکھیں گے وہ یہ ہے کہ وحدانی کے اندر اس چیز کی مطلق قدر اس مخصوص اصطلاح میں سب سے بڑی ممکن ہے قدر اب بھی ایک ہے کیونکہ اس مخصوص اصطلاح کے pi کی قدر کچھ بھی ہے یہ ہمیشہ ایک کے برابر ہو گی لہذا سب سے بڑی ممکنہ قدر ایک ہے اور اسے n سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے کہ کے برابر صفر کے لیے ہم n مائنس ایک کی مطلق قدر میں یہاں سے اب یہ دیکھنا آسان ہے کہ n برابر ہونا چاہئے دو کے برابر ہونا چاہئے دو کے n برابر ایک کے ساتھ ساتھ یہ چیز پائی کے برابر دو کے برابر حاصل کرتے ہیں لیکن اگر ہم n کے برابر دو pi یہ چیز حاصل کرتے ہیں برابر مائنس ون کی کوشش کریں

کی بڑی قدروں n کے برابر دو یا n سے مائنس ٹو یا l برابر کی کوشش کریں۔ n یہاں بھی اسی طرح اگر ہم pi تو ہمارے پاس تین ہیں کے برابر ہے

کا n کی سب سے چھوٹی مثبت قدر تلاش کرنی ہے لہذا ہمیں صفر کے برابر p نہیں ملے گا دو سے بڑا نمبر ملے گا لیکن چونکہ ہمیں pi تو کے دو جڑ دو سے اور جو اس مسئلے pi برابر p ایک کے برابر جس کے لیے سب سے چھوٹی مثبت قدر نکلتی ہے n انتخاب کرنا ہوگا۔ یا کے حل کو ختم کرتا ہے اس کے ساتھ ہم اگلے لیکچر میں مثلثی مساوات کے مسائل کو حل کرنے پر اس لیکچر کو ختم کرتے ہیں۔ ایک نیا موضوع شروع کرنے جا رہا ہوں جو کہ مثلثی افعال کے الٹا جاننا ہے تب تک آپ کا شکریہ