



مائنس نصف equal to

کے فارم کی  $\tan y$  کے برابر  $\tan x$  بھی  $\cos y$  برابر  $\cos x$  کے برابر اور  $y$  برابر سائن  $x$  تو بالکل اسی طرح جیسے سائن کے تمام ضرب  $\pi$  دونوں کو نہیں ہونا چاہئے  $y$  اور  $x$  کسی بھی مثلثی مساوات کا عمومی آہ حل حاصل کرنے کی کوشش کرے گا یقیناً یہاں کے برابر ہے  $\tan x \tan y$  محدود نہیں ہے لہذا ہم یہ دکھائیں گے کہ اگر  $\tan$  کے طاق ضرب دو کا  $\pi$  بذریعہ دو ہوں کیونکہ کے لیے ہم یہ دکھا سکتے ہیں  $n$  کچھ عدد عدد کے عدد کے برابر ہے۔ دوسری طرف کسی بھی عدد  $\pi x$  تو یہ درست ہونا چاہئے کہ کا  $\tan y$  جیسا ہی ہے اور اسے دیکھنا زیادہ مشکل نہیں ہے کیونکہ پچھلے لیکچر میں ہم نے دیکھا تھا کہ  $\tan y$  کا جمع  $n \pi$  کہ ایک م

توانر ہے۔ ایکس کا فنکشن  $\tan$  کے پی آئی پلس ایکس کے  $\tan$  کے برابر ہے دو پائی جمع ایکس کے  $\tan$  کے برابر ہے اور اسی طرح آگے پھر بھی ہم اسے یہاں ثابت کریں گے

برابر ہے  $\tan y$  کا جمع  $n \pi$  تو

ہے مائنس  $\tan$  اے  $\tan$  کے برابر ہی  $\tan b$  جمع  $\tan a$  کا فارمولا معلوم ہے یہ  $\tan a$  جمع  $b$  اور ہمیں  $\tan a$  کا جمع  $b$  جمع  $a$  تو یہ  $n \pi$  کا  $\tan$  کا مائنس  $y$  اور  $\tan$  کا  $n \pi$  کے برابر ملتا ہے  $y$  پلس  $n \pi$  تو اس کا استعمال کرتے ہوئے یہاں ہمیں  $\tan$  کا  $n \pi$  کوئی بھی عدد ہے لیکن اس کے لیے کوئی بھی عدد  $n$  کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے لہذا  $n$  یہاں  $y$  کا  $\tan$  اوقات

$n \pi$  پر  $\cos$  کے  $\tan n \pi$  کا  $\tan n \pi$  صفر کے برابر ہے کیونکہ  $\tan$  کا  $n \pi$  کے لئے ہم جانتے ہیں کہ  $n$  تو کسی بھی عدد کے لیے اور اس لیے یہ صفر پر  $n$  صفر ہے تمام انٹیجر  $\tan n \pi$  صفر کا سائن ہے لہذا  $n \pi$  کے لئے  $n$  کا سائن ہے اور تمام عدد جاتا ہے اور یہ بھی صفر پر جاتا ہے

کے لیے  $n$  تمام عدد  $y$  جمع  $\tan$  کا  $n \pi$  کے  $\tan$  کے برابر ہو جاتا ہے جو ثابت کرتا ہے کہ  $y$  تو جو باقی رہ جاتا ہے وہ یہ ہے کہ یہ برابر ہیں  $\tan y$  اور  $\tan x$  کے  $\tan$  کے برابر ہے اور پھر ہم بھی ظاہر کریں کہ الٹا بیان جو یہ ہے کہ اگر  $y$  کے لیے کچھ عدد  $y$  جمع  $n \pi$  برابر ہے  $x$  تو یہ درست ہونا چاہیے کہ

کے 2 کے طاق ضرب نہیں ہیں لہذا ہمیں یہاں سے یہ ملتا  $y \pi$  اور  $x$  کے برابر ہے اور  $\tan x \tan y$  تو ہم کہتے ہیں کہ ہمارے پاس برابر  $\sin y$  by  $\cos y$  مائنس  $\cos x$  ملتا ہے۔  $\sin x$  سے ہمیں  $\cos x$  ہے  $\tan x \sin x$  ہے اور پھر چونکہ

نہیں ہیں یا  $y$  اور  $x$  صفر کے برابر ہے لیکن چونکہ  $\cos x \cos y$  پر  $\cos x \sin y$  مائنس  $\sin x \cos y$  جہاں سے ہمیں  $\cos x \sin y$  مائنس  $\sin x \cos y$  بھی صفر نہیں ہے اور اس لیے یہاں ہم بیان سائن  $\cos$  کا صفر اور  $y$  نہیں ہے  $\cos x$  کے ضرب دو  $\pi$  کی شکل ہے جو  $\cos a \sin b$  مائنس  $\sin a \cos b$  صفر کے برابر ہے لیکن یہ نمونہ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ یہ  $\sin y$  مائنس سائن کی سائن  $\theta$  کے  $x$  کی سائن کے برابر ہے اور ہم جانتے ہیں کہ تھیٹا کی  $y$  مائنس  $x$  کی سائن کے برابر ہے لہذا یہ  $b$  ایک مائنس  $x$  کے کچھ عدد عدد کا کچھ ضرب ہونا چاہیے اس لیے یہاں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $\pi$  برابر ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ تھیٹا کے برابر ہونا چاہئے اب بقیہ لیکچر میں ہم  $y$  جمع  $n \pi$  کو  $x$  کا کچھ عدد عددی ہونا چاہئے اور اس کا مطلب یہ ہے کہ  $y \pi$  مائنس حقیقی اعداد ہیں اور ہم سے اس مساوات کا عمومی حل تلاش کرنے کے لیے کہا  $c$  اور  $ab$  انٹیجر این کے جمع کرنے کی کوشش کریں گے۔

کو آگے بڑھانے کا طریقہ یہ ہے کہ ہم بائیں اور دائیں  $ah$  ہے لہذا اس کے ساتھ  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$  جاتا ہے دونوں طرف کو مربع جڑ سے تقسیم کریں۔ ایک مربع جمع ہی مربع کا اور جو ہمیں ملتا ہے وہ یہ ہے اب یہاں یہ دوسری مساوات اگر آپ دیکھتے ہیں کہ ہمیں کیا احساس ہے یہ  $b$  مربع کے مربع جڑ پر  $b$  مربع جمع  $b$  مربع کے مربع جڑ کے اوپر اور  $b$  ہیں کہ ایک مربع جمع پر مرکز کے ساتھ اکائی کا دائرہ کھینچتے ہیں اور بتاتے  $o$  ہے کہ اس اصطلاح کا مربع اور اس اصطلاح کا مربع ایک کے برابر ہے اور ہم یہاں مربع کے مربع  $b$  کو آڈینیٹ ایک مربع جمع  $y$  مربع کا مربع جڑ ہے اور جس کا  $b$  کو آڈینیٹ ایک مربع جمع  $x$  ہیں کہ یہ وہ نقطہ ہے جس کا کے لیے گردش کا زاویہ گھڑی کی مخالف سمت میں پانچ ڈگری  $op$  ہے اور یقیناً یہ نقطہ یونٹ کے دائرے پر واقع ہے اور اس سے  $b$  جڑ پر یہاں موجود ہے  $\phi$  ہے لہذا ہمارے پاس یہ

تو آئیے اب یہاں اس دائیں زاویہ مثلث پر

کی تعریف سے بنا رہا ہوں جو ہمارے پاس ہے وہ یہ ہے کہ  $\sin$  اور  $\cos$  توجہ مرکوز کریں جسے میں اب اس دائیں زاویہ مثلث میں  $y$  اس نقطہ کا  $\sin \phi$  مربع اور  $b$  مربع جمع  $a$  جزو کے برابر ہوگا جو کہ ایک مربع جڑ پر ہے  $x$  اس نقطہ کے  $\cos \phi$  مربع کے مربع جڑ پر ہے اب اس حقیقت کو یہاں واپس مثلثی مساوات میں استعمال کرتے ہوئے جو ہمیں ملتا  $b$  مربع جمع  $b$  کو آڈینیٹ ہوگا جو  $\cos$  میں  $\cos \phi$  ہمارے لیے مکمل طور پر جانا جاتا ہے  $\phi$  اس زاویہ کو تلاش کریں  $\phi$  ہے لہذا اب  $\cos \phi$  ہے وہ کے برابر ہے لیکن اگر آپ کو بائیں ہاتھ کی طرف  $c$  مربع کے مربع جڑ پر  $b$  ایک مربع جمع  $\sin \theta$  میں  $\sin \phi$  پلس  $\theta$  یہ اظہار نظر آتا ہے

ایک  $c$  برابر  $\phi$  کے برابر ہے مائنس  $\cos$  اور اس لیے یہ تھیٹا کی  $\sin a \sin b$  جمع  $b$  کی شکل میں ہے۔  $\cos a \cos b$  تو یہ مربع کے مربع جڑ پر اور اس لیے یہ وہ مثلثی مساوات ہے جس کے لیے ہم سے تھیٹا کے حل تلاش کرنے کے لیے کہا جاتا ہے اب  $b$  مربع جمع ہم کیا دیکھتے ہیں۔ یہاں یہ ہے کہ بائیں طرف ہمارے پاس تھیٹا مائنس فائی کا کوسائن ہے اور ہم جانتے ہیں کہ کوسائن فنکشن کی حد مائنس ون اور پلس ون کے درمیان ہے اور اگر اسے اس دائیں ہاتھ کے برابر ہونا ہے

کا ایک برابر سے کم ہونا ضروری ہے لہذا اس مثلثی  $c$  مربع کے مربع جڑ سے زیادہ  $b$  تو اسے درست ہونا چاہیے کہ موڈ ایک مربع جمع مساوات کا حل موجود ہوگا اگر اور صرف اس صورت میں جب یہ شرط مطمئن ہو

تو صرف اس صورت میں جب یہ شرط مطمئن ہو

تو کیا ہمارے پاس کوئی حل ہوگا؟ یہ مثلثی مساوات بصورت دیگر اس مثلثی مساوات کا کوئی حل نہیں ہے اب آئیے ہم فرض کر لیں کہ یہ شرط مطمئن ہے

تو اس صورت میں ہمیں صرف اتنا کرنا ہے کہ ہم یہ کہیں گے کہ ہم دوبارہ اس پر واپس چلے جاتے ہیں اگر یہ حالت مطمئن ہے

کو اوپر لکھتے ہیں کیونکہ اگر یہ جڑ کے برابر سے کم ہے یا اگر یہ ایک سے کم ہے  $c$  تو ہم بنیادی طور پر واپس جا کر اس کے برابر ہونا چاہیے اور پھر ہم وہی استعمال کریں گے جو ہم صرف پچھلی سلائیڈوں میں سے کچھ میں مطالعہ  $\cos$  کے  $y$  تو یہ کسی زاویہ کے طور  $x$  کے برابر ہے لہذا ہمیں اس پوری چیز کو  $x \cos y$  کی طرح  $\cos$  کے برابر ہے اس لیے ہمارے یہاں ایک جیسی مساوات ہے کے لئے اس سے  $n$  کے تمام عدد  $y$  جمع مائنس  $n \pi$  جو تھیٹا مائنس فائی کے برابر ہے دو  $x$  پر ماننا ہوگا اور اس لئے عام حل یہ ہے کہ جمع  $n \pi$  جمع  $2 \phi$  کا سیٹ انٹیجرز کا سیٹ ہے اور اس وجہ سے تھیٹا کا حتمی عمومی حل  $z$  کے لئے  $n$  تعلق رکھنے والے تمام ایک عدد عدد ہے  $n$  کے برابر ہے جہاں  $y$  مائنس

درست ہے یا اس کے  $\phi$  حل اور صرف اس صورت میں موجود رہے گا۔  $ah$  تو یہ اس مثلثی مساوات کا عمومی حل ہے لیکن یہ عام

پاس ہے اب ہم ایک اور مسئلہ پر بات کرتے ہیں

تو اب اگر آپ دیکھتے ہیں کہ ہمارے پاس اب دو متغیرات ہیں جبکہ ہم اب تک جو مطالعہ کر رہے ہیں وہ مساوات مثلث مساوات کو حل کرنا تھا جہاں ہمارے پاس صرف ایک متغیر ہے۔ ابتدائی طور پر یہ بہت مشکل معلوم ہو سکتا ہے لیکن پھر ہم جو کر سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ ہم کچھ آہ متبادل کر سکتے ہیں اور پھر حل حاصل کر سکتے ہیں لہذا ہمیں پوچھنا ہے کہ ہمیں مساوات کے اس نظام کا حل تلاش کرنا ہے کی اس قدر کو  $y$  اور ہم  $x$  برابر ہے دو پائی بذریعہ تین مائنس  $y$  تو اب ہم جو دیکھتے ہیں وہ ہے پہلی مساوات یہاں ہم لکھ سکتے ہیں کہ برابر ہے تین  $x$  مائنس  $\cos$  of two pi by three جمع  $\cos$  of  $x$  دوسری مساوات میں بدل دیتے ہیں لہذا اب دوسری مساوات ہے اور

میں ایک مثلثی مساوات حاصل ہوتی ہے اور ہم اسے حل کرنے کے قابل ہو جاتے ہیں  $x$  تو آخر کار اس متبادل کی مدد سے ہمیں آخر کار ایک متغیر تھا لہذا ہم استعمال کرتے  $\cos$  کا  $\pi$  by three minus  $x$  ہے پلس ہمارے پاس دو  $\cos$   $x$  کہ مزید آگے بڑھتے ہوئے ہمارے پاس  $\cos$  two pi by three  $\cos$   $x$  plus sine two pi by three sine  $x$  مائنس نصف کے برابر ہے  $\cos$  of two pi by three لیکن  $\cos$  of two pi by three  $\cos$   $x$  plus sine two pi by three sine  $x$  ڈگری کا سائن ہے اس طرح یہ 3 کے مربع جڑ کے برابر  $\sin$  2 pi by 3 120 ہے اور  $\cos$   $x$  مائنس نصف  $\cos$   $x$  تو ہمارے پاس کے برابر  $c$  کے برابر ہے  $\sin$   $x$  جمع جڑ تین  $\cos$   $x$  برابر ہے 3 سے 2 اور پھر مزید آسانیاں کچھ آسانیاں ہمیں نصف  $x$  ہے 2 بار سائن کے  $\sin$  of pi by three ہے اور یہ  $\cos$  by 60 degrees ہے  $\cos$  of pi ہے اور ہم جانتے ہیں کہ نصف  $r$  دو ضرب  $\pi$  by three ہے

کی شکل ملے گی  $\sin$   $a$   $\sin$   $x$  جمع  $\cos$   $a$   $\cos$   $x$  تو ہمیں  $\cos$   $a$   $\cos$   $x$  کو 3 میں  $\pi$  معذرت اس کے بجائے ہم سائن  $\cos$  of pi 3 by  $\cos$   $x$  plus root 3 کے برابر لکھتے ہیں۔ جیسا کہ  $\sin$   $x$  کے برابر لکھتے ہیں  $\sin$   $x$

ہے  $\cos$  کا  $b$  کی شکل ہے جو کہ ایک مائنس  $\sin$   $a$   $\sin$   $b$  جمع  $\cos$   $a$   $\cos$   $b$  تو اب تک یہ ہماری مثلثی مساوات ہے لیکن یہ کوزائن کا فنکشن مائنس ون سے  $t$  برابر تین سے زیادہ دو لیکن ہم جانتے ہیں کہ  $\cos$  by three کی  $\pi$  مائنس  $x$  تو آخر کار ہمارے پاس پلس ون کی حد تک محدود ہے اور اس لیے آہ کا کوزائن کبھی بھی تین بائیں دو کے برابر نہیں ہو سکتا اور اس لیے مساوات کے اس سیٹ کا کوئی حل نہیں ہے، اس لیے حتمی جواب یہ ہے کہ کوئی حل نہیں ہے۔ آئیے یہاں ایک اور سوال دیکھتے ہیں تو ہم سے اس مثلثی مساوات کا عمومی حل تلاش کرنے کو کہا جاتا ہے اور اگر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دراصل بائیں ہاتھ کی طرف ہے کے برابر لیں  $\sin$   $\theta$  کو  $z$  میں دراصل چوکور ہے لہذا اگر ہم  $\sin$   $\theta$  تو کے ذریعے دی جائے گی تین جمع مائنس  $z$  مائنس دو برابر صفر کی مساوات یہاں  $z$  مربع مائنس تین  $z$  تو ہمیں چوکور ملتا ہے۔ مساوات دو مربع جڑ کے نو جمع چار میں دو میں دو جو سولہ سے زیادہ دو گنا دو یہ چار ہے

تو دو جڑیں تین ہیں جمع مائنس پانچ بائیں چار لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم جڑ لیں کسی زاویے کے نشان کے برابر ہے اور اس لیے یہ دو نہیں ہو سکتا اس  $z$  تین جمع پانچ زیادہ چار تین جمع پانچ زائد چار دو ہے لیکن  $ah$  تو برابر تین مائنس پانچ اور چار کے برابر  $z$  ایک قابل عمل حل نہیں ہے لہذا صرف دوسرا حل جو باقی ہے وہ ہے  $ah$  دو کے برابر  $z$  لیے حل ہے جو مائنس نصف کے برابر ہے لہذا بنیادی طور پر اس مثلثی مساوات کا حل مائنس کے برابر گنا تھیٹا کا حل ہے۔ نصف صفر  $a$   $\cos$   $b$  کا سائن برابر ہے سائن  $x$  جمع  $\pi$  تھیٹا مائنس نصف کے برابر ہے لہذا ہم یہ شناخت جانتے ہیں کہ  $\sin$  تو ہمارے پاس ہوگا  $\cos$   $a$   $\sin$   $b$  جمع

کے برابر بدلتے ہیں  $\pi$  6 کو  $x$  کا مائنس ہوگا لہذا یہ شناخت معلوم ہوتی ہے ہمارے لیے اور اگر ہم  $x$  تو یہ سائن  $\pi$  کا  $\sin$  by six اور  $\pi$  minus  $\sin$  of  $\pi$  by six برابر مائنس کا  $\sin$  by 6 کا  $\pi$  تو یہاں ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے 7 نصف کے برابر ہے

ہے  $\sin$   $\theta$   $\sin$  of seven  $\pi$  by six تو یہ مائنس نصف ہے لہذا ہم کر سکتے ہیں۔ لکھیں کہ کا عمومی حل تلاش کرنا ہوگا اور اس کا مطالعہ ہم  $\sin$   $\pi$  seven  $\pi$  by six کے برابر  $\sin$   $\theta$  تو ہمیں بنیادی طور پر پچھلے لیکچر میں کر چکے ہیں اگر آپ کو یاد ہو

$y$  اوقات  $n$  جمع مائنس 1 کی طاقت کے لیے  $n$   $\pi$  برابر ہے  $x$  یہ ہے کہ  $y$  کے برابر کا عمومی حل گناہ  $\sin$   $x$  تو ہم نے کہا تھا کہ  $n$  تمام انٹیجرز کے لیے کچھ عدد ہے  $n$  سب کے لیے جہاں

لہذا حتمی جواب یہ ہے کہ اس مساوات کا عمومی حل  $\pi$  by six سات ہے  $y$  تھیٹا ہے اور  $x$  تو یہ ہے اب حل صرف یہ ہے کہ یہاں کے لیے  $n$  ہے تمام عدد  $\pi$  by 6 کی طاقت 7 اوقات  $y$   $n$  پلس مائنس 1 سے  $n$   $\pi$  تھیٹا برابر ہے

تو یہاں ہمارے پاس ایک اور مسئلہ ہے جہاں ہم چاہیں گے اس مثلثی مساوات کا عمومی حل تلاش کرنے کے لیے یہاں ہم اسے تین اسکوائر تھیٹا پلس ٹو تھیٹا کے سیکنٹ کے طور پر لکھتے ہیں کیونکہ ایکس کا سیکنٹ ایک اوور کوزائن ہے

اسکوائر تھیٹا مائنس سائن اسکوائر تھیٹا ہے یہ بھی ہم جانتے ہیں  $\cos$   $\theta$  تھیٹا کیا  $\cos$   $\theta$  تھیٹا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ  $\cos$  تو یہ ایک اوور اسکوائر تھیٹا سے بدلا جا سکتا ہے  $\sin$  اسکوائر تھیٹا پلس  $\cos$  کہ یہاں ایک عدد کو

تو اس کی وجہ یہ ہے کہ میں اس قسم کا متبادل کر رہا ہوں کیونکہ میں چاہوں گا کہ یہ پوری بائیں طرف ہو۔ تین تھیٹا کے لحاظ سے تو کہ مجھے کسی قسم کی چوکور مساوات یا اس طرح کی کوئی چیز ملتی ہے جسے میں حل کر سکتا ہوں اور پھر عمومی حل حاصل کرتا ہوں

اسکوائر تھیٹا سے تقسیم کیا جاتا ہے  $\cos$  اسکوائر تھیٹا پلس سائن اسکوائر تھیٹا ایک ہے اس لیے عدد کو  $\cos$  تو ہمارے پاس جو کچھ ہے وہ ہے اسکوائر تھیٹا سے تقسیم کرتے ہیں  $\cos$  مائنس سائن اسکوائر تھیٹا ایک کے برابر ہے اور پھر اگر آپ عدد اور ڈینومینیٹر دونوں کو

تو ہمیں آخر میں ایک جمع تین اسکوائر تھیٹا اوور ون مائنس تین اسکوائر تھیٹا برابر ہوتا ہے اسکوائر تھیٹا کے ساتھ یہ تھا کہ میں چاہتا تھا کہ بائیں ہاتھ کا یہ  $\sin$  اسکوائر تھیٹا پلس  $\cos$  تو اس کی وجہ یہ ہے کہ ہمیں متبادل بنانا پڑا یہ

پورا حصہ تین تھیٹا کے لحاظ سے ہو اور پھر آخر کار ہمیں جو ملے گا وہ ہے تین اسکوائر تھیٹا گنا ون مائنس تین اسکوائر تھیٹا پلس ون پلس تین اسکوائر تھیٹا برابر ایک مائنس تین اسکوائر تھیٹا

تو بنیادی طور پر اس مساوات میں آپ بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کی طرف دونوں کو ایک مائنس تین اسکوائر تھیٹا سے ضرب دیتے ہیں اور یہ وہی ہے جو آپ گیٹی کو ختم کرتے ہیں۔ لہذا اگر ہم اس منحنی خطوط وحدانی کو کھولیں

تو ہمیں جو ملتا ہے وہ بائیں طرف ہے ہمیں 2 تین مربع تھیٹا پلس 1 مائنس تین 4 تھیٹا برابر 1 مائنس ٹائم مربع تھیٹا ملتا ہے اور پھر اگر ہم اسے تھوڑا سا دوبارہ ترتیب دیں

تو ہمیں تین 4 ملے گا۔ تھیٹا مائنس 3 تین اسکوائر تھیٹا صفر کے برابر ہے اور اس لیے ہمارے پاس تین اسکوائر تھیٹا ہے تین اسکوائر تھیٹا مائنس تھری صفر کے برابر ہے

تو ایسا کرنے کے لیے یا

تو ہمارے پاس تھیٹا کا ٹین ٹین ہونا چاہیے صفر کے برابر جس کا مطلب ہے کہ تھیٹا  
تو یہ ٹین ہے تھیٹا کو صفر کے برابر لکھا جا سکتا ہے کیونکہ ٹین تھیٹا صفر کے ٹینجنٹ کے برابر ہے اور اس لیے اس کا مطلب یہ ہے کہ تھیٹا  
کی شکل میں ہے  $n\pi$  کے لیے تمام عدد  
تو یہ اس مساوات سے ہے  
تو یا

تو ایسا ہونا چاہیے یا ہمارے پاس ٹین مربع تھیٹا ہونا چاہیے۔ مانس تھری کو صفر ہونا جس کا مطلب ہے کہ ٹین تھیٹا یا  
pi by تو جمع جڑ تین ہے یا ٹین تھیٹا مانس روٹ تھری ہے اب ٹین تھیٹا جڑ تین کے برابر ہے لیکن جڑ تین ساٹھ ڈگری کے ٹین کے برابر ہے جو  
کے برابر ہیں اگر آپ کو کچھ سلائڈیں یاد ہوں  $\tan y$  برابر  $\tan x$  تھری ہے اور پھر ہمارے پاس ہے وہی آہ فارم جس میں ہم  
کے جمع  $n\pi$  برابر ہے  $x$  تو ہم صرف اس پر بحث کر رہے تھے اور جو ہم نے کہا تھا کہ اس قسم کی مساوات کا عمومی حل یہ ہے کہ  
کے برابر تھیٹا  $x$  کے لیے اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے جو ہم نے پہلے ثابت کیا تھا کہ ہم  $n$  انٹیجرز سے تعلق رکھنے والے تمام  
کے برابر ہے  $\tan \theta$  اور پھر اسی طرح  $\pi$  by 3 جمع  $n\pi$  کے ساتھ حاصل کرتے ہیں ہم یہ حاصل کرتے ہیں کہ تھیٹا برابر ہے  
مانس  $n\pi$  اور اس کے لیے حل سیٹ تھیٹا کے برابر ہوگا  $\pi$  by 3 مانس روٹ 3 کے لیے اسے لکھا جا سکتا ہے۔ جیسا کہ ٹین آف مانس  
حل ہے  $ah$  اس لیے مثلثی مساوات کا حتمی  $\pi$  by three

تو یہاں سے ہم اس پر آئے تھے جو ہم نے بدل دیا تھا اور پھر ہمیں کیا ملا کیا وہ ٹین اسکوائر تھیٹا میں تھا  
تو اس کا مطلب ہے کہ یہ سچ ہے اور پھر ہم نے دیکھا کہ یہ سچ ہے جب یا

تو ٹین تھیٹا 0 ہو یا ٹین تھیٹا جڑ 3 ہو یا ٹین تھیٹا مانس روٹ 3 ہو

$\tan \theta$  تھا اور  $\pi$  by 3 جمع  $n\pi$  تو اس کے لیے عمومی حل یہ ترتیب دیا گیا تھا ٹین تھیٹا جڑ 3 کے برابر ہے۔ عمومی حل  
تھا لیکن چونکہ ہمارے پاس ایک ہے یا یہاں ہمیں ان تینوں سیٹوں کا ملاپ لینا ہے  $\pi$  by 3 مانس  $\pi$  کے برابر مانس روٹ 3 کے لیے یہ  
تو یہ آخری آہ ہے۔ اس مثلثی مساوات کا عمومی حل یہ ان تینوں سیٹوں کا ملاپ ہے ہمیں یہاں ایک اور مسئلہ درپیش ہے لیکن یہاں یہ کہا جاتا ہے  
میں تلاش کرنا چاہیں گے جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے۔ یہاں سیریز کی طاقت میں  $\pi$  سے جمع  $\pi$  کی قدریں صرف وقفہ مانس  $x$  کہ ہم  
کے لئے یہ درست ہے کہ  $m$  کا موڈ ہوگا لہذا عام طور پر کسی بھی انٹیجر  $x$  کیوب  $\cos$  دو ہیں لہذا مثال کے طور پر سیریز کا اگلا تیسرا  
کی طاقت میں اضافہ کریں اور اس وجہ سے اس شناخت کو استعمال کرتے ہوئے ہم بائیں  $m$  کے موڈ جیسا ہی ہے۔  $\cos x$  کا موڈ  $\cos mx$   
کے ایک پلس موڈ کے برابر ہے  $\cos x$  ہاتھ کی طرف سے ایکسپوننٹ کو آسان بنانے کی کوشش کریں گے لہذا جو کچھ ہم حاصل کرتے ہیں وہ  
کے موڈ کے کیوب وغیرہ لیکن ہمیں جو احساس ہوتا ہے وہ یہ ہے۔ یہ بنیادی طور پر فارم ون پلس  $\cos x$  کے پورے مربع کے علاوہ  $\cos x$   
سی پلس سی اسکوائر پلس سی کیوب وغیرہ کی ایک بندسی پیشرفت ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ لامحدود طویل بندسی پیشرفت ایک سے زیادہ مانس  
سختی سے ایک سے کم ہے  $c$  سی کی قدر میں بدل جائے گی اگر اور صرف اس صورت میں جب اور صرف اس صورت میں جب ماڈیولس  
کا  $x$  کے ماڈیولس کے برابر ہے موازنہ کے لحاظ سے ہمیں بتایا گیا ہے کہ  $ah$   $c \cos x$  تو آئیے اس نتیجے کو یہاں استعمال کریں یقیناً  
ایک ہو سکتا ہے جو کہ  $c$  سے اس لیے اس کھلے وقفے میں صرف ایک جگہ جہاں  $\pi$  سے جمع  $\pi$  تعلق کھلے وقفے سے ہونا چاہیے مانس  
صفر کے برابر  $x$  کے برابر صفر کے ساتھ یہ ترتیب بہر حال آپس میں نہیں بدلے گی اور اس لئے  $x$  صفر کے برابر ہو لیکن اس طرح  $x$  جب  
کے  $x$  سے ہے یہ ترتیب  $\pi$  سے پلس  $\pi$  کا تعلق مانس  $x$  کے برابر نہیں صفر اور  $x$  بہر حال اس مساوات کا حل نہیں ہو سکتا لیکن  
کوسائن کے ایک پر ایک مانس ماڈیولس کی قدر میں بدل جائے گی اور اس وجہ سے آخر کار ہمارے پاس مثلثی مساوات دو کی طاقت سے ایک پر ایک  
کا ایک مانس ماڈیولس نصف کے برابر  $x$  کے  $\cos$  کا چار کے برابر ہے جس کا مطلب ہے کہ  $\cos x$  کے  $x$  مانس ماڈیولس کے برابر ہے۔  
کا ماڈیولس نصف کے برابر ہونا چاہئے  $\cos$  کے  $x$  ہونا چاہئے جو کہ

تو اب ہمارے یہاں دو صورتیں ہیں یا

مانس نصف کے برابر ہے اور اس مساوات کا عمومی حل اس مساوات کے لیے سیٹ کیے گئے  $\cos x$  نصف کے برابر ہے یا  $\cos x$  تو  
کا  $n\pi$  کے لیے نصف عمومی حل کے لیے  $\cos x$  عمومی حل اور اس مساوات کے لیے سیٹ کیے گئے عمومی محلول کا اتحاد ہو گا، لہذا  
برابر  $\cos x$  ہے لہذا ہمارے پاس  $\pi$  by three کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جو  $\cos$  سیٹ ہو گا۔ کیونکہ نصف کو ساٹھ ڈگری کے  
ہے  $\cos y$

اس لیے پہلے فارمولیشن کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں دکھایا گیا ہے کہ  $\pi$  by three برابر  $y$  کے ساتھ  $\cos y$  برابر  $\cos x$  تو  
سے  $\pi$  جمع مانس  $n\pi$  ہے لہذا ہمارے پاس دو  $y$  پلس مانس  $n\pi$  کے برابر ہے دو  $\cos \phi$  کا عام حل  $\cos x$  عمومی حل کیا  
عمومی حل ہے ویں کے لئے طے شدہ حل کے  $ah$  کے لئے مقرر کردہ  $\cos x$  عددی ہوں گے لہذا یہ آدھے کے برابر پہلی شرط  $n$  زیادہ 3  
مانس نصف ہے اور اس  $\cos$  of two  $\pi$  by three مانس نصف کے برابر ہے ہم جانتے ہیں کہ  $\cos x$  دوسری شرط  $e$  ساتھ اتحاد  
 $\cos$  two  $\pi$  by three مساوی  $\cos x$  وجہ سے ہمارے پاس یہ مساوات ہے

ہوگی  $\pi$  by three integer  $n$  جمع مانس دو  $n\pi$  تو اس کے لیے حل عام حل مقرر کیا گیا ہے۔ دوسری مساوات دو  
تو حتمی جواب یہ ہے کہ اس مثلثی مساوات کا عمومی حل ان دو سیٹوں کا ملاپ ہے لیکن اگر ہمیں یاد ہے کہ سوال میں کیا پوچھا گیا تھا وہ ہمیں  
کے تمام حل تلاش کرنے چاہئیں لہذا ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے  $x$  کے درمیان  $\pi$  سے پلس  $\pi$  تھا۔ عام حل لیکن ہم سے کہا گیا کہ ہمیں مانس  
کی حد میں آتے ہیں اور یہ دیکھنا بہت آسان ہے لہذا میں کروں گا یہاں حل کو دوبارہ لکھیں  $\pi$  سے پلس  $\pi$  کہ یہاں کون سے حل مانس  
تو یہ فائنل تھا

میں بڑا حل تلاش کرنا ہے  $\pi$  سے پلس  $\pi$  تو یہ عمومی حل سیٹ تھا اور اس میں سے ہمیں کھلے وقفہ مانس

$\pi$  by three  $n$  plus لیتے ہیں۔ پہلے والے میں ہمیں دو حل ملتے ہیں مانس  $n$  تو یہاں مثال کے طور پر اگر ہم یہاں صفر کے برابر  
برابر ایک کے لیں  $n$  کے وقفہ میں ہیں اگر ہم  $\pi$  to Plus  $\pi$  اور وہ دونوں  $\pi$  by three

سے  $y$  ٹو پلس  $\pi$  اسی طرح اگر ہم مانس ون کے برابر دوبارہ لیتے ہیں ہم وقفہ مانس  $\pi$  سے پلس  $\pi$  تو ہم اس وقفہ سے باہر ہیں مانس  
جنرل حل کو دیکھتے ہیں  $ah$  میں موجود ہیں اور پھر ہم یہاں دوسرے  $\pi$  ٹو پلس  $\pi$  باہر ہیں لہذا یہاں سے صرف دو حل ہیں جو وقفہ مانس

ملے گا اور  $\pi$  by three اور  $\pi$  by three کے برابر صفر کے لیے ہمیں دو  $n$  ہے لہذا یہاں  $\pi$  تو معذرت یہ  
جمع ملتا ہے۔ دو پائی  $\pi$  کے برابر ایک کے لیے ہمیں دو  $n$  کے لیے  $\pi$  سے جمع  $\pi$  یہ دونوں اس وقفہ میں ہیں جو وقفہ میں ہیں وہ مانس  
ہائے تھری لیکن یقیناً یہ وقفہ مانس پائی سے پلس پائی کے باہر پڑنے والا ہے دوسرا حل دو پائی مانس ٹو پائی ہائی تھری ہے جو دراصل چار پائی  
نہیں لکھیں گے۔ پہلے  $h$  اور اس لیے ہم اسے  $\pi$  plus  $\pi$  ہائی تین کے برابر ہے اور یہ بھی وقفہ مانس پائی سے باہر ہے۔  
برابر  $n$  کے وقفے میں نہیں پڑے گا اور ایک ہی چیز  $\pi$  ٹو پلس  $\pi$  کے برابر دو کے لیے اور مزید یہاں بھی حل مانس  $n$  تو اور اسی طرح  
مانس ون کے لیے ہو گی اس لیے حتمی جواب یہ ہے کہ مثلث کے حل مساوات  
 $\pi$  by three  $\pi$  by three two  $\pi$  میں واقع ہے یہ چار اقدار مانس  $\pi$  سے پلس  $\pi$  تو یہ مثلثی مساوات جو وقفہ مانس

ایک طاق عدد ہو پھر اگر یہ رشتہ  $m$  ایک بہت ہی دلچسپ آہ مسئلہ ہے اس لیے یہ کہتا ہے کہ  $\pi$  by three مائنس دو  $3n$  by three تمام عدد تمام طاق عدد کے لیے درست ہے  
 اسی طرح 1 3 5 7 9 ہو سکتا ہے  $m$  تو  
 کے لیے تمام طاق عدد کے لیے ہو  $x$  تو یہ کہتا ہے کہ اگر یہ تعلق بر  
 کے لیے مطمئن ہے لیکن  $x$  اور تمام  $m$  اس طرح کہ یہ مساوات تمام طاق عدد 1  $b$  کی قدر تلاش کرنے کی ضرورت ہے۔  $\theta$  اور  $b$  تو ہمیں  
 کو  $\theta$  کے برابر رکھیں  $x$  یہ بہت مشکل معلوم ہو سکتا ہے لیکن ہم یہاں کیا کر سکتے ہیں کہ اگر ہم اس مساوات میں  
 تو پہلے اس کو بڑھا دیں  
 ہے  $fmx$  تو کیا ہم سائن اے حاصل کرتے ہیں  
 صفر ہے  $b$  تو یہاں خلاصہ میں پہلی اصطلاح  
 اور پوری طرح  $x$  دو گناہ مربع  $b$  پھر  $x$  ایک سائن  $b$  سے صفر کی طاقت ایک ہے اگلی اگلی اصطلاح ہے  $x$  صفر ہے سائن  $b$  تو یہ  
 کو صفر کے برابر بدلتے ہیں بائیں ہاتھ کی طرف صفر ہے دائیں ہاتھ کی طرف ان میں سے ہر ایک  $x$  کی طاقت میں اب ہم  $m$  تک  $x$  سائن  
 اصطلاح صفر پر جائے گی  
 صفر کی  $b$  صفر کو پکڑنا چاہیے۔ صفر کے برابر ہے اس لیے ہمیں  $b$  صفر ہے اور اس لیے اسے  $b$  تو جو دائیں ہاتھ کی طرف رہ جائے گا وہ  
 کے لیے مطمئن ہو، اب آئیے ہم  $x$  اور تمام  $m$  کی ایک ایسی قدر تلاش کرنے کی ضرورت ہے کہ یہ ہمیشہ تمام طاق  $b$  قدر مل گئی ہے اب ہمیں  
 کی سائن کے تناسب پر غور کریں۔ اور یہ اس کے برابر ہوگا چونکہ ہم اس  $mx$  کی سائن پر  $x$   
 کے لیے استعمال کرنے جارہے ہیں  $\theta$  is  $\theta$   $b$  توسیع کو دائیں ہاتھ کی طرف  
 کی سائن سے تقسیم کرتے ہیں  $x$  تو یہ وہاں نہیں ہے لہذا ہم اس سب کو  
 $bo$  ملے گا۔ پلس ہی تھری سائن اسکوائر ایکس پورے راستے پر ہی ایم سائن ایم مائنس 1 ایکس تک اور پھر ہم  $x$  دو سائن  $b$  ایک جمع  $b$  تو ہمیں  
 کو لیتے ہیں بائیں ہاتھ کی طرف اور دائیں ہاتھ کی طرف  $x$  پر  $\theta$  کی حد  
 تو جب ہم حد لیتے ہیں  
 تو ہم اس حد کو دونوں پر لیتے ہیں  
 کے برابر ہے اور دائیں  $m$  بائیں طرف اور دائیں ہاتھ کی طرف صفر پر جاتی ہے ہم جانتے ہیں کہ بائیں طرف کی حد ہاتھ کی طرف  $x$  تو حد  
 صفر پر  $x$  مائنس ون کی طاقت پر اس حد میں دیکھیں کہ  $m$  کو  $\sin x$  اور  $x$  مربع  $\sin x$  طرف اگر ہم دیکھیں کہ یہ تمام اصطلاحات  
 جاتا ہے  
 تو وہ صفر پر جاتا ہے  
 صفر صفر ہے  $b$  ہے اور  $m$  ایک کی قدر  $b$  ایک ہے اور اس لیے  $b$  تو کیا باقی رہ جاتا ہے۔ صرف  
 تو اب ہم ایک اور مسئلہ اٹھاتے ہیں لہذا ہمیں اس مثلثی مساوات کے تمام حل یہاں تلاش کرنے ہوں گے  
 ہے لہذا اگر ہم  $x$  مربع  $\cos$  ہے سوائے پہلی اصطلاح میں ہمارے پاس  $x$  sine تو ہم یہاں جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ ہمارے پاس ہر جگہ  
 کے لحاظ سے بدل دیں  $\sin x$  اسے  
 ہے جو کہ لکھنے کے برابر ہے۔ کیونکہ ہمارے یہاں  $x$  ایک مائنس گناہ مربع  $x$  مربع  $\cos$  میں ایک کثیر الٹائی ملے گا کیونکہ  $x$  تو ہمیں سائن  
 بائیں ہاتھ کی طرف اور دائیں طرف دونوں طرف ہے لہذا  $\cot$  ایک عام فا ہے  $x$  ہے اس لیے گناہ  $x$  اور یہاں گناہ  $x$  ہے یہاں گناہ  $x$  گناہ  
 کے طور پر لکھتے ہیں اس اصطلاح کے لئے مائنس تین صفر کے برابر ہے  $x$  مائنس 2 سائن  $x$  گنا 4 میں 1 مائنس سائن مربع  $x$  ہم اسے سائن  
 کو ایک مائنس دو میں لکھنے کے مترادف ہے۔ سائن ایکس مائنس فور سائن اسکوائر ایکس صفر کے برابر ہے لہذا اس کے صفر  $x$  جو کہ سائن  
 ہونے کے لیے یا  
 برابر صفر کا مطلب یہ ہے کہ یہ صفر کے برابر  $\sin x$  صفر ہونا چاہیے یا مربع بریکٹ میں یہ اصطلاح صفر ہونی چاہیے لیکن  $\sin x$  تو  
 تمام عدد کے لیے عددی عدد ہے اور آئیے اب دیکھتے ہیں کہ  $n$  کی شکل میں ہونا چاہیے جہاں  $n\pi$  کو  $x$  سائن ایکس کا عمومی حل ہے کہ  
 مساوات کو کیسے حل کیا جائے  $ah$  اس مخصوص اصطلاح کی دوسری  
 تو یا  
 تو یہ صفر ہے یا یہ صفر ہے  
 مائنس ایک صفر کے برابر ہے لیکن یہ  $x$  جمع دو سائن  $x$  فیکٹر کے لیے ہاتھ کی طرف ہمارے پاس چار سائن مربع  $ah$  تو بائیں جانب دوسرے  
 مائنس ٹو پلس مائنس مربع جڑ چار جمع سولہ ضرب اٹھ کے برابر ہے تاکہ یہ  $\sin x$  میں ایک چوکور مساوات ہے لہذا حل یہ ہیں کہ  $\sin x$   
 ہے  
 یہاں  $olutions$  تو دو وہاں دو آہ س ہیں۔  
 تو ایک ہے مائنس ون مائنس روٹ پانچ اوور فور اور دوسرا حل ہے روٹ پانچ مائنس ایک اوور فور اب ہم جانتے ہیں کہ یہ اٹھارہ ڈگری کے سائن  
 کے سوا کچھ نہیں ہے اگر آپ کو یاد ہو کہ اٹھارہ ڈگری کی سائن روٹ پانچ منفی ایک اوور چار تھی  
 تو یہ دس سے زیادہ پائی کا سائن ہے اور ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ چوپین ڈگری کا سائن جو کہ تین پائی کے اوپر دس سائن ہے پانچ چار ڈگری کا  
 جڑ پانچ جمع ایک اوور چار ہے اور اس لیے یہ بالکل اس کے منفی کے برابر ہے اور اس لیے ہم یہاں یہاں سے مائنس تھری پائی کے سائن آف ٹین  
 کو لکھ سکتے ہیں  
 تو یہاں سے اس مساوات کو رکھنے کے لیے ہمیں یا  
 تو سائن ایکس برابر سائن پائی پائی ٹین ہونا چاہیے  
 $\pi$  by 10  $n$  گنا کی طاقت  $n$  جمع مائنس 1 سے  $\pi$  ہے۔  $n$  کی شکل ہے اور اس لیے یہاں عمومی حل  $\sin y$  برابر  $\sin x$  تو یہ  
 یہ بھی ایک ہی شکل ہے  $\pi$  by 10  $n$  جمع مائنس 3 سے  $\pi$  برابر  $\sin x$  اسٹیج ہونے کے بعد اور پھر دوسری مساوات کے لیے  
 $\pi$  by 10  $n$  کی طاقت سے مائنس 3 جمع مائنس 1 سے  $\pi$  اس کے لیے حل بھی  $s$  اور اس لیے جنرل  $\sin y$  برابر  $\sin x$   
 ہو گا لیکن اگر ہم اصل مسئلے کی طرف واپس جائیں  $integer\ z$   
 تو ہمیں اس مساوات کا حل تلاش کرنا پڑا اور ہم نے اسے اس طرح اخذ کیا  
 تو یہ بائیں ہاتھ کی طرف ہے ان دو عوامل کا ایک عامل ہے  
 تو یا  
 یہ حل سیٹ ہے اور اس دوسرے فیکٹر کے صفر ہونے کے  $ah$  کے صفر ہونے کے لیے  $\sin x$  صفر ہے یا یہ عنصر صفر ہے  $\sin x$  تو  
 لیے ہم نے دیکھا کہ یا  
 ایسا ہونا چاہیے  $ah$  تو  
 جمع  $n\pi$  تو ہم نے دیکھا کہ دوسرا حل سیٹ ان دو سیٹوں کے اتحاد کے سوا کچھ نہیں ہے اور اس لئے حتمی جواب یہ ہے کہ یہ سیٹ یونین

کی طاقت میں مائنس تھری n جمع مائنس ون ہے۔ n pi ہونے کی وجہ سے انٹیجرز یونین n کی طاقت سے زیادہ دس n pi مائنس 1 سے عددی عدد ہونے کے ناطے یہ اس مثلثی مساوات کا عمومی حل ہے اگلی کلاس میں ہم کچھ مزید مثلثی مساوا n سے دس بار پھر pi توں کے کچھ مزید حل پر بات کریں گے تب تک آپ کا شکریہ

Prutor@iitk