त्रिकोणमितीय फंक्शन्सच्या सहाव्या व्याख्यानात आपले स्वागत आहे मागील लेक्चरमध्ये आम्ही त्रिकोणमितीय समीकरणे सादर केली होती आणि आम्ही काही प्रकारच्या समीकरणांसाठी तत्त्व समाधाने आणि सामान्य समाधानांवर चर्चा केली उदाहरणार्थ समीकरणे या व्याख्यानामध्ये जेथे sin x बरोबर sin y आहे तसेच
cos x समान cos y बरोबर tan x आणि tan x बरोबर tan y जर cos x cos y च्या समान असेल तर आम्ही समान प्रकारच्या समीकरणांच्या सामान्य समाधानांवर चर्चा करू, म्हणून आम्ही फॉर्मची त्रिकोणमितीय समीकरणे सोडवण्याचा प्रयत्न करत आहोत तर सांगूया.
कारण cos x बरोबर अर्धा आहे आणि आम्हाला cos x बरोबर अर्ध्याचे सर्व उपाय शोधण्यात स्वारस्य आहे, म्हणून आम्हाला समजले की cos x बरोबर आता अर्धा म्हणजे साठ अंशाच्या cos च्या बरोबरीचा आहे जो pi बाय तीन आहे म्हणून आपल्याकडे y बरोबर आहे pi येथे तीन बाय तीन आणि नंतर आपल्याला या समीकरणाचे सर्वसाधारण समाधान शोधायचे आहे, त्या दिशेने आपण काही निकालांवर चर्चा करू आणि सामान्य समाधान कसे शोधायचे ते पाहू, म्हणून आपण प्रथम दाखवू की cos x cos y च्या बरोबरीचे असल्यास मग हे खरे असले पाहिजे की x हे एकतर 2 n pi अधिक y च्या बरोबरीचे आहे किंवा x काही पूर्णांक n साठी 2 n pi वजा y आहे त्याचप्रमाणे आपण हे देखील दर्शवू की सर्व पूर्णांक n साठी तुम्ही कोणतेही पूर्णांक n घ्याल तर दोन n च्या cos.
pi अधिक y हे दोन n pi उणे y च्या cos च्या बरोबरीचे आहे जे cos च्या y च्या बरोबरीचे देखील आहे म्हणून हे दोघे आम्हाला cos x समान प्रकारच्या समीकरणांचे सामान्य समीकरण शोधण्यात मदत करतील म्हणून आपण प्रारंभ करू ते दाखवून म्हणून आपल्याला हे दाखवावे लागेल की दोन n pi अधिक y ची cos दोन n pi च्या cos बरोबर आहे वजा y कोणत्याही पूर्णांक n साठी cos y बरोबर आहे , म्हणून अर्थातच येथे नमुना a प्लस b चा cos आहे
जेथे a आहे n pi आणि b y आहे
त्यामुळे हे आपल्या मागील लेक्चर्सवरून कळते की हे cos a cos b उणे sin a sin b च्या बरोबरीचे आहे
त्यामुळे आपण जे मिळवतो ते cos of two n pi अधिक y हे cos of two n pi आहे.
a समान दोन n pi आणि b समान y म्हणून cos y वजा साइन ऑफ दोन n pi गुणिले y च्या sine पण आम्हाला माहित आहे की कोणत्याही पूर्णांक गुणा pi
so s ची साइन pi चा पूर्णांक गुणाकाराचा ine शून्य आहे
त्यामुळे ही संज्ञा शून्यावर जाते
त्यामुळे जे उरते ते फक्त पहिले पद आहे आणि आपल्याला हे देखील माहित आहे की दोन pi च्या पूर्णांक गुणाकाराची cos समान असते म्हणून कोणत्याही पूर्णांकासाठी n cos of two n pi नेहमी असते एक बरोबर आहे म्हणून हे खरोखर y च्या cos च्या बरोबरीचे आहे
आणि त्याचप्रमाणे cos of two n pi वजा y बरोबर आहे, म्हणून येथे आपण cos a वजा b is cos a cos b अधिक sin a sin b हे सूत्र वापरू
त्यामुळे हे cos च्या बरोबरीचे होईल दोन n pi मध्ये cos y अधिक sine दोन n pi मध्ये sin y पुन्हा हे पद शून्य आहे जे आपण आधी पाहिले आहे आणि cos दोन n pi कोणत्याही पूर्णांक n साठी एक आहे म्हणून हे देखील y च्या cos च्या समान आहे
म्हणून आम्ही दाखवले आहे की cos दोन n pi अधिक y हे cos दोन च्या बरोबरीचे आहे आणि pi उणे y कोणत्याही पूर्णांकासाठी cos च्या y च्या बरोबरीचे आहे आता आपण उलट दाखवतो की समजा आपल्याला cos x आणि cos y समान दिले तर आपण संबंध पाहण्याचा प्रयत्न करू xn च्या दरम्यान म्हणजे यावरून आपल्याला cos x उणे cos y शून्य मिळतात आता हे cos a वजा cos b या पॅटर्नचे आहे आणि जे आपण आपल्या मागील लेक्चर्समधून शोधून काढू शकू
त्यामुळे आपण येथे वापरणार आहोत ते सूत्र cos of a वजा cos of b च्या बरोबरीचे आहे cos a वजा cos b च्या बरोबरीने b च्या sine मध्ये दोन वजा a over दोन मध्ये b च्या sine plus a over two म्हणून आपण हे सूत्र येथे x आणि b बरोबर y बरोबर वापरू,
त्यामुळे आपल्याला cos x उणे cos y समान शून्य
ते y च्या दोन पट साइन लिहिण्यासारखेच आहे वजा x दोन वरील y ची साइन मध्ये y अधिक x दोन पेक्षा जास्त म्हणजे शून्य समान आहे परंतु याचा अर्थ असा होतो की एकतर y वजा x दोन वरील साइन शून्य आहे किंवा y अधिक x दोन वरील साइन शून्य आहे आपण ते आणखी पुढे नेतो म्हणून आपण पहिल्यापासून सुरुवात करतो आपण आता व्युत्पन्न केलेली स्थिती म्हणजे
y वजा x 2 ची sine बरोबर 0 चा अर्थ असा होतो की x वजा y ची 2 वरील सायन देखील 0 आहे कारण वजा x ची साइन वजा sin x प्रमाणे आहे आणि आम्हाला हा परिणाम माहित आहे की sin theta बरोबर आहे शून्याचा अर्थ असा आहे की थीटा n गुणा pi या स्वरूपाचा आहे जेथे n काही पूर्णांक आहे म्हणून हे राज्य nt चा अर्थ असा आहे की x उणे y वरील दोन
हे काही पूर्णांक n साठी n गुणिले pi बरोबर असले पाहिजे आणि नंतर हे सोपे करून आपल्याला जे मिळते ते म्हणजे x हे काही पूर्णांक n साठी 2 n pi अधिक y इतके आहे म्हणून ही पहिली अट होती आणि नंतर दुसरी अट अशी होती की x अधिक y वरील दोन ची साइन शून्याच्या बरोबरीची आहे, म्हणून आपण हे देखील तपासूया की
x अधिक y वरील दोन ची शून्य बरोबरी म्हणजे x अधिक y वरील दोन काहींसाठी pi च्या पूर्णांक गुणाकाराच्या समान आहेत.
पूर्णांक n आणि इथून आपल्याला समजले की x हे दोन n pi वजा y च्या बरोबरीचे आहे काहींसाठी हे n आहेत म्हणून आम्ही हे दर्शविले आहे की जर cos x cos y च्या बरोबर असेल तर याचा अर्थ असा होतो की या दोनपैकी कोणतीही एक स्थिती यासाठी आता धरली पाहिजे हे ठेवण्यासाठी पहिल्या अटीचा अर्थ असा होतो की x हे काही पूर्णांक n साठी दोन n pi प्लस बाय फॉर्मचे असले पाहिजे आणि ही अट सांगते की x हा

काही पूर्णांक n साठी दोन n pi वजा y फॉर्म असावा आणि म्हणून आपल्याला cos x समान दिसते कारण x हे दोन n pi अधिक असल्यासच खरे आहे काही पूर्णांक n साठी y किंवा काही पूर्णांक n साठी ते दोन n pi वजा y आहे म्हणून या दोनपैकी एक केस म्हणून येथे cos x समान अर्धा उणे सह एक लहान उदाहरण आहे आणि आपल्याला माहित आहे की दोन pi बाय तीन चा ah cos वजा अर्धा आहे cos x बरोबर cos y जे आपण आत्ताच पाहिले आहे जेथे y समान दोन pi बाय तीन आहे आणि म्हणून सामान्य समाधान x समान दोन n pi अधिक n वजा दोन्ही pi बाय तीन आहे, कारण तुम्हाला आठवत असेल तर आम्ही असे म्हटले होते कोणतेही पूर्णांक n आम्ही सिद्ध केले होते की दोन n pi अधिक y चा cos समान आहे cos y दोन n pi वजा y बरोबर cos y आहे म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की या स्वरूपातील x ची सर्व मूल्ये जेथे n पूर्णांक आहे म्हणून हे cos x समान r वजा r या समीकरणाचे सामान्य समाधान बनते उदाहरणार्थ n समान शून्य बरोबर ठेवले तर आपल्याला शून्य गुणिले pi अधिक वजा दोन pi बाय तीन मिळतील

त्यामुळे येथे दोन सोल्यूशन मिळतील दोन pi बाय तीन आणि उणे दोन pi बाय तीन बरोबर n बरोबर एक आपल्याला पुन्हा दोन सोल्यूशन्स मिळतात दोन pi अधिक दोन pi बाय तीन आणि दोन pi वजा tw o pi by थ्री आणि उणे एक सह आपल्याला उणे दोन pi अधिक दोन pi बाय तीन आणि उणे दोन pi वजा दोन pi बाय तीन असे समाधान मिळते आणि आपण असेच पुढे चालू ठेवू शकतो आणि हे सर्व या समीकरणाचे निराकरण आहेत cos x समान वजा अर्धा म्हणून चिन्ह x समान चिन्ह y आणि cos x समान y cos y देखील tan x समान tan y या स्वरूपाच्या कोणत्याही त्रिकोणमितीय समीकरणाचे सामान्य ah समाधान मिळविण्याचा प्रयत्न करेल अर्थातच येथे x आणि y दोन्ही नसावेत pi चा सर्व गुणाकार दोन बाय दोन असू द्या कारण pi च्या विषम गुणाकाराचा tan हा परिमित नसतो म्हणून आम्ही दाखवू की जर tan x tan y च्या बरोबरीचा असेल तर x हा pi काही पूर्णांक गुणाकाराच्या पूर्णांक गुणाकाराच्या बरोबरीचा असायला हवा.

दुसरीकडे कोणत्याही पूर्णांक n साठी pi अधिक y चा tan आपण दाखवू शकतो की n pi अधिक y चा टॅन tan y सारखा आहे आणि हे पाहणे फार कठीण नाही कारण मागील व्याख्यानात आपण पाहिले होते की y चा टॅन नियतकालिक आहे x चे फंक्शन टॅनचे pi अधिक x हे दोन pi अधिक x च्या tan सारखे आहे आणि पुढे असे असले तरी तरीही आपण ते येथे सिद्ध करू म्हणजे n pi plus y चा tan बरोबर आहे म्हणून हे a Plus b चे tan आहे आणि आपल्याला tan a plus b चे सूत्र माहित आहे ते tan a plus tan b by one आहे वजा tan a tan b म्हणून इथे वापरून n चा टॅन मिळेल n pi अधिक y बरोबर n pi चा tan अधिक y चा tan वर 1 वजा टॅनचा n pi गुणा टॅनचा y येथे n कोणताही पूर्णांक असू शकतो म्हणून n कोणताही पूर्णांक आहे पण साठी कोणताही पूर्णांक n

त्यामुळे कोणत्याही पूर्णांकासाठी n n चा टॅन शून्य असतो कारण n pi चा टॅन हा n pi ची sine आहे n pi च्या cos वर आणि n pi ची sine सर्व पूर्णांक n साठी n म्हणून tan n pi शून्य आहे सर्व पूर्णांक n साठी आणि म्हणून हे शून्यावर जाते आणि हे देखील शून्यावर जाते, तर जे उरते ते y च्या टॅनच्या बरोबरीचे होते जे सिद्ध करते की n pi चा tan अधिक y सर्व पूर्णांक n साठी y च्या tan च्या बरोबरीचा आहे आणि मग आपण देखील करू हे उलट विधान दाखवा की जर tan x आणि tan y समान असतील तर ते खरे मानले पाहिजे की x साठी n pi अधिक y समान आहे काही पूर्णांक n म्हणून आपण असे म्हणू की आपल्याकडे tan x tan y च्या बरोबरीचे आहे आणि x आणि y हे pi च्या 2 च्या विषम गुणाकार नाहीत
म्हणून आपल्याला येथून हे मिळते आणि नंतर tan x हा sin x बाय cos x असल्याने आपल्याला sin x मिळेल cos x उणे sin sin y by cos y equals 0 जिथून आपल्याला sine x cos y वजा cos x sine y वर cos x cos y बरोबर शून्य मिळते पण x आणि y नसल्यामुळे किंवा pi चा गुणाकार दोन cos x नाही y चे शून्य आणि cos हे देखील शून्य नाही आणि म्हणून येथे हे विधान sine x cos y वजा cos x sine y च्या बरोबरीचे आहे शून्य पण हा नमुना आपण आधीच पाहिला आहे की हे sine a cos b वजा cos a sine b चे स्वरूप आहे जे एक वजा b च्या sine च्या बरोबरीचे आहे म्हणून हे x उणे y
च्या sine सारखे आहे आणि आम्हाला माहित आहे की theta च्या x वजा sine ची 0 च्या बरोबरीची sine चा अर्थ आहे की theta हा pi च्या काही पूर्णांक गुणाकाराचा काही गुणक असावा म्हणून येथून आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की x उणे y हा pi चा काही पूर्णांक गुणक असला पाहिजे आणि याचा अर्थ x हा n pi अधिक y च्या बरोबरीचा असावा पूर्णांक n साठी आता उर्वरित व्याख्यानात आम्ही काही सोडवण्याचा प्रयत्न करू
आणि काही त्रिकोणमितीय समीकरणांचे सामान्य निराकरण शोधू जे तुम्हाला येऊ शकते, म्हणून येथे हा एक अतिशय सामान्य प्रकारचा त्रिकोणमितीय समीकरण आहे ज्याचा तुम्हाला सामना करावा लागेल.

ab आणि c या वास्तविक संख्या आहेत आणि आम्हाला cos theta अधिक b sin theta c आहे या समीकरणाचे सामान्य समाधान शोधण्यास सांगितले आहे
म्हणून ah सह पुढे जाण्याचा मार्ग म्हणजे आपण डावीकडे आणि उजवीकडे दोन्ही बाजूंना वर्गमूळाने विभाजित करतो.

एक चौरस अधिक b वर्गाचे आणि आता हे दुसरे समीकरण येथे आहे जर तुम्हाला एका वर्गाचे वर्गमूळ अधिक b वर्ग आणि b वर वर्गमूळ अधिक b वर्गाचे वर्गमूळ दिसले तर आपण म्हणूया की आपल्याला काय समजले आहे म्हणजे या पदाचा वर्ग आणि या पदाचा वर्ग एक बरोबर आहे आणि आपण येथे o केंद्रस्थानी एक एकक वर्तुळ काढू आणि म्हणूया की हा तो बिंदू आहे ज्याचा x समन्वय एका वर्गाचे वर्गमूळ अधिक b वर्गाचे वर्गमूळ आहे.

आणि ज्याचा y समन्वय हा चौरस अधिक b वर्गाच्या वर्गमूळावर b आहे आणि अर्थातच हा बिंदू एकक वर्तुळावर आहे आणि या किरण op साठी रोटेशनचा कोन
घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने पाच अंश आहे

त्यामुळे येथे हा phi आहे म्हणून चला चला आता या काटकोन त्रिकोणावर लक्ष केंद्रित करा जो मी आता या काटकोन त्रिकोणामध्ये

कोसाइन आणि साइनच्या व्याख्येवरून काढत आहे की आपल्याकडे जे आहे ते म्हणजे cos phi या बिंदूच्या x घटकाच्या बरोबरीचे असेल जे एक वर वर्गमूळ आहे.

एक चौरस अधिक b वर्ग आणि sin phi हा या बिंदूचा y समन्वय असेल जो चौरस अधिक b वर्गाच्या वर्गमूळावर b आहे आता हे तथ्य वापरून त्रिकोणमितीय समीकरणात आपल्याला cos phi हे प्राप्त झाले आहे म्हणून आता phi हा कोन शोधा phi हे आपल्यासाठी पूर्णपणे ज्ञात आहे cos phi टू cos theta अधिक sine phi मधील sin theta हे c वरील वर्गमूळ अधिक b चौरसाच्या समान आहे परंतु जर तुम्हाला ही अभिव्यक्ती डाव्या हाताला दिसली तर ती cos a cos या स्वरूपाची आहे b अधिक sin a sin b आणि म्हणून ते थीटाच्या cos बरोबर आहे वजा phi बरोबर c चा वर्गमूळ अधिक b वर्गाच्या वर्गमूळावर आणि म्हणून हे त्रिकोणमितीय समीकरण आहे ज्यासाठी आम्हाला थीटाचे निराकरण शोधण्यास सांगितले जाते आता आपण काय पाहतो इथे डाव्या बाजूला थीटा मायनस फी चा कोसाइन आहे आणि आम्हाला माहित आहे की कोसाइन फंक्शनची रेंज मायनस वन आणि प्लस वन दरम्यान आहे आणि जर ती उजव्या बाजूला समान असली पाहिजे तर ती मोड खरी मानली पाहिजे.

चौरस अधिक b वर्गाच्या वर्गमूळावर c पेक्षा कमी असणे आवश्यक आहे म्हणून या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे समाधान अस्तित्वात असेल जर आणि फक्त ही स्थिती समाधानी असेल तरच ही स्थिती समाधानी असेल तरच आपल्याला यावर उपाय मिळेल का? हे त्रिकोणमितीय समीकरण नाहीतर या त्रिकोणमितीय समीकरणावर कोणताही उपाय नाही आता आपण असे गृहीत धरू की ही स्थिती समाधानी आहे, अशा परिस्थितीत आपल्याला फक्त काय करायचे आहे आपण असे म्हणू की आपण पुन्हा परत जाऊ या, जर हे असेल तर स्थिती समाधानी आहे, मग आपण मूलत: मागे जाऊन हे c वर लिहू कारण जर ते मूळच्या बरोबरीने कमी असेल किंवा जर ते एका पेक्षा कमी असेल तर हे काही कोन y च्या cos बरोबर असले पाहिजे आणि नंतर आपण जे वापरु ते आपण वापरू.

मागील स्लाईड्सपैकी काही मध्ये अभ्यास केला आहे जिथे आम्ही म्हटले होते की कोणत्याही पूर्णांकासाठी n cos of two n pi अधिक y समान आहे cos of two n pi उणे y हे cos y सारखेच आहे

त्यामुळे येथे cos सारखे समान समीकरण आहे x बरोबर cos y आहे म्हणून आपल्याला ही संपूर्ण गोष्ट x मानावी लागेल आणि म्हणून सामान्य उपाय असा आहे की x जो theta वजा phi आहे तो z च्या मालकीच्या सर्व पूर्णांक n साठी दोन n pi अधिक वजा y आहे.

so z चा संच हा पूर्णांकांचा संच आहे आणि म्हणून theta साठी अंतिम सामान्य समाधान phi अधिक 2 n pi अधिक वजा y आहे जेथे n एक पूर्णांक आहे म्हणून हे या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे सामान्य समाधान आहे परंतु हे सामान्य ah समाधान आहे ही अट असेल तरच अस्तित्वात असेल आयशन वैध आहे किंवा ते धरून आहे आता आपण दुसऱ्या समस्येवर चर्चा करूया म्हणून येथे आपल्याला आता शोधण्यास सांगितले आहे, जर आपणास आता दोन चल आहेत असे दिसले तर आपण आतापर्यंत जे अभ्यास करत आहोत ते समीकरण त्रिकोणमितीय समीकरणे सोडवण्यासाठी होते जिथे आपल्याकडे फक्त एक चल आहे.

सुरुवातीला हे खूप कठीण वाटू शकते परंतु नंतर आपण काय करू शकतो ते म्हणजे आपण काही अह प्रतिस्थापन करू शकतो आणि नंतर समाधान मिळवू शकतो म्हणून आपल्याला विचारले पाहिजे की आपल्याला या समीकरणांच्या प्रणालीचा सोल्यूशन सेट शोधावा लागेल म्हणून आता आपण जे पाहतो ते ते आहे येथे पहिले समीकरण आपण लिहू शकतो की y हे दोन pi बाय तीन वजा x बरोबर आहे आणि आपण दुसऱ्या समीकरणात y चे हे मूल्य बदलू

त्यामुळे आता दुसरे समीकरण x ची cos अधिक cos of two pi by three उणे x बरोबर तीन ओव्हर आहे दोन म्हणून शेवटी या प्रतिस्थापनाच्या मदतीने आपल्याला शेवटी एक त्रिकोणमितीय समीकरण x एक व्हेरिएबलमध्ये मिळते आणि आपण ते सोडवू शकू की आणखी पुढे जाताना आपल्याकडे cos x आहे अधिक आपल्याकडे cos दोन pi बाय तीन वजा x होते म्हणून आपण वापरतो cos a वजा b फॉर्म्युला आणि आपण cos two pi बाय तीन cos x अधिक sine दोन pi बाय तीन sine x बरोबर तीन बाय दोन असे लिहितो पण cos दोन pi बाय तीन म्हणजे उणे अर्धा म्हणजे cos x उणे अर्धा cos x आणि sin 2 pi by 3 हे 120 अंशांचे sine आहे जेणेकरुन ते 3 च्या वर्गमूळाच्या 2 पेक्षा जास्त 2 पट sine x बरोबर 3 पेक्षा 2 आणि नंतर पुढील सरलीकरण काही सरलीकरण आपल्याला अर्धा cos x अधिक रूट तीन sin x समान c by दोन देते r आणि आपल्याला माहित आहे की अर्धा cos by pi चा cos साठ अंश आहे जो pi बाय तीन आहे आणि हा pi चा sine by three आहे

त्यामुळे आपल्याला cos a cos x अधिक sin a sin x असे स्वरूप मिळेल म्हणून आपण डावीकडे लिहू cos of pi 3 मध्ये cos x अधिक रूट 3 क्षमस्व या ऐवजी आपण sine pi by 3 मध्ये sine x बरोबर असे लिहितो

त्यामुळे आतापर्यंत हे आमचे त्रिकोणमितीय समीकरण आहे परंतु हे cos a cos b अधिक sin a sin b असे आहे जे एक वजा b चे cos आहे

त्यामुळे शेवटी x उणे pi चा cos by three समान तीन ओव्हर दोन आहे पण आम्हाला ठाऊक आहे t कोसाइन फंक्शन वजा एक ते अधिक एक या श्रेणीपर्यंत मर्यादित आहे आणि म्हणून ah चा कोसाइन कधीही तीन बाय दोन असू शकत नाही आणि म्हणून समीकरणांच्या या संचाला कोणतेही समाधान नाही म्हणून अंतिम उत्तर असे आहे की कोणतेही समाधान नाही आपण येथे दुसरा प्रश्न पाहू या म्हणजे आपल्याला या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे सामान्य समाधान शोधण्यास सांगितले आहे आणि जर आपण हे पाहिले तर डाव्या हाताची बाजू ही सिन थीटामध्ये चतुर्भुज आहे म्हणून जर आपण z समान सिन थीटा घेतले तर आपल्याला द्विघात मिळेल समीकरण दोन z वर्ग वजा तीन z वजा दोन समान शून्य समीकरण येथे z द्वारे दिले जाईल तीन अधिक वजा वर्गमूळ नऊ अधिक चार मध्ये दोन मध्ये दोन जे सोळा आहे दोन गुणिले दोन हे चार आहे

त्यामुळे दोन मुळे तीन आहेत अधिक वजा पाच बाय चार पण आपण पाहतो की जर आपण मूळ ah तीन अधिक पाच वर चार तीन अधिक पाच अधिक चार घेतले तर दोन आहे परंतु z हे काही कोनाच्या चिन्हासारखे आहे आणि म्हणून ते दोन असू शकत नाही म्हणून समाधान z बरोबर दोन हे व्यवहार्य समाधान नाही

त्यामुळे फक्त दुसरे समाधान जे उरते ते z म्हणजे तीन वजा पाच पेक्षा चार जे उणे अर्ध्या बरोबर आहे
त्यामुळे मूलत: या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे समाधान म्हणजे वजा समान सिन थीटाचे समाधान आहे अर्धा म्हणून आपल्याकडे sin theta समान उणे अर्धा आहे म्हणून आपल्याला ही ओळख माहित आहे की pi अधिक x ची sine sine a cos b असेल zero plus cos a sine b असेल
त्यामुळे ती sine x चे वजा असेल
त्यामुळे ही ओळख ज्ञात आहे आपल्यासाठी आणि जर आपण x च्या ऐवजी pi 6 च्या बरोबरीने बदलले तर येथे आपल्याला 7 pi ची sine ची sine by 6 ची sine of pi ची sine by six आणि pi ची sine ची sine ची 6 च्या बरोबरी आहे, त्यामुळे हे उणे अर्धे आहे म्हणून आपण करू शकतो.
असे लिहा की sin theta ही sine of seven pi by six आहे
त्यामुळे आपल्याला sine
pi सात pi by six च्या बरोबरीने sine theta चा सामान्य उपाय शोधून काढावा लागेल आणि हे आपण आधीच्या लेक्चरमध्ये अभ्यासले आहे, जर तुम्हाला आठवत असेल तर आम्ही सांगितले होते की sin x बरोबरीचे सामान्य समाधान sin y हे आहे की x हे n pi अधिक वजा 1 च्या घात n गुणिले y सर्वांसाठी आहे जेथे n सर्व पूर्णांकांसाठी काही पूर्णांक आहेत n म्हणून आता हा उपाय आहे फक्त एकच गोष्ट आहे की येथे x थीटा आहे आणि y सात आहे pi by six म्हणून अंतिम उत्तर असे आहे की या समीकरणाचे सर्वसाधारण समाधान म्हणजे theta समान n pi अधिक वजा 1 ते n गुणिले y ची घात 7 pi बाय 6 आहे सर्व पूर्णांकांसाठी n
त्यामुळे येथे आपल्याला दुसरी समस्या आहे जिथे आपल्याला आवडेल या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे सामान्य समाधान शोधण्यासाठी येथे आपण हे टॅन स्क्वेअर थीटा अधिक दोन थीटाचे सेकंट असे लिहितो कारण x चा सेकंट x च्या एक ओव्हर कोसाइन आहे म्हणून हा एक ओव्हर कॉस टू थीटा आहे परंतु आम्हाला माहित आहे की cos दोन थीटा कॉस स्क्वेअर थीटा वजा सायन स्क्वेअर थीटा आहे हे देखील आम्हाला माहित आहे की येथे एक अंक कॉस स्क्वेअर थीटा अधिक सिन स्क्वेअर थीटा ने बदलला जाऊ शकतो म्हणून मी हा प्रकार बदलण्याचे कारण आहे कारण मला ही संपूर्ण डाव्या हाताची बाजू हवी आहे टॅन थिटा म्हणून की मला काही प्रकारचे द्विघात समीकरण किंवा असे काहीतरी मिळते जे मी सोडवू शकेन आणि नंतर सामान्य समाधान मिळवू शकेन, मग
आपल्याकडे पुढे काय आहे कॉस स्क्वेअर थीटा अधिक साइन स्क्वेअर थीटा एक आहे म्हणून अंश हा कॉस स्क्वेअर थीटा ने भागला जातो वजा सायन स्क्वेअर थीटा एक बरोबर आहे आणि नंतर जर तुम्ही कॉस स्क्वेअर थीटासह अंक आणि भाजक दोन्ही भागवले तर आपल्याला शेवटी एक अधिक टॅन स्क्वेअर थीटा एकापेक्षा एक वजा टॅन स्क्वेअर थीटा समान मिळते म्हणून आम्हाला पर्याय का करावा लागला याचे कारण आहे कॉस स्क्वेअर थीटा अधिक सिन स्क्वेअर थीटा असलेला हा एक होता की मला ही डाव्या हाताची संपूर्ण बाजू टॅन थीटाच्या संदर्भात हवी होती आणि नंतर आपल्याला जे मिळते ते म्हणजे टॅन स्क्वेअर थीटा गुणिले एक वजा टॅन स्क्वेअर थीटा अधिक एक अधिक टॅन स्क्वेअर थीटा समान एक वजा टॅन स्क्वेअर थीटा म्हणजे या समीकरणात तुम्ही डाव्या हाताची बाजू आणि उजवी बाजू दोन्ही बाजूंना एक वजा टॅन स्क्वेअर थीटाने गुणाकारता आणि हेच तुम्हाला मिळेल ng म्हणून जर आपण हे ब्रेसेस उघडले तर आपल्याला जे मिळते ते डाव्या बाजूला आपल्याला मिळते 2 टॅन स्क्वेअर थीटा अधिक 1 वजा टॅन 4 थीटा समान 1 वजा टाइम स्क्वेअर थीटा आणि नंतर आपण हे थोडेसे पुनर्रचना केल्यास आपल्याला टॅन 4 मिळेल.
थीटा वजा 3 टॅन स्क्वेअर थीटा शून्य आहे आणि म्हणून आपल्याकडे टॅन स्क्वेअर थीटा आहे टॅन स्क्वेअर थीटा वजा तीन म्हणजे शून्य, तर हे होण्यासाठी एकतर आपल्याकडे थीटाचे टॅन टॅन शून्य बरोबर असले पाहिजे ज्याचा अर्थ असा होतो की थीटा म्हणजे हे टॅन आहे शून्याच्या बरोबरीची थीटा हे टॅन थीटा शून्याच्या स्पर्शिकेच्या बरोबरीचे आहे असे लिहिता येते आणि
त्यामुळे असे सूचित होते की थीटा सर्व पूर्णांक n साठी n pi या स्वरूपाचा आहे म्हणून हे या समीकरणावरून आहे म्हणून एकतर हे घडले पाहिजे किंवा आपल्याकडे tan चौरस थीटा असावा उणे तीन म्हणजे शून्य असणे म्हणजे टॅन थीटा एकतर अधिक मूळ तीन आहे किंवा टॅन थीटा उणे मूळ तीन आहे आता टॅन थीटा मूळ तीनच्या समान आहे परंतु मूळ तीन म्हणजे साठ अंशांच्या टॅनच्या बरोबरीचे आहे जे pi बाय तीन आहे आणि नंतर आपल्याकडे आहे तोच ah फॉर्म ज्याला आपण tan x बरोबर tan y करतो, जर तुम्हाला काही स्लाइड्स आठवत असतील तर आह मागे आम्ही फक्त त्यावर चर्चा करत होतो आणि आम्ही काय म्हटले होते की या प्रकारच्या समीकरणाचे सामान्य समाधान म्हणजे x हे n pi अधिक y च्या समान आहे.
सर्व n पूर्णांकांशी संबंधित आहेत म्हणून हा निकाल वापरून जो आपण आधी सिद्ध केला होता तो वापरून आपल्याला x समान बरोबर theta मिळतो आपल्याला मिळते की theta समान n pi अधिक pi by 3 आहे आणि त्याचप्रमाणे tan theta साठी वजा रूट 3 च्या बरोबरीने असे लिहिता येते.
वजा pi by 3 चा टॅन म्हणून आणि यासाठी सोल्यूशन सेट n pi वजा pi बाय थ्री च्या समान थेटा असेल
त्यामुळे त्रिकोणमितीय समीकरणाचे अंतिम ah सोल्यूशन
म्हणून येथून आपण बदली केली होती आणि नंतर आपल्याला काय मिळाले ते टॅन स्क्वेअर थीटा मध्ये होते म्हणून हे सूचित होते की हे खरे आहे आणि नंतर आम्ही पाहिले की हे सत्य आहे जेव्हा एकतर टॅन थीटा 0 असेल किंवा टॅन थीटा मूळ 3 असेल किंवा टॅन थीटा उणे रूट 3 असेल तर यासाठी सामान्य समाधान हे सेट केले आहे टॅन थीटा रूट 3 द सामान्य समाधान n pi plus pi by 3 होते आणि tan theta साठी वजा रूट 3 च्या बरोबरीचे pi वजा pi by 3 होते परंतु आपल्याकडे एक असल्याने किंवा येथे आपल्याला या तीनही संचांचे एकत्रीकरण घ्यावे लागेल
त्यामुळे हा अंतिम आह आहे या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे सर्वसाधारण समाधान हे या तिन्ही संचांचे एकत्रीकरण आहे, आम्हाला येथे आणखी एक समस्या आहे, परंतु येथे असे म्हटले आहे की आम्हाला x ची मूल्ये केवळ वजा pi ते अधिक pi या समीकरणात पूर्ण होतील अशा अंतरालमध्ये शोधू इच्छितो.
येथे शृंखलेच्या घात दोन आहेत

त्यामुळे उदाहरणार्थ मालिकेतील पुढील तिसरा cos क्यूब x चा mod असेल
त्यामुळे सर्वसाधारणपणे कोणत्याही पूर्णांक m साठी हे खरे आहे की cos mx चा mod cos x च्या mod सारखाच आहे m च्या घातापर्यंत वाढ करा आणि म्हणून ही ओळख वापरून आपण डाव्या हाताच्या घातांकाला सोपी करण्याचा प्रयत्न करू , म्हणून आपल्याला जे मिळेल ते cos x चा एक अधिक mod चा cos x अधिक mod चा cos x पूर्ण चौरस अधिक mod च्या बरोबर आहे.
क्यूब वगैरे पण आपल्या लक्षात येते ते म्हणजे गु ही मूलत:
एक अधिक c अधिक c चौरस अधिक c घन आणि पुढे फॉर्मची एक भौमितिक प्रगती आहे आणि आम्हाला माहित आहे की ही अमर्याद लांब भौमितीय प्रगती एक पेक्षा एक वजा c या मूल्यात अभिसरण होईल जर आणि फक्त जर आणि फक्त जर आणि फक्त जर मॉड्यूलस असेल तर c हे काटेकोरपणे एका पेक्षा कमी आहे म्हणून आपण येथे हा निकाल वापरू या अर्थात ah c हे cos x च्या मॉड्यूलसच्या बरोबरीचे आहे तुलना करून आपल्याला सांगितले जाते की x हा ओपन इंटरव्हल वजा pi ते अधिक pi चा असावा
त्यामुळे या ओपन इंटरव्हलमध्ये फक्त एक जागा जिथे c हे एक असू शकते जे x च्या बरोबरीचे असते तेव्हा x च्या बरोबरीचे असते पण
त्यामुळे x च्या बरोबरीचे शून्य हा क्रम तरीही अभिसरण होणार नाही आणि म्हणून x समान शून्य हे या समीकरणाचे समाधान असू शकत नाही परंतु x साठी समान नाही शून्य आणि x हे वजा pi ते अधिक pi चा अनुक्रमांक x च्या कोसाइनच्या एक वर एक वजा मोड्यूलसच्या मूल्यात अभिसरण होईल आणि म्हणून शेवटी आपल्याजवळ त्रिकोणमितीय समीकरण दोन ते एक वर एक वजा मोड्यूलसची घात असेल x च्या cos चे बरोबरी चार आहे म्हणजे x च्या cos चे
एक वजा मापांक अर्ध्या
बरोबर असले पाहिजे म्हणजे x च्या cos चे मापांक अर्ध्या सारखे असावे म्हणून आता आपल्या येथे दोन प्रकरणे आहेत एकतर cos x अर्ध्या बरोबर आहे किंवा cos x हे उणे अर्ध्या बरोबर आहे आणि या समीकरणाचे सामान्य समाधान हे या समीकरणासाठी सामान्य सोल्यूशन सेट आणि या समीकरणासाठी सामान्य सोल्यूशनचे एकत्रीकरण असेल
म्हणून cos x साठी अर्ध्या सामान्य सोल्यूशनचा सेट n pi वर सेट असेल कारण अर्धा cos साठ अंशांचा cos म्हणून लिहिला जाऊ शकतो जो pi by 3 आहे
त्यामुळे आपल्याकडे cos x बरोबर cos y आहे cos x cos y बरोबर y बरोबर pi by three आहे म्हणून आधी सूत्रीकरण वापरून आपल्याला दाखवले आहे की सामान्य समाधान cos x साठी cos phi च्या बरोबरीचे सामान्य समाधान दोन n pi अधिक वजा y आहे
त्यामुळे आपल्याकडे दोन n pi अधिक वजा pi वरील 3 n पूर्णांक असेल
त्यामुळे पहिल्या अटी cos x समान अर्ध्यासाठी हे सामान्य समाधान सेट आहे
व्या साठी सेट केलेल्या समाधानासह युनियन e दुसरी अट cos x समान वजा अर्ध्या बरोबर आहे हे आपल्याला माहीत आहे की cos दोन pi by three चे वजा अर्धा आहे आणि म्हणून आपल्याकडे हे समीकरण cos x समान आहे cos two pi by three म्हणून हे समीकरण सामान्य समाधान सेट करते दुसरे समीकरण पूर्णांक n साठी दोन n pi अधिक वजा दोन pi बाय तीन असेल
त्यामुळे अंतिम उत्तर असे आहे की या त्रिकोणमितीय समीकरणाचे सर्वसाधारण समाधान हे या दोन संचाचे एकत्रीकरण आहे परंतु जर आपल्याला आठवत असेल तर प्रश्नात काय विचारले होते ते नव्हते.
सामान्य उपाय पण आम्हाला सांगण्यात आले की आपण x साठी वजा pi ते अधिक pi मधील सर्व उपाय शोधले पाहिजेत म्हणून आपण फक्त येथे कोणते उपाय उणे pi ते अधिक pi या श्रेणीत येतात ते पहावे लागेल आणि ते पाहणे खूप सोपे आहे.
येथे सोल्यूशन्स पुन्हा लिहा म्हणजे हे अंतिम आहे म्हणून हा सामान्य उपाय सेट होता आणि यातून आपल्याला
ओपन इंटरव्हल वजा pi ते अधिक pi मध्ये पडलेले समाधान शोधायचे आहे, म्हणून येथे उदाहरणार्थ आपण शून्य बरोबर n घेतल्यास पहिल्या मध्ये आपल्याला उणे pi बाय तीन n अधिक pi बाय तीन अशी दोन सोल्यूशन्स मिळतात आणि ती दोन्ही सोल्यूशन्स वजा pi ते अधिक pi च्या मध्यांतरात आहेत जर आपण n च्या बरोबरीने घेतले तर आपण त्या अंतराल वजा pi ते अधिक pi अशाच प्रकारे बाहेर आहोत.
आम्ही n समान वजा एक पुन्हा घेतो आम्ही मध्यांतर वजा pi दोन अधिक y च्या बाहेर आहोत
त्यामुळे येथून फक्त दोन उपाय आहेत जे मध्यांतर वजा pi दोन अधिक pi मध्ये आहेत आणि नंतर आम्ही येथे सेट केलेले दुसरे ah सामान्य समाधान पाहतो
त्यामुळे क्षमस्व हा pi आहे तर इथे n च्या बरोबरीच्या शून्यासाठी आपल्याला दोन pi बाय तीन आणि उणे दोन pi बाय तीन मिळतात आणि हे दोन्ही मध्यांतरात आहेत ते मध्यांतरात आहेत वजा pi ते अधिक pi मध्ये n च्या बरोबरीच्या बरोबर आपल्याला दोन pi अधिक मिळेल दोन पाई बाय थ्री पण ते अर्थातच मध्यांतर वजा pi ते अधिक pi च्या बाहेर पडणार आहे दुसरे उपाय म्हणजे दोन pi वजा दोन pi बाय तीन जे प्रत्यक्षात चार pi बाय तीनच्या बरोबरीचे आहे आणि हे देखील मध्यांतर वजा pi टू च्या बाहेर आहे plus pi आणि म्हणून आम्ही ते h लिहिणार नाही पूर्वी असेच आणि त्याचप्रमाणे n समान दोन साठी आणि पुढे देखील येथे समाधान मध्यांतर वजा pi दोन अधिक pi मध्ये पडणार नाही आणि तीच गोष्ट n समान वजा एक साठी धरली जाईल म्हणून अंतिम उत्तर हे आहे की त्रिकोणमितीयचे निराकरण समीकरण म्हणून हे त्रिकोणमितीय समीकरण जे मध्यांतर वजा pi ते अधिक pi r मध्ये आहे ही चार मूल्ये वजा pi बाय तीन pi बाय तीन दोन pi बाय तीन n वजा दोन pi बाय तीन तेथे एक अतिशय मनोरंजक ah समस्या आहे म्हणून ते म्हणतात की m करू द्या एक विषम पूर्णांक असेल तर जर हा संबंध सर्व पूर्णांकांसाठी खरा असेल तर सर्व विषम पूर्णांकांसाठी m 1 3 5 7 9 असू शकतो , तर असे म्हटले आहे की जर हा संबंध प्रत्येक x साठी सर्व विषम पूर्णांकांसाठी असेल तर आपल्याला b चे मूल्य शोधणे आवश्यक आहे.
0 आणि b 1 असे की हे समीकरण सर्व विषम पूर्णांकांसाठी m आणि सर्व x साठी समाधानी आहे परंतु हे खूप कठीण वाटू शकते

परंतु आपण येथे काय करू शकतो की या समीकरणात x बरोबर 0 ठेवल्यास आपण

प्रथम ते विस्तृत करूया म्हणजे काय? आम्हाला साइन ओ आहे fmx ही बेरीजमधील पहिली टर्म b शून्य आहे म्हणून ती b शून्य सायन x ते शून्याची पॉवर एक आहे पुढची टर्म b एक साइन x नंतर b दोन पाप चौरस x आणि सर्व मार्ग bm साइन x पर्यंत m च्या घात आता आपण x ला शून्याच्या बरोबर बदलतो उजव्या बाजूला शून्य आहे यापैकी प्रत्येक पद शून्यावर जाईल

त्यामुळे उजव्या बाजूला जे उरले आहे ते b शून्य आहे आणि म्हणून ते b शून्य धरले पाहिजे शून्याच्या बरोबरीचे आहे म्हणून आपल्याला b शून्याचे मूल्य मिळाले आहे आता आपल्याला b चे मूल्य असे शोधणे आवश्यक आहे की हे सर्व विषम m आणि सर्व x साठी नेहमीच समाधानी असेल आता आपण x च्या साइन पेक्षा mx च्या साइनचे गुणोत्तर विचारात घेऊया

आणि ते समान असेल तेव्हापासून आपण हा विस्तार उजव्या बाजूच्या b 0 आहे 0 साठी वापरणार आहोत म्हणून हे तेथे नाही म्हणून आपण हे सर्व x च्या साइनने विभाजित करतो म्हणजे आपल्याला b एक अधिक b दोन साइन x मिळेल अधिक b तीन साइन स्क्वेअर x सर्व मार्ग bm साइन m उणे 1 x पर्यंत आणि नंतर आपण bo वर x 0 वर जाणारी मर्यादा घेतो डाव्या बाजूला आणि उजव्या बाजूला, म्हणून जेव्हा आपण मर्यादा घेतो तेव्हा आपण ही मर्यादा दोन्हीवर घेतो

त्यामुळे मर्यादा x ही दोन्ही डाव्या बाजूला शून्यावर जाते आणि उजव्या बाजूला आपल्याला माहित आहे की डावीकडील मर्यादा हाताची बाजू m च्या बरोबरीची आहे आणि उजवीकडे जर आपण या सर्व संज्ञा पाहिल्या तर x sin चौकोन x आणि sin x या मर्यादेत m वजा एक च्या घाताची चिन्हे x शून्यावर जातात त्या मर्यादेत शून्यावर जातात तर काय उरते फक्त b एक आणि म्हणून b one चे मूल्य m आहे आणि b शून्य हे शून्य आहे

त्यामुळे आता आपण आणखी एक समस्या हाती घेतली आहे

त्यामुळे आपल्याला या त्रिकोणमितीय समीकरणाची सर्व निराकरणे येथे शोधावी लागतील

त्यामुळे आपण येथे जे पाहतो ते असे आहे की आपल्याकडे सर्वत्र sine x आहे.

पहिल्या टर्ममध्ये आपल्याकडे cos स्क्वेअर x आहे म्हणून जर आपण हे sin x च्या संदर्भात बदलले तर आपल्याला sine x मध्ये बहुपद मिळेल कारण cos स्क्वेअर x हा एक वजा sin स्क्वेअर x आहे जो लिहिण्याच्या समतुल्य आहे कारण आपल्याकडे पाप x येथे पाप x आणि येथे पाप x आहे म्हणून पाप x एक सामान्य फा आहे ctor डाव्या हाताला आणि उजव्या हाताला दोन्ही बाजूस म्हणून आपण ते sine x गुणिले 4 मध्ये 1 वजा सायन स्क्वेअर x वजा 2 sine x या पदासाठी वजा तीन म्हणजे शून्य असे लिहू जे एक वजा दोन मध्ये sine x लिहिण्यासारखे आहे sine x उणे चार साइन स्क्वेअर x बरोबर शून्य आहे म्हणून हे शून्य होण्यासाठी एकतर sin x शून्य असावे किंवा स्क्वेअर ब्रॅकेटमधील ही संज्ञा शून्य असली पाहिजे परंतु sine x शून्य बरोबरीचे sine x बरोबरीचे हे सामान्य समाधान आहे तो x हा n pi या फॉर्मचा असावा जेथे n सर्व पूर्णांकांसाठी पूर्णांक आहे आणि आता आपण या विशिष्ट पदाचे दुसरे ah समीकरण कसे सोडवायचे ते पाहू या म्हणजे एकतर हे शून्य आहे किंवा हे शून्य आहे म्हणून डावीकडील दुसऱ्या ah घटकासाठी हाताच्या बाजूस आपल्याकडे चार साइन स्क्वेअर x अधिक दोन साइन x वजा एक समान शून्य आहे परंतु हे पाप x मधील एक द्विघात समीकरण आहे म्हणून उपाय असे आहेत की पाप x हे चार अधिक सोळा बाय आठचे वजा दोन अधिक वजा वर्गमूळ आहे.

म्हणून दोन तेथे दोन ah s आहेत येथे ओल्यूशन्स म्हणजे एक उणे एक वजा मूळ पाच वर चार आणि दुसरे समाधान मूळ पाच वजा एक षटक चार आहे आता आपल्याला माहित आहे की ही अठरा अंशांची साइन आहे, जर तुम्हाला आठवत असेल तर अठरा अंशांची साइन मूळ पाच वजा एक षटक चार होते.

ही दहा पेक्षा जास्त pi ची साइन आहे

आणि आम्हाला हे देखील माहित आहे की पन्नास अंशांची साइन जी तीन पाई वरील दहा ची पन्नास चार अंशांची साइन आहे मूळ पाच अधिक एक पेक्षा चार आणि म्हणून हे याच्या नकारात्मक बरोबर आहे आणि म्हणून आपण येथे उणे तीन पाई बाय टेन ची sine लिहू शकतो

त्यामुळे येथून हे समीकरण धारण करण्यासाठी एकतर sine x बरोबर sine pi by ten असायला हवे,

त्यामुळे हे sin x बरोबर sin y चे स्वरूप आहे आणि म्हणून येथे सामान्य समाधान n आहे.

pi अधिक उणे 1 ते n गुणिले pi ची घात 10 n पूर्णांक असणे आणि नंतर इतर समीकरणासाठी sine x समान sine of 3 pi by ten हे देखील समान रूप आहे sin x बरोबर sin y आणि म्हणून सामान्य s यासाठी ओल्यूशन देखील n pi अधिक वजा 1 ते n ची घात वजा 3 pi बाय 10 पूर्णांक z असेल परंतु जर आपण मूळ समस्येकडे परत गेलो तर आपल्याला या समीकरणावर उपाय शोधणे आवश्यक होते आणि आम्ही ते असे काढले.

तर ती डावी बाजू आहे हा या दोन घटकांचा एक घटक आहे म्हणून एकतर पाप x शून्य आहे किंवा हा घटक शून्य आहे पाप x साठी शून्य आहे ah हा उपाय सेट आहे आणि हा दुसरा घटक शून्य होण्यासाठी आपण पाहिले की एकतर ah

त्यामुळे आपण पाहिले की दुसरा सोल्यूशन सेट या दोन संचाच्या एकत्रीकरणाशिवाय दुसरे काहीही नाही आणि म्हणूनच अंतिम उत्तर हे आहे की हा संच n pi अधिक वजा 1 ते n pi च्या घात दहा n n पूर्णांक युनियन n pi अधिक वजा एक n च्या बळावर वजा तीन pi बाय दहा पुन्हा n पूर्णांक असल्याने या त्रिकोणमितीय समीकरणावर सेट केलेले हे सामान्य समाधान आहे पुढील वर्गात आपण आणखी काही त्रिकोणमितीय समीकरणांच्या आणखी काही ah सोल्यूशनवर चर्चा करू तोपर्यंत धन्यवाद