لیکچر فور میں خوش آمدید ہم نے سائن x cos 2x cos 3x سائن 3 x سائن 2 y مائنس x سائن y پلس x لیکچر 3 میں مثلثی فنکشنز پر
کے لیے اظہار خیال کیا اور اخذ کیا اور ہم نے آج کے لیکچر میں ٹینجنٹ فنکشن کی باضابطہ طور پر وضاحت بھی کی۔ دو زاویوں کے مجموعے
کے مماس کے مجموعے اور دو زاویوں کے مماس کے فرق کے لیے ایک زاویہ کے دو بار اور زاویہ کے تین بار کے مماس اور کچھ مزید مثلثیات
کا سیکنڈ اس کے بعد کچھ مسائل ہوں گے۔ آئیے ٹین ایکس اور ٹین وائی کے x اور cosecant کا x کے افعال متعارف کرائیں گے جیسے
کے لیے ایکسپریشن اخذ کرنے کی کوشش کرتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ ایکس کا ٹین اس وقت متعین نہیں ہوتا y لحاظ سے ٹین آف ایکس پلس
y جمع x کا دو سے ایک طاق ضرب ہوتا ہے اس لیے مندرجہ ذیل ایکسپریشن اس پر جا رہا ہے۔ صرف اس وقت درست ہوگا جب x pi جب
cos کی y جمع x کا ٹین y جمع x ہے اس لئے tan sin x by cos x کا x کا دو سے ایک طاق ضرب نہیں ہے کیونکہ pi اب
cos of x plus y اور y جمع ne of x کے لیے اخذ کیے ہیں۔ si کے برابر ہے لیکچرز جو ہم نے y جمع x پر
مائنس سائن cos x cos y پر cos x sine y جمع sine x cos y کو sine کی y جمع x تو اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم
سے تقسیم کرتے ہیں cos x cos y ہمیں ملتا ہے جب ہم اس اصطلاح کو cos x cos y لکھ سکتے ہیں x sine y
cos x cos y کو sine x cos y کے ساتھ منسوخ ہوجاتا ہے اور اسی طرح ہمیں cos y cos y ملتا ہے کیونکہ tan x تو ہمیں
سے تقسیم کیا گیا اور یہ ہے cos x cos y on کو sine y ملتا ہے۔ cos x سے تقسیم کرکے
ہے tan y اوقات tan x ہے یہ ایک ہے اور یہ tan y ہے یہ اصطلاح tan x تو یہ اصطلاح
ٹین کے ایک مائنس ٹین سے زیادہ یہ اظہار صرف اس x کے y جمع ٹین کے برابر ہے x برابر ٹین کا y جمع x تو آخر کار ہمیں ٹین کا
کا ٹین اس وقت x کے دو کے طاق ضرب نہیں ہیں کیونکہ pi یہ تینوں نہیں ہیں یہ y جمع x اور xy صورت میں درست ہے جب تمام
کے exp کا دو سے یہ بے حد ہو جاتا ہے لہذا یہ مخصوص اظہار آپ کو دو زاویوں کے pi طاق ضرب ہو x متعین نہیں ہوتا جب
کے ٹین y مجموعے کے مماس کے درمیان ایک تعلق فراہم کرتا ہے ٹینجنٹ کے لحاظ سے دو زاویوں کے الگ الگ مماس یہاں سے اب ایکس مائنس
کے ٹین کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور پھر ہم اس مساوات کو y کے لیے ایکسپریشن اخذ کرنا بہت آسان ہے کیونکہ اسے ایکس پلس مائنس
پر 1 y سے بدلتے ہیں لہذا ہمیں ٹین ایکس پلس ٹین آف مائنس y کو مائنس y دوبارہ استعمال کرتے ہیں۔ لہذا بنیادی طور پر اس مساوات میں ہم
y پر ہم نے پچھلے لیکچر سے دیکھا ہے کہ ایکس کا ٹین ایکس کا ایک عجیب فعل ہے سو ٹین مائنس y مائنس ٹین آف ایکس ٹین آف مائنس
کے برابر tan x tan y کے برابر ون پلس tan x minus tan y ہے اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم اسے minus of tan y
جمع tan x برابر ہے y پلس کا ٹین دیکھا x سمجھتے ہیں آئیے اب پچھلی سلائیڈ سے ٹین ٹو ایکس کے ایکسپریشن کی گنتی کرتے ہیں ہم نے
x کے ساتھ بدلنے سے ہمیں جو ملتا ہے وہ x کو y پر اس اظہار کو استعمال کرتے ہوئے اور minus tan x tan y پر ایک tan y
کے برابر ہے x جمع ٹین x کا ٹین ہے ٹین x جو کہ دو x جمع x ہے tan کا
tw ox pi by تو یہ دو ہے ٹین ایکس پر ایک مائنس ٹین اسکوائر ایکس لیکن ایک بار پھر اس کی اچھی طرح سے وضاحت تب ہوتی ہے جب
کا طاق ضرب ہے x pi by two بھی ہے کیونکہ اگر x کا طاق ضرب نہیں ہے اور two
کے لیے اظہار اخذ کر سکتے ہیں ۔ تین ایکس tan یہاں بھی اسی طرح بیان نہیں کیا گیا ہے جس طرح ہم tan x یہاں اور یہ tan x تو یہ
کا y کے ٹین کے لیے ہمیں ٹین ملتا ہے ہم نے پچھلی سلائیڈ سے دیکھا ہے کہ ایکس پلس y دوبارہ ایکسپریشن کا استعمال کرتے ہوئے ایکس پلس
کی جگہ دو ایکس کے برابر ہو جائے گا۔ ہمیں ایکس پلس ٹو ایکس کا ٹین y پر اس لیے y ہے ون مائنس ٹین ایکس ٹین y ٹین ٹین ایکس پلس ٹین
ملتا ہے ٹین ایکس پلس ٹین ٹو ایکس پر ایک مائنس ٹین ایکس پر ٹین ٹو ایکس میں اور پھر ہم پچھلی سلائیڈ سے ٹین ٹو ایکس کا ایکسپریشن استعمال
کرتے ہیں جسے میں آپ کی سہولت کے لیے دوبارہ پیش کرتا ہوں تاکہ ٹین ٹو ایکس ایک مائنس ٹین مربع ایکس پر دو ٹین ایکس ہے لہذا یہاں اس
اظہار کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے ٹین ایکس پلس 2 ٹین ایکس پر 1 مائنس ٹین مربع ایکس پر 1 مائنس ٹین ایکس گنا 2 ٹین ایکس
ree x tan کے ساتھ ہندسوں اور ڈینومینیٹر دونوں کو ٹین ویں ملے گا۔ x بذریعہ 1 مائنس ٹائم مربع ایکس اور پھر ضرب ایک مائنس ٹین مربع
اس پر tan x کے علاوہ دو x مربع minus tan کے برابر ہونے کے لئے ایک x
جو کے برابر ہے اور پھر اس آہ کو کھولنے سے یہ منحنی خطوط وحدانی ہمیں آخر x مائنس دو ٹین مربع x تو یہ عدد ہے ایک مائنس ٹین مربع
کار ملتے ہیں۔ ٹین تھری ایکس تین ٹین ایکس مائنس ٹین مکعب ایکس کے برابر ہونا ایک مائنس تین ٹین مربع ایکس پر دوبارہ اس کی اچھی طرح سے
متعارف کرایا تھا اور cot x فنکشن cotangent طاق ضرب نہیں ہے ہم نے n کا pi وضاحت کی گئی ہے جب تین ایکس دو سے زیادہ
cot کے لحاظ سے cot y اور cot x پر ایک کے برابر ہے لہذا اس سلائیڈ میں ہم cot x tan x ہمارے پاس تھا وضاحت کی کہ
کا اظہار اخذ کرنے کی کوشش کریں گے y جمع of x
کے y کے ٹین پر ایک ہے اور ہم ٹین ایکس پلس y ہے ایکس پلس cotangent کا y جمع x تو یہاں سے یہ اس کی پیروی کرتا ہے کہ
اس ایکسپریشن کو استعمال کرتے ہوئے y پر 1 مائنس ٹین ایکس ٹین y ہے ٹین ایکس پلس ٹین y لئے ایکسپریشن جانتے ہیں جو ٹین ایکس پلس
tan x divi اب y کے اوپر ٹین ایکس پلس 10 y برابر ایک مائنس ٹین ایکس ٹین y پلس ملتا ہے۔ cot x یہاں پہلی مساوات میں ہمیں
پر ایک ملتا ہے tan x tan y کرتے ہیں ہمیں ding کے ساتھ ہندسوں اور ڈینومینیٹر دونوں کو tan y
tan x tan y پر tan x سے تقسیم کرنے سے آپ کو tan x tan y کو tan x tan y تو یہاں یہ اصطلاح کون سی ہے مائنس
tan y on tan x tan y پلس ملے گا
منسوخ ہونے جا رہا ہے یہ مخصوص اصطلاح یہاں کچھ نہیں ہے مگر ایک پر ٹین ایکس بار ایک ٹین y تو یہاں یہ منسوخ ہو جائے گا اور یہاں وقت
ہے y cot y پر ٹین ی ون پر ٹین ایکس ہے کوٹ ایکس ایک پر ٹین
ملا ہے x کے بعد tan x ہے cot y کے اوپر ایک tan y ہے اور cot y بار cot x تو یہ اصطلاح یہاں
اب cot y پلس cot x مائنس ایک پر cot x cot y برابر x plus y کے ساتھ ختم ہوتے ہیں cot تو آخر میں ہم ایکسپریشن
کے سائن پر انفینٹی پلس مائنس انفینٹی بن جاتا ہے x کا کوٹینجینٹ x کا کوزائن ہے x کا کوٹینجینٹ ٹین ایکس پر ایک ہے جو دراصل x چونکہ
کے لیے یہ cotangent کے y جمع x کا ایک ضرب ہوتا ہے لہذا x pi سائن صفر پر جاتا ہے جو اس وقت ہوتا ہے جب x کا x جب
کے y جمع x سے ah کے اور یقیناً pi ایک کثیر نہیں ہے y جمع x اظہار صرف اس صورت میں اچھی طرح سے بیان کیا جاتا ہے جب
سے بدلنا y کو مائنس y کے کوٹینجینٹ کا اظہار حاصل کر سکتے ہیں ہمیں اس مساوات میں y مائنس x کوٹینجینٹ کے اس اظہار سے ہم
cotangent کا x ایک طاق فنکشن ہے اس لیے یہ اس کے بعد ہوتا ہے کہ tan x پر ایک ہے اور x کا کوٹینجنٹ ٹین x ہوگا کیونکہ
مائنس 1 پر y کو مائنس cot کی x سے بدل کر ہم y کو مائنس y یہاں cod کا y مائنس x بھی ایک طاق فنکشن ہوگا اور اس لیے
کا y حاصل کرتے ہیں۔ مائنس cotangent جمع cot x
کا مائنس ہوگا لہذا یہ cot کے y کے مماس کے لئے ایک طاق فعل ہے مائنس y کا کوٹینجینٹ مائنس x کا کوٹینجینٹ کیونکہ y تو مائنس
بن جائے گا اور یہ اظہار پھر ٹھیک ہے صرف اس صورت میں وضاحت کی جاتی ہے cot x cot y پر ایک جمع cot x مائنس cot y
x کے ٹین کے لئے ایکسپریشنز اخذ کیے ہیں ہم x کے ٹین اور تین x کا ایک ضرب نہیں ہے لہذا جس طرح ہم نے دو y pi مائنس x جب
cot of y گنا cot of x ہے y پلس x کے اظہار کو اخذ کرسکتے ہیں ہم نے دیکھا cot کے x کے لحاظ سے دو cot کے
کے ساتھ جو ہم x کے برابر y کے برابر کرنے سے اس طرح x کو y اور اس لیے اس cot کا y پلس cot of x مائنس ایک اوور

مائنس ون ہے دو گنا سے تقسیم x مربع cot کے برابر ہے جو cot x کے cot cot x کی x حاصل کرتے ہیں وہ یہ ہے کہ دو
cot x
cot of کے لحاظ سے cot کی x کے لئے ایک اظہار ملا اور اسی طرح ہم cot of two x کے لحاظ سے cot کی x تو ہمیں
x برابر ہے x جو کہ تین x کا جمع دو x سے بدل دیتے ہیں x کو دو y کا فعل بھی اخذ کر سکتے ہیں ہم اس مساوات میں three x
cot of two x کا حصہ اور پھر ہم پچھلی سلائیڈ سے x کے علاوہ دو cot of x مائنس ایک پر x کے دو cot کے cot کے
کے لئے ایکسپریشن استعمال کرتے ہیں
cot x تھا لہٰذا عدد اور ڈینومینیٹر کو دو cot x مائنس ایک پر دو x مربع cot میں cot کے x ملتی ہے۔ دو cot کی x تو ہمیں
کا ضرب نہیں ہوتا x pi سے ضرب کرنے سے ہمیں آخر کار مل جاتا ہے اور اس کی دوبارہ وضاحت اسی وقت ہوتی ہے جب تین
تو پچھلی سلائیڈوں میں سے ایک میں ہم نے کوٹینجینٹ فنکشن کو ٹین فنکشن پر ایک ہونے کی تعریف کی تھی
فنکشن کہتے ہیں اس لیے cosecant تو بالکل اسی طرح ہمارے پاس ہے۔ ایسا کرنے کے لیے ہم ایک اور فنکشن کی وضاحت کرتے ہیں جسے
کے برابر 1 پر cosec کے x کہتے ہیں اور اس کی تعریف cosec ہے لیکن ہم اسے عام طور پر مختصر میں cosecant فنکشن کا نام
فنکشن سائن فنکشن کے ڈومین جیسا ہی cosecant کے طور پر کی جاتی ہے اس لیے اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اس کا ڈومین x سائن
اصلی موڈ کے لیے ایک کے برابر ہے لیکن x ہوگا جو کہ تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہے مزید ہم جانتے ہیں کہ سائن ایکس کے کسی بھی
حقیقی کے لیے x پر ایک ہے اور اس لیے اس تعلق اور اس حقیقت سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ کسی بھی cosecant x sin x
فنکشن کی حد اس لیے دو وقفوں میں ملاپ cosecant کا موڈ ہمیشہ ایک کے برابر ہوتا ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ cosecant x
ہے پہلا وقفہ مائنس انفینٹی سے مائنس ون یونین کے ساتھ اس طرح مائنس ون کی قدر سیٹ یونین میں دوسرے وقفہ کے ساتھ ایک سے انفینٹی تک
ہوگی
فنکشن کی تعریف کرتے ہیں ایک اور بہت مشہور ٹرگنومیٹرک cosecant ہم y فنکشن کی رینج سیٹ ہے cosecant کی طرح wa تو یہ
کے طور پر کی cos x کے سیکنڈ کی وضاحت 1 پر x ہے مختصراً ہم اسے لکھتے ہیں secant فنکشن جس کا نام secant فنکشن ہے
فنکشن کا ڈومین جو تمام حقیقی نمبروں کا سیٹ ہے اور پھر بالکل اسی طرح cos فنکشن کا ڈومین وہی ہوگا۔ secant گئی ہے اور اس لیے
حقیقی موڈ کے لیے ایک کے برابر ہے اس لیے اس حقیقت x کے کسی بھی cos x فنکشن کے معاملے میں چونکہ cosecant اور جیسا کہ
کا 1 سے بڑا ہونا secant x اصلی موڈ کے لیے x اور اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے اس کی پیروی کی گئی ہے۔ کہ کسی بھی
فنکشن کی حد کے برابر ہے جو کہ وقفہ مائنس cosecant فنکشن کی رینج دوبارہ secant ضروری ہے اور اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں کہ
انفینٹی کا اتحاد ہے۔ مائنس ون یونین ون سے لامحدود اب جب کہ ہم نے مختلف مثلثیاتی افعال کے درمیان بہت سی شناختیں اور تعلقات سیکھ لیے ہیں
اور مماس کے مماس اور کوزائن کے مجموعے اور فرق کے لیے اظہار بھی زاویوں کا مجموعہ اور فرق ہم کچھ مسائل کو حل کرنے کی کوشش
کرتے ہیں
کے برابر ہے لہذا مسائل کو حل cot کے x تو اس مسئلے میں یہ ظاہر کرنے کے لئے کہا جاتا ہے کہ اس بائیں ہاتھ کی طرف کا اظہار دو
کرنے کا بنیادی خیال پیٹرن تلاش کرنا اور کوشش کرنا ہے۔ اظہارات اور شناخ
توں کو لاگو کرنے کے لیے جو ہم نے سیکھے ہیں ان نمونوں پر جو آپ کو سوال کے تاثرات میں معلوم ہوتے ہیں مثال کے طور پر یہاں ہم دیکھتے
ہی کا ایک جمع cosine ہیں کہ بائیں جانب ہمارے پاس دو کوزائنز کا مجموعہ ہے اور اگر آپ کو یاد ہے کہ ہمارے پاس یہ شناخت تھی کہ
پر دو کا اس لیے یہ پچھلے لیکچر میں سے ایک میں سکھایا گیا تھا اور اس طرح یہ b ایک مائنس cos کے دو گنا b برابر ہے ایک جمع cos
سے دو گنا b جمع cos a کا برابر ہونا دو گنا cos a plus cos b پچھلے لیکچر کی سلائیڈ ہے جہاں ہم نے یہ شناخت ظاہر کی ہے۔
cos a کے دو سے زیادہ اور چونکہ ہمیں یہ نمونہ یہاں مل رہا ہے b مائنس cos a
x ہے تین xb سات aa تو یہ
دو گنا ہے cos کا x ہے جمع تین cos کی x کے برابر جو ہمیں ملتا ہے وہ سات x لگا کر سات ایکس کے برابر اور ہو تین a تو
ہے x چار b ملے گا اور ایک مائنس cos کا x ہے اور اسے دو سے تقسیم کرنے سے آپ کو پانچ x دس کا دس b تو ایک جمع
ہوں گے x تو دو دو
کا نمونہ نظر آتا ہے اور اس پر لیکچر تھری کی پچھلی سلائیڈوں میں b مائنس سائن a اور پھر ڈنومینیٹر میں ہمیں سائن cos کے x تو دو
سے ایک میں بھی بات کی گئی تھی جسے میں اب آپ کے سامنے دوبارہ پیش کرتا ہوں۔
یہ اظہار اخذ کیا گیا ہے لہذا ہم اسے یہاں استعمال کرنے کی کوشش کریں گے sine a minus sin b تو
b مائنس a کے دو سے زیادہ اور b جمع cos a کے برابر ہوتا ہے دو گنا b تو میں اسے دوبارہ لکھتا ہوں آپ کے لیے ایک مائنس کا نشان
cos کا دو گنا x کا مائنس سائن ملتا ہے تین x کے برابر ڈالنے سے ہمیں سات x تین b کے برابر اور x کے سائن دو سے زیادہ۔ سات
ہو گا x دو سے زیادہ دو b اور مائنس x سے زیادہ پانچ B ایک جمع
کے لیے ہے اور a اظہار ملتا ہے اور اس طرح یہ عدد کے لیے ہے اور یہ ڈینومینیٹر ah تو ہم ایسا کرتے ہیں آخر میں ہمیں عدد کے لیے یہ
پھر جب ہم ان دونوں کو تقسیم کرتے ہیں
تو یہ اس سے تقسیم کرنے کے مترادف ہے
کے برابر ہے اور یہ cos 2 x میں cos 5 x تو ہمیں جو حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ یہاں بائیں ہاتھ کا حصہ عدد کے برابر ہوگا 2
بار سائن ہوتا ہے x پانچ cos کا 2 x ڈینومینیٹر اس کے برابر ہے۔ یہاں اظہار دو
جو x دو sin پر cos two x منسوخ ہو جاتے ہیں جو باقی رہتا ہے x پانچ cos اور x پانچ cos تو دو اور دو منسوخ ہو جاتے ہیں
کے برابر ہے جو دائیں طرف ہے یہاں اور یہ اس حقیقت کے ثبوت کو مکمل کرتا ہے کہ یہ اس کے برابر ہے لہذا ہم نے یہاں cot کے x دو
جو کچھ سیکھا وہ یہ تھا کہ سوال میں یا وہاں موجود تاثرات کے نمونوں کو تلاش کریں اور یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ آیا ہم ان تاثرات کو لاگو
sin a minus sign b اور cos a plus cos b کرسکتے ہیں جو ہم پہلے سیکھ چکے ہیں۔ مثال کے طور پر اس معاملے میں ہم نے
کی پیداوار کے طور پر ظاہر کرتے ہیں جس کی وجہ سے منسوخی ہوئی اور پھر اسی طرح sine اور cos کی نشاندہی کی ہے اور ہم انہیں
کا مجموعہ اس لیے یا cosines کے ایک اور سوال کا حتمی جواب یہاں ہمارے پاس ہے۔ تین
cos تو ہم اس اور اس کو پہلے جوڑ کر شروع کر سکتے ہیں اور پھر ہم اسے ان دونوں کے مجموعے میں شامل کر سکتے ہیں یا ہم پہلے
کا اضافہ کر سکتے ہیں cos four x جوڑ سکتے ہیں اور پھر بعد میں cos Five x اور three x
cos کو cos three x فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے cos a plus cos b تو کس طرح کیا ہم اس کے ساتھ چلتے ہیں کیا ہم
cos four x اور cos three x کا اضافہ کرتے ہیں مسئلہ یہ ہے کہ اگر ہم cos Five x کے ساتھ جوڑتے ہیں اور پھر four x
کی اصطلاحات جو ہم cos دو میں b جمع cos a یہ دو ہے cos b کا فارمولا یاد ہے ایک جمع cos کو پہلے جوڑتے ہیں اگر آپ کو
لیں x کے ساتھ چار b اور x دو اس لئے اگر آپ ایک دو کو تین x x سات cos حاصل کریں گے
دو ملتے ہیں مسئلہ یہ ہے کہ پھر ان دونوں اصطلاحات میں x x دو اور گنا x سات cos تو ہم اسے اور یہ شامل کر رہے ہیں ۔ ہمیں دو گنا

کے ساتھ کوئی چیز مشترک نہیں ہے لہذا حقیقت میں کسی چیز کو عام کرنا بہت مشکل ہوگا کیونکہ آخر کار اگر آپ دیکھیں کہ کیا cos Five x
ہے ہمیں یہاں دائیں طرف چار ایکس کی ضرورت ہے لہذا اس کو شامل کرنے کی کوشش کر رہے ہیں اور یہ پہلا ہے۔ صحیح حکمت عملی نہیں
x کا اضافہ ہو سکتا ہے اور یہ بہتر ہے کیونکہ جب آپ تین x اور پانچ x ہے اس سے امتحان میں وقت کا ضیاع ہو گا اس لیے دوسرا آپشن تین
کا اضافہ کرتے ہیں
cos x گنا x کا چار cos لکھتے ہیں۔ آپ کو جو ملتا ہے وہ ہے دو گنا cos جمع cos of three x تو جب آپ
بھی شامل کرنے کی ضرورت ہے لیکن اب اچھی بات یہ ہے کہ یہ یہ پہلے cos 4 x ہے اب آپ کو cos 3 x plus cos 5 x تو یہ
پہلے x ہے۔ فیکٹر اس لیے اس اصطلاح کو مزید جوڑنا آسان ہو جاتا ہے اور پانچ cos 4 x سے ہی
cos Five اور cos three x لکھا جا سکتا ہے جو cos x بار x چار cos تو عدد لکھا جا سکتا ہے اس طرح بائیں ہاتھ کا ہندسہ دو
x چار cos کا مجموعہ ہے اور پھر جمع x
کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ اسی cos x میں ایک جمع دو cos four x کو فیکٹر آؤٹ کیا جا سکتا ہے اور اسے cos four x تو
a کو جوڑنے کی کوشش کریں گے لہذا اگر آپ کو سائن sin three x وجہ سے ڈینومینیٹر پر ہم سب سے پہلے سائن فائیو ایکس کے ساتھ
کی b اوور کے برابر ہونے کے لیے اخذ کیا گیا تھا۔ ایک مائنس b جمع a کا فارمولا یاد ہے اور یہ پچھلے لیکچر میں دو سائن b جمع علامت
ہے اور x تین a کے دو گنا سائن کے برابر ہے کیونکہ x کی سائن چار x کی سائن جمع پانچ x سے زیادہ ہے اس لیے 3 2 cos دو گنا
از دو b بن جاتا ہے۔ مائنس x میں چار cos کے a دو پر یہ x آٹھ b ایک جمع
ہے x مائنس دو b مائنس cos of so a تو
کے برابر ہے cos کے cos of x کی minus x لیکن cos of minus x ہے cos of minus two x on two تو
تو ہمیں یہی ملتا ہے اور پھر فائنل بائیں ہاتھ کی طرف ڈینومینیٹر کے لیے ایکسپریشن یہ ہوگا کہ ہم صرف اس ایکسپریشن کو چار ایکس پر دستخط
کرنے کے لیے جوڑیں گے
لکھ سکتے ہیں cos x فور ایکس ہے پھر عام ہے اس لیے ہم اسے سائن فور ایکس بار ایک جمع دو sin تو جو ہمیں ملتا ہے وہ
تو یہ ہے ڈینومینیٹر
دونوں cos x تو یہ عدد ہے اور یہ ڈینومینیٹر ہے اور پھر آخر میں جب ہم تقسیم کرتے ہیں ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ اصطلاح 1 جمع 2
ہندسوں میں موجود ہے لہذا جب ہم تقسیم کرتے ہیں
cot سے تقسیم کیا جاتا ہے جو دائیں کے برابر ہوتا ہے۔ ہاتھ کی طرف جو sin 4 x کو cos 4 x تو یہ منسوخ ہوجاتا ہے اور پھر ہمیں
4x ہے
تو اس مثال کے ذریعے ہم نے دیکھا کہ یہ بہت ضروری ہے کہ ہم یہ فیصلہ کریں کہ کون سے عوامل کو پہلے شامل کیا جانا چاہیے ورنہ اس
کے نتیجے میں وقت ضائع ہو سکتا ہے ایک اور دلچسپ مسئلہ درج ذیل ہے اس لیے یہ ہم سے قیمت کی گنتی کرنے کو کہہ رہا ہے ۔ 18 ڈگری کا
کے برابر ہے یہ ایک اور شناخت ہے جس پر cosine کے x pi کا سائن 2 مائنس x سائن اب ہمیں یہاں جو احساس ہوا وہ یہ ہے کہ چونکہ
کے برابر ہے۔ ڈگریوں کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے cosine ہم نے پچھلے لیکچر میں بات کی تھی ہم دیکھتے ہیں کہ 36 ڈگری کی سائن 54 کے
اور 54 کا انتخاب کیا ہے کیونکہ سب سے پہلے وہ 90 ڈگری تک جوڑتے ہیں دوسری وجہ یہ ہے کہ وہ دونوں 18 ڈگری کے ضرب ہیں لہذا 36
خیال یہ ہے کہ سائن 2 تھیٹا اور کوس 3 تھیٹا کے فارمولے کو استعمال کیا جائے۔ ٹی تھیٹا کے ساتھ 18 ڈگری کے برابر ہے کیونکہ 18 ڈگری کے
برابر تھیٹا کے ساتھ 2 تھیٹا 36 ڈگری ہے اور 3 تھیٹا 54 ڈگری ہے اب ہم جانتے ہیں کہ سائن 2 تھیٹا 2 سائن تھیٹا کوس تھیٹا ہے اور ہم یہ بھی
ہے۔ کیوب تھیٹا مائنس تھری کوس تھیٹا یہ دونوں ایکسپریشنز ہم نے پچھلے لیکچر میں اخذ کیے تھے cos چار cos جانتے ہیں کہ تین تھیٹا کا
تو یہاں سے ہمیں جو ملتا ہے وہ یہ ہے کہ تھیٹا کے ساتھ اٹھارہ اس کے بعد اور یہ برابر ہے ہم لکھ سکتے ہیں کہ 2 سائن تھیٹا کوس تھیٹا مائنس 4
تھری تھیٹا ہے اور اٹھارہ ڈگری کے برابر cos تھیٹا صفر کے برابر ہے کیونکہ یہ سائن ٹو تھیٹا ہے اور یہ cos کوس کیوب تھیٹا مائنس 3
تھیٹا 2 میں لکھ cos تھیٹا ان تمام اصطلاحات میں ایک عام فیکٹر ہے اس لیے ہم اسے cos تھیٹا کے لیے وہ برابر ہیں اب ہم دیکھتے ہیں کہ
مربع تھیٹا جمع تین صفر کے برابر ہے لیکن اس لیے یہاں ممکنہ حل یہ ہے کہ یا cos سکتے ہیں۔ سائن تھیٹا مائنس 4
کے برابر نہیں ہے۔ cos 0 تو یہ اصطلاح صفر ہے یا یہ اصطلاح 0 ہے لیکن 18 ڈگری کے برابر تھیٹا کے لیے ہم جانتے ہیں کہ 18 ڈگری کا
اس لیے اس مساوات کے مطمئن ہونے کا واحد طریقہ یہ ہے کہ اگر یہ اصطلاح صفر کے برابر ہے جو کہ تھیٹا کے لیے اٹھارہ ڈگری کے برابر
ہے
مربع تھیٹا برابر ہے ایک cos تھیٹا مائنس تین صفر کے برابر ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ sin مربع تھیٹا مائنس دو cos تو یہ مساوات چار
اسکوائر تھیٹا کو اس طرح استعمال کرتے ہوئے کہ ہمیں 4 مائنس 4 سائن اسکوائر تھیٹا مائنس 2 سائن تھیٹا مائنس 3 برابر 0 ملے اور sin مائنس
اسے دوسری طرف لے جائیں جسے 4 سائن اسکوائر تھیٹا پلس ٹو سائن تھیٹا مائنس ون برابر صفر کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔
تھیٹا میں ایک چوکور کثیر sin تو اٹھارہ ڈگری کے برابر تھیٹا اس مساوات کو پورا کرتا ہے اب یہ بنیادی طور پر آہ ہے یہاں بائیں ہاتھ کی طرف
الثانی ہے
تھیٹا قرار دیتے ہیں sin ہم اسے z تو ہم یہ کہتے ہیں کہ
z مائنس ون صفر کے برابر ہے لہذا اس چوکور مساوات کے دو ممکنہ حل ہیں اور حل ہیں z مربع جمع دو z تو ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے چار
برابر مائنس ٹو پلس مائنس بیس بائی آٹھ چونکہ اٹھارہ ڈگری کا نشان مثبت ہے ممکنہ راستہ جو سمجھ میں آتا ہے وہ یہاں جمع کے نشان کے ساتھ
ہے لہذا آخر کار ہم یہ حاصل کرتے ہیں کہ 18 ڈگری کا سائن مائنس 2 پلس جڑ سے زیادہ 20 پر 8 کے برابر ہے جسے پانچ منفی ایک پر چار کے
مربع جڑ کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے کچھ اور مسائل حرکت پذیر ہیں۔ آگے
تو اس مسئلے میں ہم سے دوبارہ یہ ثابت کرنے کے لیے کہا گیا ہے کہ بائیں طرف کا یہ ایکسپریشن اور دائیں جانب کا یہ ایکسپریشن دونوں برابر
ہیں، لہذا اگر ہم دائیں جانب کا ایکسپریشن دیکھیں
ایک پر ہے سائن ایکس اور ایکس کا کاٹیج کوٹینجینٹ ٹین ایکس پر ایک ہے لیکن ہم اسے سائن ایکس پر ایکس cosecant کا x تو ہم جانتے ہیں کہ
کے کوزائن کے طور پر بھی لکھ سکتے ہیں اس لیے یہ ایکس کی سائن کی طرف سے ایکس کے ایک مائنس کوزائن کے برابر ہو جاتا ہے
کا یہاں بھی آتا ہے اور یہاں بھی x تو اب ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ ایک مائنس کوزائن ہے
مربع cos x مربع جڑ کے اندر ہے لہذا ایک مائنس cos x تو اگر آپ چاہتے ہیں کہ یہ ہندسہ برابر ہو لیکن مسئلہ یہ ہے کہ یہاں ایک مائنس
کے مربع جڑ کے ساتھ ہندسہ اور cos x جڑ سے باہر ہونے کا ایک طریقہ ہے یہ ہے کہ ہم بائیں ہاتھ کی طرف ضرب کرتے ہیں۔ 1 مائنس
کے مربع جڑ کے ساتھ ضرب دیتے ہیں تاکہ x ڈینومینیٹر دونوں اس لیے ہم بائیں ہاتھ کے ہندسوں اور ڈینومینیٹر دونوں کو ایک مائنس کوسائن
پر ایک کا جڑ بن جاتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ ایک x مربع cos ہو جائے جیسا کہ ہم چاہتے تھے۔ اور ڈینومینیٹر cos x ہندسہ اب ایک مائنس
ہو گی x کی جڑ گناہ x ہے اور پھر گناہ مربع x گناہ مربع x مربع cos مائنس
تو یہ اس کے برابر ہے جو یہاں دائیں ہاتھ کے سوا کچھ نہیں ہے۔ جو اس سوال کے ثبوت کو ختم کرتا ہے کچھ اور مشکل مسائل اس لیے اس سوال
کی تلاش کریں cosine کی قیمت 40 ڈگری مائنس کوسائن 20 ڈگری کے علاوہ 80 ڈگری کے cos میں ہم سے کہا گیا ہے کہ

تو یہ شروع میں ایک بہت مشکل مسئلہ معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ یہ تمام زاویے ایسے زاویے ہیں جن کے لیے سائن اور کوزائن کا ہمیں علم نہیں ہے ہم عام طور پر 45 ڈگری یا 30 ڈگری یا 60 ڈگری کے سائن اور کوزائن کو یاد رکھتے ہیں یا شاید ہم اسے 15 اور 75 ڈگری کے حساب سے rees لگا سکتے ہیں۔
کو جوڑتے اور گھٹا cosine تو یہ تھوڑا مشکل لگ سکتا ہے لیکن پھر یہاں جو چال دیکھنے کو ملتی ہے وہ یہ ہے کہ ہم دوبارہ دیکھتے ہیں کہ ہم ہے۔ cos a plus cos b فارمولے کو یاد کرنے کی کوشش کرنی چاہیے جو cos a plus cos b رہے ہیں اس لیے فوری طور پر کے برابر ہے b مائنس cos دو پر b جمع cos دو
کو صحیح طریقے سے منتخب کریں b اور a تو اس سے کچھ امید ملتی ہے کیونکہ اگر ہم ان تینوں اصطلاحات میں سے بذریعہ دو ایک زاویہ ہو سکتا ہے جس کے لیے ہم کوسائن کی b دو سے یا ایک مائنس b زاویہ میں سے ایک جمع cos تو ہو سکتا ہے کہ ان کو 40 a قدر جانتے ہیں اور اس سے ہمیں مسئلہ حل کرنے میں مدد مل سکتی ہے اب ان تین زاویوں کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم کو 80 ڈگری لیتے ہیں b ڈگری اور
تو ہم دیکھتے ہیں کہ 40 جمع 80 کو 2 سے 120 تقسیم کیا جاتا ہے جو کہ 60 ڈگری ہے اور یہ ہم جانتے ہیں کہ 60 ڈگری کا کوسائن نصف ہے

تو آئیے اس روٹ کو اس راستے پر آزمائیں
cos کے 2 گنا 80 مائنس 40 کا 60 ڈگری گنا cos کا 80 اس فارمولے کو استعمال کر رہا ہے cos تو 40 ڈگری جمع
یعنی 2 پر 40 ہے s ہے۔ minu تو یہ
تو یہ 20 ڈگری ہو گا
کا نصف کے برابر ہے cos ڈگری کے برابر ہو جاتا ہے ہم جانتے ہیں کہ ساٹھ ڈگری cos 60 تو یہ اب
cos 40 کے برابر سمجھتے ہیں اور پھر حتمی اظہار واضح طور پر 0 ہے کیونکہ یہ cos تو اسے یہاں ڈالنے سے ہم اسے بیس ڈگری کے کے امتحانات میں jee کو گھٹا رہے ہیں اس لیے حتمی جواب 0 ہے۔ یہ cos 20 ہے اور ہم یہاں cos 20 کا مجموعہ cos 80 اور سے ایک کا مسئلہ ہے اس لیے دوبارہ شروع کرنے کے لیے یہ مسئلہ نظر آتا ہے۔ بہت خوفناک کیونکہ آپ تھیٹا سے شروع ہوکر 8 تھیٹا تک جاتے ہیں لیکن آہ پھر ہمیں ہمیشہ اظہار میں پیٹرن دیکھنا ہے
تو یہاں پیٹرن یہ ہے کہ پہلے اظہار سے دوسری پہلی اصطلاح سے دوسرے تک اصطلاح میں ٹینجنٹ کے اندر کا زاویہ دوگنا ہو رہا ہے اور یہاں سے یہاں تک یہ دگنا ہو رہا ہے اور پھر دوبارہ یہاں سے یہاں
تو شاید وہاں ایسا لگتا ہے کہ ٹین آف ٹو ایکس کا فارمولا کارآمد ہو سکتا ہے لہذا اگر آپ کو یاد ہے کہ دو ایکس کا ٹین تھا دو ٹین ایکس کے برابر ایک سے تقسیم اب آئیے ہم سے شروع کریں بائیں ہاتھ کی طرف سے شروع کریں بائیں ہاتھ کی آخری اصطلاح 8 تھیٹا کا 8 گنا x مائنس ٹین مربع کوٹینجینٹ ہے جسے دراصل لکھا جا سکتا ہے اس طرح آٹھ تھیٹا کا کوٹینجینٹ ایک پر ہے ٹین ایٹ تھیٹا
تو ایکس کو چار تھیٹا کے برابر لے کر ہمارے پاس آٹھ تھیٹا کا ٹین برابر ہے دو ٹین کے 4 تھیٹا پر 1 مائنس ٹین مربع 4 تھیٹا اس اصطلاح کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں اس ایکسپریشن کو الٹا ہوگا
ملے گا تھیٹا پلس 4 اور ہم سمجھتے ہیں کہ آہ اس کوٹ ایٹ تھیٹا ایکسپریشن میں ٹین آف فور تھیٹا ہوگا اور اگلی ایکسپریشن ٹین cot 8 تو ہمیں 8 آف فور تھیٹا ہے اس لیے ہم اسے اس کے ساتھ جوڑنے کی کوشش کریں گے اس لیے آٹھ کوٹ ایٹ تھیٹا پلس فور ٹین فور تھیٹا آٹھ کا برابر ہوگا ایک مائنس ٹائم مربع چار تھیٹا بائی دو ٹین چار تھیٹا پلس چار تھیٹا کا چار گنا ٹینجنٹ
تو یہ چار بنتا ہے
تو یہ 4 گنا کے برابر ہے کیونکہ ہمارے یہاں اور یہاں بھی 4 ہیں اور ہم اسے آسان بناتے ہیں
تو یہ بن جاتا ہے۔
تو یہ ب چار تھیٹا کے مقابلے میں 1 آتا ہے کیونکہ ٹین فور تھیٹا ٹائم ٹین فور تھیٹا ٹین اسکوائر فور تھیٹا ہے جو یہاں اس مائنس ٹین اسکوائر فور تھیٹا کے ساتھ منسوخ ہو جاتا ہے لہذا بائیں ہاتھ کی طرف اب تھیٹا کے ٹین پلس دو گنا این ٹو تھیٹا اور پھر جمع چار بائے دس اور پھر ہم اسی عمل کو دہراتے ہیں ہم ٹین فور تھیٹا لکھتے ہیں تاکہ دو بار کے برابر ہو کیونکہ اب اس اصطلاح سے پہلے کے بعد اگلی اصطلاح ٹین 2 تھیٹا ہے لہذا ہم اس ٹین 4 تھیٹا کو وقت 2 تھیٹا کے لحاظ سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔
تو شاید ایسا ہو گا جب ہم اس اور اس اصطلاح کو جوڑیں گے
تو ہم وہاں کچھ اصطلاحات کو منسوخ کرنے کے قابل ہو جائیں گے
تو یہ خیال ہے
تو پھر جب ہم اس رقم کو دیکھتے ہیں
تو ہمیں جو ملتا ہے وہ 4 پر ٹین 4 تھیٹا جمع 2 بار ٹین 2 تھیٹا ہے 4 کے برابر 1 مائنس ٹائم مربع 2 تھیٹا اون 2 ٹین 2 تھیٹا پلس 2 10 ٹو تھیٹا دو ہے

تو ہم یہاں پر دو حاصل کرتے ہیں اگر آپ اسے آسان بناتے ہیں
تو آپ کو ٹین ٹو تھیٹا پر دو اور آخر میں بائیں ہاتھ کی طرف ملے گا
تو یہ بائیں ہاتھ کی طرف ہے
تو آخر میں بائیں ہاتھ کی طرف ٹین تھیٹا پلس ٹو پر ٹین 2 تھیٹا بن جاتا ہے اور اب دوبارہ استعمال کرتے ہوئے ہمیں ٹین تھیٹا کے لحاظ سے ٹین 2 تھیٹا کا اظہار کرنے کی ضرورت ہے تاکہ یہاں کچھ اصطلاحات کی منسوخی ہوسکتی ہے ہم جانتے ہیں کہ 2 تھیٹا کا ٹین ہے 1 مائنس ٹین اسکوائر تھیٹا پر 2 ٹین تھیٹا اس لیے یہاں اس ایکسپریشن کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں ٹین تھیٹا پلس 2 ٹو 1 مائنس ٹین اسکوائر تھیٹا کے 2 ٹین تھیٹا کے برابر ہونا ہے
تو یہ منسوخ ہو جائے گا اور اس طرح یہ ٹین تھیٹا منسوخ ہو جائے گا۔ یہ مائنس ٹین مربع تھیٹا بذریعہ ٹین تھیٹا
تو آخر کار جو باقی رہے گا وہ ہے 1 از ٹین تھیٹا جو دراصل کوٹ تھیٹا ہے
تو یہ وہی ہے جو دائیں ہاتھ کی طرف تھا تاکہ اس بظاہر بہت مشکل مسئلے کا ثبوت ختم ہو جائے
تو آئیے یہاں ایک اور مسئلہ پر بات کرتے ہیں۔
اور پھر a تو پھر ہمیں یہ دکھانا ہوگا کہ یہ بائیں ہاتھ کی سائیڈ اس دائیں ہاتھ کے برابر ہے اور یہاں تک کہ ہم ایک نمونہ دیکھتے ہیں کہ ایک زاویہ ہے a اور پھر آٹھ a اور پھر چار a دو
اور اس سے آپ کے ذہنوں میں فوری طور پر si gn eight a اور a cos four a تو جو ہم دیکھتے ہیں وہ ہم دیکھتے ہیں۔ ایک کے برابر رکھیں گے a خطرے کی گھنٹی بجنی چاہئے کہ ہم جانتے ہیں کہ 2 تھیٹا کا سائن 2 سائن تھیٹا کوس تھیٹا ہے لہذا اگر ہم تھیٹا کو چار cos 4 a ملتا ہے اور امید ہے کہ اس cos 4 a ہے لہذا ہمیں یہاں a چار cos دو سائن چار ایک a تو یہاں کیا ملے گا سائن آف ایٹ کو منسوخ کر دینا چاہئے لہذا اگر آپ اس دائیں طرف دیکھیں گے

ہوگا دو سائن چار ایک میں کوس چار ایک پر آٹھ گناہ ایک a تو ہمیں کیا ملے گا سائن 8 پر آٹھ کا نشان
تو کم از کم اب ہمارے پاس ایک اصطلاح ہے جو ایل ایچ ایس پر ہے لہذا اب ہمیں صرف یہ دکھانے کی ضرورت ہے کہ یہ بالکل برابر ہے لہذا ہمیں
اور یہ اسی طرح کیا جا سکتا ہے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ cos a in cos two a یہ دکھانے کی ضرورت ہے کہ یہ اس کے برابر ہے
کے ساتھ جو a دوبارہ ایک اصطلاح میں ہوگا لیکن تھیٹا کے مساوی دو cos میں اس فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے یہ sine four a
لہذا ہمیں یہ دکھانا ہوگا کہ دو سائن چار ایک پر آٹھ سائن a دو cos into sine two a برابر دو sine four a ہمیں ملتا ہے وہ ہے
ایک برابر ہے۔
برابر ہے a تو یہ وہی ہے جو ہمیں دکھانا ہے اور ابھی ہم نے یہ اظہار اخذ کیا ہے کہ نشان 4
ہے دو گنا گناہ دو ایک گنا دو کاس اب آہ اس a تو یہ وہی ہے جو ہمیں دکھانا ہے اصل میں ہم نے یہ اظہار اخذ کیا ہے ہم نے لکھا ہے کہ نشان چار
ہوتا ہے a پر دو سائن a ٹو cos میں a گناہ چار اے کو اس کے ساتھ یہاں پر ڈالنے سے ہمیں آخر میں سائن دو
تو اگر ایسا ہے
بھی ملتا ہے ۔ دو ایک اصطلاح یہاں اور اب یہ بہت آسان ہے کیونکہ ہم cos تو یہ چیز اس کے برابر ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اب ہمیں یہ
جانتے ہیں کہ سائن ٹو اے اس لیے اگر آپ اب صرف اس اصطلاح کو دیکھیں
sine to a on two sine a ہے a cos a تو یہ اصطلاح کچھ نہیں ہے مگر دو سائن
کے برابر ہو جاتا ہے cos two a اور cos a تو یہ منسوخ ہو جاتا ہے اور پھر یہ
کے برابر ہو جاتا ہے cos a times cos 2a تو یہ
تو ان مثالوں سے کیا احساس ہونا چاہیے کہ ہمیں ہمیشہ نمونوں کو دیکھنے کی کوشش کرنی چاہیے اور راستے کے لحاظ سے صحیح فیصلہ کرنے کی کوشش کرنی چاہیے۔ ثبوت کے لئے اس کی پیروی کی جائے کیونکہ ان میں سے زیادہ تر مسابقتی ہیں۔ ای امتحانات وقت کے پابند ہیں اور اگلے لیکچر میں ہم کچھ اور مسائل کو حل کرنا جاری رکھیں گے جو آہ کرے گا جو بنیادی طور پر آپ کو اس قسم کے مسائل کو حل کرنے میں آسانی پیدا کرے گا شکریہ