

व्याख्यान 3 मध्ये त्रिकोणमितीय फंक्शन्सवर चार व्याख्यानात आपले स्वागत आहे आम्ही साइन  $x$  अधिक  $y$  साइन  $x$  वजा  $y$  साइन  $2x$  साइन  $3x$   $\cos 2x$   $\cos 3x$  साठी अभिव्यक्तींवर चर्चा केली आणि व्युत्पन्न केली आणि आम्ही आजच्या व्याख्यानात स्पर्शिक कार्याची औपचारिक व्याख्या देखील केली आहे.

दोन कोनांच्या बेरजेच्या स्पर्शिकीची बेरीज आणि दोन कोनांमधील फरक एका कोनाच्या दुप्पट आणि कोनाच्या तीन वेळा स्पर्शिकीच्या बेरजेसाठी आणि आणखी काही त्रिकोणमिती फंक्शन्स सादर करतील जसे की  $x$  चा कोसेकंट आणि  $x$  चे सेकंद आणि त्यानंतर काही समस्या येतील.

टॅन  $x$  आणि टॅन  $y$  च्या संदर्भात  $x$  अधिक  $y$  च्या  $\tan$  साठी अभिव्यक्ती काढण्याचा प्रयत्न करूया कारण आपल्याला माहित आहे की  $x$  ची टॅन परिभाषित केली जात नाही जेव्हा  $x$  हा  $\pi$  चा दोन बाय दोनचा विषम गुणाकार असतो म्हणून पुढील अभिव्यक्ती होईल जेव्हा  $x$  अधिक  $y$  हा  $\pi$  चा दोनचा विषम गुणाकार नसेल तेव्हाच वैध असेल कारण  $x$  चा  $\tan$  हा  $\sin x$  by  $\cos x$  आहे त्यामुळे  $x$  अधिक  $y$  चा टॅन  $x$  अधिक  $y$  च्या  $\sin$  वर  $x$  अधिक  $y$  च्या  $\cos$  वर  $x$  अधिक  $y$  आहे व्याख्याने आम्ही  $\sin$  साठी अभिव्यक्ती मिळविली  $x$  अधिक  $y$  चा  $\sin$  आणि  $x$  अधिक  $y$  चा  $\cos$  म्हणून आपण  $x$  अधिक  $y$  ची  $\sin x$  plus  $y \sin x \cos y$  अधिक  $\cos x \sin y$  वर  $\cos x \cos y$  वजा  $\sin x \cos y$  असे लिहू शकतो.

$\cos x \cos y$

या शब्दाला  $\cos x \cos y$  ने भागल्यावर आपल्याला  $\tan x$  मिळतो कारण  $\cos y \cos y$  ने रद्द होतो आणि म्हणून आपल्याला  $\sin x \cos y$  भागिले  $\cos x \cos y$  अधिक  $\cos x$  मिळते  $\sin y$  ला  $\cos x \cos y$  वर भागले आणि हे असे आहे की ही संज्ञा  $\tan x$  ही संज्ञा  $\tan y$  आहे ही एक आहे आणि ही  $\tan x$  गुणिले  $\tan y$  आहे म्हणून शेवटी आपल्याला  $x$  अधिक  $y$  चा टॅन मिळेल  $x$  अधिक  $\tan$  चा टॅन  $y$  च्या  $x$  टॅनच्या  $y$  वर एक वजा टॅन ही अभिव्यक्ती तेव्हाच वैध आहे जेव्हा सर्व  $xy$  आणि  $x$  अधिक  $y$  या तिन्ही नसतात ते  $\pi$  चा दोन च्या विषम गुणाकार नसतात कारण  $x$  चे  $\tan$  जेव्हा  $x$  विषम गुणाकार असतो तेव्हा परिभाषित केले जात नाही पाई चे दोन बाय ते अमर्यादित होते म्हणून ही विशिष्ट अभिव्यक्ती आपल्याला दोन कोनांच्या एक्सपच्या बेरजेच्या स्पर्शिकीशी संबंध देते

स्पर्शिकीच्या संदर्भात दोन कोनांच्या विभक्त स्पर्शिका प्रमाणेच आता येथे  $x$  उणे  $y$  च्या  $\tan$  साठी अभिव्यक्ती काढणे खूप सोपे आहे कारण ते  $x$  अधिक वजा  $y$  चे टॅन म्हणून लिहिता येते आणि नंतर आपण हे समीकरण पुन्हा वापरतो

त्यामुळे या समीकरणामध्ये आपण  $y$  च्या जागी वजा  $y$  घेतो

त्यामुळे आपल्याला वजा  $y$  चा  $\tan x$  अधिक  $\tan$  मिळेल वजा  $y$  च्या  $x$  टॅनचा 1 वजा टॅन मिळेल.

आपण मागील व्याख्यानात पाहिले आहे की  $x$  चा  $\tan$  हे  $x$

so  $\tan$  चे विषम कार्य आहे वजा  $y$  हे  $\tan y$  चे वजा आहे याचा वापर करून आपण हे  $\tan x$  वजा  $\tan y$  वर एक अधिक  $\tan x \tan y$  च्या बरोबरीने मिळवू या आता आपण मागील स्लाइडवरून  $\tan^2 x$  साठी अभिव्यक्तीची गणना करूया आपण  $x$  अधिक चा टॅन पाहिला.

$y$  समान आहे  $\tan x$  अधिक  $\tan y$  वर एक वजा  $\tan x \tan y$  म्हणून ही अभिव्यक्ती वापरून आणि  $x$  च्या ऐवजी  $y$  ची जागा घेतल्यास आपल्याला  $x$  चा टॅन  $x$  अधिक  $x$  जो दोन  $x$  चा टॅन आहे तो टॅन  $x$  अधिक टॅन  $x$  बरोबर आहे म्हणजे दोन टॅन  $x$  वर एक वजा टॅन स्केअर  $x$  परंतु पुन्हा हे फक्त  $\tan^2$  तेव्हाच स्पष्ट केले जाते ऑक्स हा  $\pi$  चा दोन चा विषम गुणाकार नाही आणि  $x$  देखील नाही कारण जर  $x$  हा  $\pi$  चा दोनचा विषम गुणाकार असेल तर हा टॅन  $x$  येथे आणि हा टॅन  $x$  येथे देखील अशाच प्रकारे परिभाषित केला जात नाही की आपण  $\tan$  साठी अभिव्यक्ती काढू शकतो.

$3x$  पुन्हा  $x$  अधिक  $y$  च्या  $\tan$  साठी अभिव्यक्ती वापरून आपल्याला  $\tan$  मिळतो आपण आधीच्या स्लाइडवरून पाहिले आहे की  $x$  अधिक  $y$  चा  $\tan$  म्हणजे  $\tan x$  अधिक  $\tan y$  वर एक वजा  $\tan x \tan y$  आहे त्यामुळे  $y$  च्या जागी दोन  $x$  समान होईल आम्हाला टॅन  $x$  अधिक दोन  $x$  बरोबर टॅन  $x$  अधिक टॅन दोन  $x$  वर एक वजा टॅन  $x$  टॅन दोन  $x$  मध्ये मिळते आणि नंतर आम्ही मागील स्लाइडमधून टॅन दोन  $x$  ची अभिव्यक्ती वापरतो जी मी फक्त तुमच्या सोयीसाठी पुन्हा तयार करतो म्हणून टॅन दोन  $x$  हा दोन टॅन  $x$  वर एक वजा टॅन स्केअर  $x$  आहे म्हणून येथे ती एक्सप्रेसन वापरून आपल्याला टॅन  $x$  अधिक  $2$  टॅन  $x$  वर  $1$  वजा टॅन स्केअर  $x$  वर  $1$  वजा टॅन  $x$  गुणिले  $2$  टॅन  $x$  ने  $1$  वजा वेळ स्केअर  $x$  आणि नंतर गुणाकार केला जातो.

एक वजा टॅन स्केअर  $x$  असलेले अंश आणि भाजक दोन्ही आपल्याला  $\tan^2 x$  मिळेल  $\tan^2 x$  समान  $\tan x$  गुणिले एक वजा  $\tan$  चौरस  $x$  अधिक दोन  $\tan x$  वर म्हणजे तो अंश आहे एक वजा टॅन स्केअर  $x$  वजा दोन टॅन स्केअर  $x$  जो समान आहे आणि नंतर हे आहे उघडल्यास या ब्रॅसेस येथे आपल्याला शेवटी मिळतात टॅन तीन  $x$  हे तीन टॅन  $x$  वजा टॅन घन  $x$  वर एक वजा तीन टॅन स्केअर  $x$  च्या बरोबरीचे असणे हे केवळ तेव्हाच स्पष्ट केले जाते जेव्हा तीन  $x$  हा  $\pi$  वरील दोनचा  $n$  विषम गुणाकार नसतो तेव्हा आम्ही  $\cot x$  हे कोटॅजेंट फंक्शन सादर केले होते आणि आमच्याकडे होते कॉट  $x$  हे टॅन  $x$  वर एक बरोबर आहे असे परिभाषित केले आहे

म्हणून या स्लाइडमध्ये आपण कॉट  $x$  आणि कॉट  $y$  च्या संदर्भात कॉट  $x$  अधिक  $y$  ची अभिव्यक्ती मिळविण्याचा प्रयत्न करणार आहोत म्हणून येथून पुढे  $x$  अधिक  $y$  चा कोटॅजेंट आहे  $x$  अधिक  $y$  च्या  $\tan$  वर  $1$  आणि आपल्याला  $\tan x$  अधिक  $y$  साठी अभिव्यक्ती माहित आहे जी  $\tan x$  अधिक  $y$  आहे  $\tan x$  अधिक  $\tan y$  वर  $1$  वजा  $\tan x \tan y$  ही अभिव्यक्ती वापरून येथे पहिल्या समीकरणात आपल्याला  $\cot x$  अधिक मिळते  $y$  समान एक वजा  $\tan x \tan y$  वर  $\tan x$  अधिक

10  $y$  आता  $\frac{\tan x}{\tan y}$  ने अंश आणि भाजक दोन्ही डिंग केले तर आपल्याला  $\tan x \tan y$  वर एक मिळेल, त्यामुळे येथे ही संज्ञा कोणती आहे वजा  $\tan x \tan y$  भागिले  $\tan x \tan y$  तुम्हाला  $\tan x$  वर  $\tan x \tan y$  वर भागिले एक मिळेल  $\tan y$  वर  $\tan x \tan y$  म्हणून येथे हे रद्द होईल आणि येथे  $y$  रद्द होणार आहे ही विशिष्ट संज्ञा येथे काही नाही परंतु एक वर टॅन  $x$  गुणा एक टॅन  $y$  वर एक टॅन  $x$  वर कॉट  $x$  एक टॅन  $y$  वर  $\cot y$  आहे म्हणून ही संज्ञा येथे  $\cot x$  गुणिले  $\cot y$  आहे आणि एक  $\tan y$  येथे  $\cot y$  वन वर  $\tan x$  आहे  $x$  म्हणून शेवटी आपण  $\cot$  बरोबर  $x$  अधिक  $y$  बरोबर  $\cot x \cot y$  वजा एक वर समाप्त करतो  $\cot x$  अधिक  $\cot y$  आता  $x$  चा कोटॅजंट टॅन  $x$  वर एक आहे जो  $x$  चा कोटॅजंट  $x$  च्या साइन वर  $x$  चा कोसाइन आहे तो अनंत अधिक वजा अनंत होतो जेव्हा  $x$  चे साइन शून्यावर जाते जे घडते जेव्हा  $x = \pi$  चा गुणाकार असतो म्हणून  $x$  अधिक  $y$  च्या कोटॅजंटसाठी ही अभिव्यक्ती फक्त तेव्हाच चांगली परिभाषित केली जाते जेव्हा  $x$  अधिक  $y$  हा गुणाकार नसतो  $\pi$  चा आणि अर्थातच  $\pi$  वरून  $x$  अधिक  $y$  च्या कोटॅजंटची ही अभिव्यक्ती आपल्याला  $x$  उणे  $y$  च्या कोटॅजंटची अभिव्यक्ती मिळू शकते.

आपल्याला आता या समीकरणात  $y$  ला वजा  $y$  ने बदलण्याची आवश्यकता आहे कारण  $x$  चा कोटॅजंट टॅन  $x$  वर एक आहे आणि  $\tan x$  हे विषम फंक्शन आहे त्यामुळे  $x$  चा कोटॅजंट हे देखील विषम फंक्शन असेल आणि म्हणून  $x$  वजा  $y$  चा  $\cot$  येथे  $y$  च्या जागी वजा  $y$  ने केल्यास  $x$  चा  $\cot x y$  उणे 1 वर  $\cot x$  अधिक  $\cotangent$  मिळेल वजा  $y$  चा उणे  $y$  चा कोटॅजंट आहे कारण  $x$  चा कोटॅजंट वजा  $y$  च्या स्पॅशिकिसाठी विषम फंक्शन आहे आणि  $y$  च्या कॉटचे वजा होईल म्हणून हे कॉट  $y$  वजा कॉट  $x$  वर एक अधिक  $\cot x \cot y$  होईल आणि ही अभिव्यक्ती पुन्हा चांगली आहे जेव्हा  $x$  उणे  $y$  हा  $\pi$  चा गुणाकार नसतो तेव्हाच परिभाषित केले जाते म्हणून जसे आपण दोन  $x$  च्या  $\tan$  आणि तीन  $x$  च्या  $\tan$  साठी अभिव्यक्ती काढली त्याप्रमाणे आपण  $x$  च्या  $\cot$  च्या संदर्भात दोन  $x$  च्या  $\cot$  साठी अभिव्यक्ती काढू शकतो

$x$  अधिक  $y$  म्हणजे  $x$  गुणिले कॉट  $y$  ची खाट वजा एक ओव्हर कॉट  $x y$  ची अधिक खाट आणि म्हणून या  $y$  च्या जागी  $x$  च्या बरोबरीने  $y$  च्या बरोबरीने  $x$  च्या बरोबरीने आपल्याला जे मिळते ते म्हणजे दोन  $x$  ची खाट कॉट  $x$  च्या कॉट  $x$  च्या बरोबर असते म्हणजे कॉट स्केअर  $x$  वजा एक भागिले दोन वेळा  $\cot x$  म्हणून आपल्याला  $x$  च्या कॉटच्या संदर्भात दोन  $x$  च्या कॉटसाठी एक अभिव्यक्ती मिळाली

आणि त्याचप्रमाणे आपण  $x$  च्या खाटाच्या संदर्भात तीन  $x$  च्या खाटासाठी फंक्शन देखील काढू शकतो या समीकरणात आपण  $y$  ला दोन  $x$  ने बदलतो.

$x$  च्या अधिक दोन  $x$  म्हणजे तीन  $x$  म्हणजे  $x$  ची खाट दोन  $x$  वजा एकच्या खाटावर  $x$  च्या खाटावर  $x$  अधिक दोन  $x$  चा भाग आणि नंतर आपण मागील स्लाइडवरून दोन  $x$  च्या खाटासाठी अभिव्यक्ती वापरतो त्यामुळे आपल्याला  $x$  ची खाट मिळते दोन  $x$  च्या कॉटमध्ये कॉट स्केअर  $x$  वजा एक वर दोन कॉट  $x$  होता त्यामुळे अंश आणि भाजक दोन कॉट  $x$  ने गुणाकार केल्याने शेवटी आपल्याला मिळते आणि हे पुन्हा तेव्हाच परिभाषित केले जाते जेव्हा तीन  $x$  हा  $\pi$  चा गुणाकार नसतो म्हणून मागील स्लाइडसपैकी एकामध्ये आम्ही टॅन फंक्शनवर कोटॅजंट फंक्शन एक असण्याची व्याख्या केली होती, जसे की आपल्याकडे आहे करण्यासाठी आम्ही cosecant फंक्शन नावाचे दुसरे फंक्शन परिभाषित करतो त्यामुळे फंक्शनचे नाव cosecant आहे परंतु आपण त्याला थोडक्यात cosec म्हणतो आणि  $x$  चा cosec बरोबर 1 वर sine  $x$  म्हणून परिभाषित केले आहे,

त्यामुळे या व्याख्येवरून हे स्पष्टपणे दिसून येते की डोमेन cosecant फंक्शन हे sine फंक्शनच्या डोमेन प्रमाणेच असेल जे सर्व वास्तविक संख्यांचा संच आहे पुढे आपल्याला माहित आहे की कोणत्याही  $x$  साठी sine  $x$  च्या वास्तविक मोड एक पेक्षा कमी आहे परंतु cosecant  $x \sin x$  वर एक आहे आणि म्हणून या संबंधातून आणि या वस्तुस्थितीवरून असे दिसून येते की कोणत्याही  $x$  वास्तविक साठी cosecant  $x$  चे मोड नेहमी एकापेक्षा मोठे असते ज्यावरून आपण असे म्हणू शकतो की cosecant फंक्शनची श्रेणी म्हणजे दोन मध्यांतरांमधील पहिले मध्यांतर आहे.

वजा अनंत ते वजा वन युनियन अशा प्रकारे वजा एकचे मूल्य सेट युनियनमध्ये दुसऱ्या मध्यांतरासह एक ते अनंतापर्यंत असेल म्हणून हा  $\text{range}$  प्रमाणेच cosecant फंक्शनचा श्रेणी संच आहे

$y$  आम्ही cosecant फंक्शन परिभाषित करतो दुसरे एक अतिशय लोकप्रिय त्रिकोणमितीय फंक्शन म्हणजे secant फंक्शन हे नाव secant आहे थोडक्यात आम्ही ते  $x$  चा  $\sec 1$  वर  $\cos x$  म्हणून लिहितो आणि म्हणून secant फंक्शनचे डोमेन समान असेल  $\cos$  फंक्शनचे डोमेन जे सर्व रियल नंबर्सचा संच आहे आणि पुन्हा cosecant फंक्शनच्या बाबतीत जसे आहे आणि कारण  $\cos x$  च्या कोणत्याही  $x$  वास्तविक मोडसाठी एकापेक्षा कमी आहे म्हणून ही वस्तुस्थिती आणि ही व्याख्या वापरून ती खालीलप्रमाणे आहे की कोणत्याही  $x$  साठी secant  $x$  चे वास्तविक मोड 1 च्या बरोबरीने मोठे असले पाहिजे आणि म्हणून आपण असे लिहू शकतो की secant फंक्शनची श्रेणी पुन्हा cosecant फंक्शनच्या श्रेणी सारखीच आहे जी इंटरव्हल वजा अनंताचे मिलन आहे. मायनस वन युनियन वन ते अनंत आता आम्ही वेगवेगळ्या त्रिकोणमितीय फंक्शन्समधील अनेक ओळख आणि संबंध शिकलो आहोत आणि बेरीज आणि फरकांसाठीच्या अभिव्यक्ती आणि स्पॅशिका आणि साइन आणि कोसाइन कोनांची बेरीज आणि फरक आपण काही समस्या सोडवण्याचा प्रयत्न करू या म्हणून या समस्येमध्ये हे दाखवण्यास सांगितले आहे की या डाव्या हाताच्या बाजूची अभिव्यक्ती दोन  $x$  च्या कॉट सारखी आहे म्हणून समस्या सोडवण्याची मुख्य कल्पना म्हणजे नमुना शोधणे आणि प्रयत्न करणे.

आम्ही शिकलेल्या अभिव्यक्ती आणि ओळख या नमुन्यांवर लागू करण्यासाठी जे तुम्हाला प्रश्नातील अभिव्यक्तींमध्ये आढळतात, उदाहरणार्थ येथे आम्ही पाहतो की डाव्या बाजूला आमच्याकडे दोन कोसाइनची बेरीज आहे आणि जर तुम्हाला आठवत असेल की आमच्याकडे ही ओळख होती की  $\cos of b$  चा अधिक  $\cos$  बरोबर

a plus b च्या दोन पट  $\cos a$  plus b च्या  $\cos$  of a उणे b वर दोन म्हणून हे  $a$  हे मागील लेक्चरमध्ये शिकवले होते आणि म्हणून ही मागील लेक्चरची स्लाइड आहे जिथे आपण ही ओळख दर्शविली आहे  $\cos a$  plus  $\cos b$  च्या दोन पट  $\cos a$  plus b च्या दोन पट  $\cos a$  उणे b च्या दोन पटीने  $\cos a$  च्या बरोबरीने  $\cos a$  बरोबर हा पॅटर्न इथे मिळतोय  $\cos a$  म्हणजे  $a$  सात  $x$  म्हणजे तीन  $x$  म्हणून  $a$  टाकून सात  $x$  आणि व्हा तीन  $x$  ची काल म्हणजे सात  $x$  ची  $\cos$  अधिक  $x$  तीन  $x$  ची  $\cos$  दोन पट आहे म्हणजे अधिक b दहा म्हणजे दहा  $x$  आणि दोन ने भागल्यास तुम्हाला पाच  $x$  ची  $\cos$  मिळेल आणि उणे b चार  $x$  असेल.

दोन हे दोन  $x$  असेल म्हणून दोन  $x$  चे  $\cos$  आणि नंतर भाजकात आपल्याला  $\sin a$  वजा चिन्ह b चा नमुना दिसतो आणि व्याख्यान 3 मधील मागील स्लाइड्सपैकी एकामध्ये देखील याची चर्चा केली होती जी मी आता तुमच्यासमोर पुनरुत्पादित करत आहे.  $\sin a$  minus  $\sin b$  ही अभिव्यक्ती व्युत्पन्न केली गेली आहे म्हणून आम्ही ते येथे वापरण्याचा प्रयत्न करू, म्हणून मी ते तुमच्यासाठी पुन्हा लिहितो.

सात  $x$  आणि b च्या बरोबरीने तीन  $x$  बरोबर ठेवल्यास आपल्याला सात  $x$  वजा साइन तीन  $x$  ची साइन मिळेल दोनच्या वर अधिक b च्या दोन पट  $\cos$  पाच  $x$  असेल आणि दोन वरील वजा b दोन  $x$  असेल म्हणून आपण असे शेवटी आपल्याला अंशासाठी हे  $a$  अभिव्यक्ती मिळतात आणि म्हणून हे अंशासाठी आहे आणि हे भाजकासाठी आहे  $nd$  मग जेव्हा आपण या दोघांना भागतो तेव्हा याला याने भागाकार केल्यास आपल्याला काय मिळते ते म्हणजे येथे डाव्या हाताची बाजू  $2 \cos 5 x$  मध्ये  $\cos 2 x$  च्या बरोबरीची असेल आणि हा भाजक याच्या बरोबरीचा असेल.

येथे अभिव्यक्ती  $2 \cos$  पाच  $x$  वेळा दोन  $x$  च्या  $\sin$  म्हणून दोन आणि दोन रद्द होतात  $\cos$  पाच  $x$  आणि  $\cos$  पाच  $x$  रद्द होतात जे उरते ते  $\cos$  दोन  $x$  वर  $\sin$  दोन  $x$  जे दोन  $x$  च्या कॉटच्या समान आहे जी उजवीकडे आहे येथे आणि हे याच्या बरोबरीचे आहे या वस्तुस्थितीचा पुरावा पूर्ण करते, म्हणून आपण येथे जे शिकलो ते प्रश्नातील किंवा तेथे असलेल्या अभिव्यक्तींमधील नमुने शोधणे आणि

आपण पूर्वी शिकलेल्या अभिव्यक्ती लागू करू शकतो का हे पाहण्याचा प्रयत्न करणे.

येथे प्रश्नासाठी उदाहरणार्थ या प्रकरणात आम्ही  $\cos a$  अधिक  $\cos b$  आणि  $\sin a$  वजा चिन्ह b हे नमुने ओळखले आणि आम्ही त्यांना  $\cos$  आणि  $\sin$  चे गुणाकार म्हणून व्यक्त करतो ज्यामुळे रद्दीकरण झाले आणि नंतर आमच्याकडे आणखी एका समान प्रश्नाचे अंतिम उत्तर येथे आहे तीन कोसाइनची बेरीज म्हणून एकतर आपण प्रथम हे आणि हे जोडून सुरुवात करू शकतो आणि नंतर आपण या दोनच्या बेरीजमध्ये जोडू शकतो किंवा आपण प्रथम  $\cos$  तीन  $x$  आणि  $\cos$  पाच  $x$  जोडू शकतो आणि नंतर नंतर  $\cos$  चार  $x$  जोडू शकतो.

$\cos a$  plus  $\cos b$  फॉर्म्युला वापरून  $\cos$  four  $x$  बरोबर  $\cos$  three  $x$  जोडतो आणि नंतर  $\cos$  Five  $x$  जोडतो ही समस्या अशी आहे की जर आपण  $\cos$  तीन  $x$  आणि  $\cos$  चार  $x$  जोडले तर  $\cos$  चे सूत्र लक्षात असेल तर a अधिक  $\cos b$  हे दोन  $\cos a$  अधिक b by two मध्ये  $\cos$  सात  $x$  x दोन असे मिळतील, म्हणून जर तुम्ही तीन  $x$  सह दोन घेतले आणि b चार  $x$  घेतले तर आम्ही हे आणि हे जोडत आहोत आपल्याला  $\cos$  सात  $x$  बाय दोन आणि  $\cos x$  x दोनने दोन पट मिळतील समस्या अशी आहे की या दोन संज्ञांमध्ये  $\cos$  पाच  $x$  बरोबर काहीही साम्य नाही

त्यामुळे वस्तुस्थिती आहे म्हणून काहीतरी सामान्य घटक काढणे खूप कठीण होईल कारण शेवटी आपण काय पाहिले तर आपल्याला येथे उजव्या बाजूला चार  $x$  आवश्यक आहे म्हणून हे जोडण्याचा प्रयत्न करणे निवडणे आणि हे प्रथम आहे योग्य रणनीती नाही त्यामुळे परीक्षेतील वेळेचा अपव्यय होईल म्हणून दुसरा पर्याय तीन  $x$  आणि पाच  $x$  जोडण्याचा असू शकतो आणि ते अधिक चांगले आहे कारण जेव्हा तुम्ही तीन  $x$  जोडता तेव्हा तुम्ही तीन  $x$  ची  $\cos$  अधिक पाच  $x$  ची  $\cos$  लिहिता तेव्हा तुम्हाला जे मिळेल ते  $x$  च्या चार  $x$  गुणिले  $\cos$  च्या दुप्पट आहे म्हणून हे  $\cos 3 x$  अधिक  $\cos 5 x$  आहे आता तुम्हाला  $\cos 4 x$  देखील जोडणे आवश्यक आहे पण आता चांगली गोष्ट अशी आहे की हे याकडे आधीच हे  $\cos 4 x$  आहे फॅक्टर म्हणून ही संज्ञा आणि हे कॉस  $4 x$  आणखी एकत्र करणे सोपे होते ती म्हणजे उजव्या बाजूला देखील  $4 x$  आहे म्हणून आपण तीन  $x$  आणि चार  $x$  जोडण्याऐवजी प्रथम तीन  $x$  जोडले पाहिजे.

आणि प्रथम पाच  $x$  म्हणून नंतर अंक लिहिता येईल म्हणून डाव्या बाजूचा अंश दोन  $\cos$  चार  $x$  गुणिले  $\cos x$  असे लिहिता येईल जे  $\cos$  तीन  $x$  आणि  $\cos$  पाच  $x$  आणि नंतर अधिक  $\cos$  चार  $x$  म्हणून  $\cos$  चार  $x$  गुणांक काढता येतो आणि तो  $\cos$  चार  $x$  मध्ये एक अधिक दोन  $\cos x$  म्हणून लिहिता येतो त्याच कारणास्तव भाजकावर आपण प्रथम साइन पाच  $x$  सह  $\sin$  तीन  $x$  जोडण्याचा प्रयत्न करू, जर तुम्हाला साइन a प्लस चिन्ह b चे सूत्र आठवत असेल आणि हे मागील लेक्चरमध्ये

दोन साइन a अधिक b ओव्हरच्या बरोबरीचे असेल.

2 च्या वर एक वजा b च्या दोन पट  $\cos$

त्यामुळे  $3 x$  ची

बरोबर पाच  $x$  ची साइन चार  $x$  च्या दुप्पट साइन बरोबर आहे कारण a तीन  $x$  आहे आणि म्हणून a अधिक b आठ  $x$  दोन वर ते a च्या  $\cos$  मध्ये चार  $x$  होते उणे b द्वारे दोन म्हणजे उणे b म्हणजे उणे दोन  $x$  तर उणे दोन  $x$  वर दोन  $x$  उणे  $x$  ची  $\cos$  आहे पण उणे  $x$  ची  $\cos x$  च्या  $\cos$  सारखीच आहे म्हणून आपल्याला हे मिळेल आणि नंतर अंतिम डाव्या बाजूच्या भाजकासाठी अभिव्यक्ती असेल

आपण फक्त चार  $x$  वर स्वाक्षरी करण्यासाठी ही अभिव्यक्ती जोडू म्हणजे आपल्याला जे मिळेल ते पाप चार  $x$  पुन्हा सामान्य आहे म्हणून आपण ते साइन चार  $x$  गुणिले एक अधिक दोन  $\cos x$  म्हणून लिहू शकतो म्हणून हे आहे भाजक म्हणजे हा अंश आहे आणि हा भाजक आहे आणि शेवटी जेव्हा आपण भाग करतो भाजक द्वारे अंश आपण पाहतो ते म्हणजे 1 अधिक  $2 \cos x$  ही संज्ञा अंश

आणि भाजक दोन्हीमध्ये आहे म्हणून जेव्हा आपण भाग करतो तेव्हा तो रद्द होतो आणि नंतर आपल्याला  $\cos 4x$  ने भागिले  $\sin 4x$  मिळते जे उजवीकडे असते हाताची बाजू जी कॉट  $4x$  आहे

त्यामुळे या उदाहरणाद्वारे आपण पाहिले की कोणते घटक प्रथम जोडले जावेत हे आपण ठरवणे फार महत्वाचे आहे अन्यथा यामुळे वेळ वाया जाईल अशी आणखी एक मनोरंजक समस्या खालीलप्रमाणे आहे म्हणून ती आम्हाला मूल्य मोजण्यास सांगत आहे.

18 अंशांची सायन आता येथे लक्षात येते की

$x$  ची सायन पाई च्या  $\cos$  by 2 उणे  $x$  बरोबर असल्याने ही आणखी एक ओळख आहे ज्याची आपण मागील व्याख्यानात चर्चा केली होती आपण पाहतो की 36 अंशांची सायन 54 च्या कोसाइन बरोबर आहे.

आम्ही 36 आणि 54 का निवडले याचे कारण म्हणजे सर्व प्रथम ते 90 अंशांपर्यंत जोडतात आणि दुसरे कारण म्हणजे ते दोन्ही 18 अंशांचे गुणाकार आहेत म्हणून  $\sin 2\theta$  आणि  $\cos 3\theta$  साठी सूत्र वापरण्याची कल्पना आहे  $\theta$  बरोबर 18 अंश आहे कारण  $\theta$  बरोबर 18 अंश  $2\theta$  36 अंश आहे आणि  $3\theta$  54 अंश आहे आता आपल्याला माहित आहे की  $\sin 2\theta$   $2\sin\theta\cos\theta$  आहे आणि आपल्याला हे देखील माहित आहे की तीन थीटाचा  $\cos$  चार  $\cos$  आहे क्यूब थीटा मायनस थ्री कॉस थीटा या दोन्ही एक्सप्रेसन्स आपण मागील लेक्चरमध्ये काढल्या आहेत त्यामुळे इथून आपल्याला जे मिळते ते म्हणजे थिटा बरोबर अठरा आणि हे समान आहे आपण असे लिहू शकतो की 2 सायन थीटा कॉस थीटा मायनस 4 कॉस क्यूब थीटा वजा 3  $\cos\theta$  बरोबर शून्य आहे कारण ही  $\sin 2\theta$  आहे आणि ही  $\cos 3\theta$  आहे आणि  $\theta$  साठी ते अठरा अंश समान आहेत आता आपण पाहतो की या सर्व संज्ञांमध्ये  $\cos\theta$  हा एक सामान्य घटक आहे म्हणून आपण याला  $\cos\theta$  2 मध्ये लिहू शकतो.

$\sin\theta$  उणे 4  $\cos$  स्केअर थीटा अधिक तीन समान शून्य पण म्हणून येथे संभाव्य उपाय म्हणजे एकतर ही संज्ञा शून्य आहे किंवा ही संज्ञा 0 आहे परंतु 18 अंशांच्या बरोबरीच्या थीटा साठी आपल्याला माहित आहे की 18 अंशांची  $\cos 0$  च्या बरोबरीची नाही

त्यामुळे या समीकरणाचे समाधान करण्याचा एकमेव मार्ग म्हणजे जर ही संज्ञा शून्य बरोबर म्हणजे अठरा अंश थिटा साठी असेल तर हे समीकरण चार कॉस स्केअर थीटा वजा दोन पाप थीटा वजा तीन समान शून्य असेल तर आम्हाला माहित आहे की कॉस स्केअर थीटा समान आहे एक वजा  $\sin$  स्केअर थीटा म्हणजे 4 वजा 4 सायन स्केअर थीटा वजा 2 सायन थीटा वजा 3 समान 0 मिळवा आणि दुसऱ्या बाजूला 4 सायन स्केअर थीटा अधिक दोन सायन थीटा वजा एक शून्य असे लिहिता येईल.

त्यामुळे अठरा अंशांच्या बरोबरीची थीटा हे समीकरण पूर्ण करते आता हे मुळात आहे आहे डाव्या हाताची बाजू येथे  $\sin\theta$  मध्ये द्विपद बहुपदी आहे म्हणून आपण असे म्हणू की  $z$  आपण ते  $\sin\theta$  अशी व्याख्या करतो त्यामुळे आपल्याला चार  $z$  चौरस अधिक दोन  $z$  मिळेल वजा एक बरोबरी शून्य त्यामुळे या द्विघात समीकरणाला दोन संभाव्य उपाय आहेत आणि समाधाने  $z$  समान वजा दोन अधिक वजा वीस बाय आठ आहेत कारण अठरा अंशांचे चिन्ह सकारात्मक आहे  $1y$  शक्य मार्ग जो अर्थपूर्ण आहे तो येथे अधिक चिन्हासह आहे त्यामुळे शेवटी आपल्याला असे समजले की 18 अंशांची सायन उणे 2 अधिक मूळ 20 वर 8 वर 20 वर 8 आहे ज्याला पाच वजा एक वर चारचे वर्गमूळ म्हणून देखील लिहिता येईल आणखी काही समस्या हलवल्या जातात.

पुढे म्हणून या समस्येमध्ये आम्हाला पुन्हा हे सिद्ध करण्यास सांगितले आहे की ही डाव्या बाजूची अभिव्यक्ती आणि उजवीकडील ही अभिव्यक्ती दोन्ही समान आहेत, म्हणून जर आपण उजव्या बाजूला अभिव्यक्ती पाहिली तर आपल्याला कळेल की  $x$  चा कोसेकंट एक वर आहे.

$\sin x$  आणि  $x$  चा कॉटेज कोसाइन टॅन  $x$  वर एक आहे परंतु आपण ते  $x$  वर सायन  $x$  वर  $x$  चा कोसाइन म्हणून देखील लिहू शकतो

त्यामुळे हे  $x$  च्या सायनने  $x$  च्या एक वजा कोसाइन बरोबर होते

त्यामुळे आता आपण पाहतो की हा एक वजा कोसाइन आहे  $x$  चा येथे तसेच येथे येतो, जर तुम्हाला हा अंश समान हवा असेल परंतु समस्या अशी आहे की येथे एक वजा  $\cos x$  वर्गमूळाच्या आत आहे म्हणून एक वजा  $\cos x$  वर्गमूळाच्या बाहेर असण्याचा एक मार्ग आहे.

म्हणजे आपण डाव्या बाजूने गुणाकार करतो

1 उणे  $\cos x$  चे वर्गमूळ असलेले अंश आणि भाजक दोन्ही म्हणजे आपण दोन्ही अंश आणि डाव्या बाजूचा भाजक एक वजा कोसाइन  $x$  च्या वर्गमूळाने गुणाकार करतो

त्यामुळे अंश आता एक वजा  $\cos x$  होईल जसे आपल्याला हवे होते.

आणि भाजक  $\cos$  वर्ग  $x$  वर एक चे मूळ बनतो परंतु आपल्याला माहित आहे की एक वजा  $\cos$  वर्ग  $x$  हा  $\sin$  वर्ग  $x$  आहे आणि नंतर  $\sin$  वर्ग  $x$  चे मूळ  $\sin x$  असेल

म्हणून हे समान आहे जे येथे उजव्या बाजूशिवाय दुसरे काहीही नाही

जे या प्रश्नाचा पुरावा पूर्ण करते

आणखी काही अवघड समस्या

त्यामुळे या प्रश्नात आम्हाला  $\cos$  चे मूल्य 40 अंश उणे 20 अंशांचे कोसाइन अधिक 80 अंशांचे कोसाइन शोधण्यास सांगितले आहे, त्यामुळे सुरुवातीला ही एक अतिशय कठीण समस्या वाटू शकते.

कारण हे सर्व कोन हे कोन आहेत ज्यासाठी सायन आणि कोसाइन हे आपल्याला माहित नाही आपल्याला सहसा 45 अंश किंवा 30 अंश किंवा 60 अंशांचे सायन आणि कोसाइन लक्षात राहतात किंवा कदाचित आपण 15 आणि 75 अंशांसाठी त्याची गणना करू शकतो.

rees

त्यामुळे हे थोडे कठीण वाटू शकते परंतु नंतर येथे पाहण्याची युक्ती ही आहे की आपण पुन्हा कोसाइन जोडतो आणि वजा करत आहोत, म्हणून लगेच आपण  $\cos a + \cos b$  सूत्र आठवण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे जो  $\cos a + \cos b$  आहे.

दोन  $\cos$  अधिक  $b$  वर दोन बरोबर  $\cos$  वजा  $b$  वर दोन

त्यामुळे यामुळे थोडी आशा निर्माण होते कारण या तीन संज्ञामधून जर आपण हे  $a$  आणि  $b$  बरोबर निवडले तर कदाचित या  $\cos$  कोनांपैकी एक अधिक  $b$  by two किंवा  $a$  उणे  $b$  by two.

एक कोन असू शकतो ज्यासाठी आपल्याला कोसाइनचे मूल्य माहित आहे आणि ते आपल्याला समस्या सोडवण्यास मदत करू शकते आता या तीन कोनांकडे पाहिल्यास आपण पाहतो की जर आपण  $a$   $40^\circ$  अंश आणि  $b$   $80^\circ$  अंश घेतले तर आपल्याला  $40^\circ$  अधिक दिसेल.

$80^\circ$  भागिले  $2$  म्हणजे  $120^\circ$  भागिले  $2$  म्हणजे  $60^\circ$  अंश आहे आणि आपल्याला माहित आहे की  $60^\circ$  अंशाचा कोसाइन अर्धा आहे म्हणून आपण हा रूट वापरून पाहू या म्हणजे  $40^\circ$  अंश अधिक  $\cos 80^\circ$  हे सूत्र वापरत आहे  $\cos$  च्या  $2$  पट

$80^\circ$  वजा  $40^\circ$  चा  $60^\circ$  अंश गुणाकार म्हणजे उणे  $s$  म्हणजे  $40^\circ$  वर  $2$  म्हणजे ते  $20^\circ$  अंश असेल

त्यामुळे हे आता  $\cos 60^\circ$  अंशांच्या बरोबरीचे होईल, आम्हाला माहित आहे की साठ अंशाची  $\cos$  अर्धाशी आहे म्हणून येथे ठेवल्यास आपल्याला हे वीस अंशांच्या  $\cos$  बरोबर मिळते आणि नंतर अंतिम अभिव्यक्ती स्पष्टपणे  $0$  आहे कारण ही  $\cos 40^\circ$  आणि  $\cos 80^\circ$  ची बेरीज  $\cos 20^\circ$  आहे आणि आम्ही येथे  $\cos 20^\circ$  वजा करत आहोत

त्यामुळे अंतिम उत्तर  $0$  आहे.

ही jee परीक्षांपैकी एक समस्या आहे म्हणून पुन्हा ही समस्या दिसते.

खूप भयंकर कारण तुम्ही थीटा पासून सुरू होऊन  $8$  थीटा पर्यंत गेलात पण अहो पुन्हा काय करायचे आहे ते म्हणजे अभिव्यक्तीमध्ये नमुने पाहणे,

त्यामुळे येथे नमुना असा आहे की पहिल्या पदापासून दुसऱ्या पदापर्यंत स्पर्शिकेच्या आतील कोन दुप्पट होत आहे आणि पुन्हा इकडून तिकडे दुप्पट होत आहे आणि नंतर पुन्हा येथे ते इकडे

त्यामुळे कदाचित तेथे असे दिसते आहे की दोन  $x$  चे  $\tan$  चे सूत्र सोपे असू शकते म्हणून जर तुम्हाला दोन  $x$  चे टॅन लक्षात असेल तर दोन टॅन  $x$  समान एक वजा टॅन स्केअर  $x$  ने भागले आता आपण यापासून सुरुवात करू या डाव्या बाजूने सुरुवात करू या डाव्या हातातील शेवटची संज्ञा  $8$  थीटाच्या  $8$  पट कोटॅजंट आहे जी प्रत्यक्षात आठ थीटाचा कोटॅजंट एक आहे म्हणून लिहिता येईल टॅन आठ थीटा म्हणजे  $x$  चार थीटाच्या बरोबरीने घ्यायचे म्हणजे आपल्याकडे आठ थीटाचा टॅन आहे  $4$  थीटाच्या दोन टॅनवर  $1$  वजा टॅन स्केअर  $4$  थीटा, म्हणून ही संज्ञा मिळविण्यासाठी आपल्याला ही अभिव्यक्ती उलटी करणे आवश्यक आहे

त्यामुळे आपल्याला  $8 \cot 8$  मिळेल  $\theta$  अधिक  $4$  आणि आमच्या लक्षात आले की अहो या कॉट आठ थीटा अभिव्यक्तीमध्ये चार थीटाचा टॅन असेल आणि पुढील अभिव्यक्ती चार थीटाचा टॅन असेल, म्हणून आम्ही ते त्याच्याशी जोडण्याचा प्रयत्न करू जेणेकरून आठ कॉट आठ थीटा अधिक चार टॅन चार थीटा आठ गुणा एक वजा टाइम स्केअर चार थीटा बाय दोन टॅन चार थीटा अधिक चार थीटाच्या चार पट स्पर्शिका असेल तर हे चार होईल म्हणजे  $4$  पट आहे कारण आपल्याकडे  $4$  येथे आणि येथे देखील आहेत आणि आपण ते सोपे करतो म्हणून ते होते

त्यामुळे हे  $b$  चार थीटा पेक्षा  $1$  वर येतो

कारण टॅन चार थीटा वेळा टॅन चार थीटा हा टॅन स्केअर फोर थीटा आहे जो येथे या वजा टॅन स्केअर फोर थीटासह रद्द होतो

त्यामुळे डाव्या हाताची बाजू आता टॅन ऑफ थीटा अधिक दोन वेळा  $n$  दोन थीटा आणि नंतर अधिक कमी करते चार बाय दहा आणि नंतर आपण तीच प्रक्रिया पुन्हा करतो आपण टॅन चार थीटा लिहू दोन वेळा बरोबरी करतो कारण आता या टर्मच्या आधी पुढील टर्म टॅन  $2$  थीटा आहे म्हणून आपल्याला हा टॅन  $4$  थीटा वेळेच्या  $2$  थीटामध्ये व्यक्त करू इच्छितो.

जेंव्हा आपण हे आणि हे पद एकत्र करतो तेंव्हा आपण कदाचित तिथे काही संज्ञा रद्द करू शकू, ही कल्पना आहे म्हणून मग आपण ही बेरीज पाहतो तेव्हा आपल्याला  $4$  वर टॅन  $4$  थीटा अधिक  $2$  वेळा टॅन  $2$  थीटा आहे.

$4$  ते  $1$  उणे टाइम स्केअर  $2$  थीटा वर  $2$  टॅन  $2$  थीटा अधिक  $2$   $10$  ते थीटा दोन आहे म्हणून आपण येथे दोन वर मिळवू जर तुम्ही हे सोपे केले तर तुम्हाला दोन वर टॅन दोन थीटा मिळेल आणि शेवटी डाव्या हाताला मिळेल.

डाव्या हाताची बाजू आहे म्हणून शेवटी डाव्या हाताची बाजू टॅन थीटा अधिक दोन वर टॅन  $2$  थीटा बनते आणि आता पुन्हा टॅन थीटा वापरून आपल्याला टॅन  $2$  थीटा व्यक्त करणे आवश्यक आहे जेणेकरून येथे काही संज्ञा रद्द केल्या जाऊ शकतात हे आपल्याला माहित आहे की  $2$  थीटाचा टॅन आहे

$1$  वजा टॅन स्केअर थीटा वर  $2$  टॅन थीटा

त्यामुळे येथे ही अभिव्यक्ती वापरून आपल्याला टॅन थीटा अधिक  $2$  ते  $1$  वजा टॅन स्केअर थीटा बाय  $2$  टॅन थीटा बरोबर मिळतील,

त्यामुळे हे रद्द होईल आणि

त्यामुळे हा टॅन थीटा रद्द होईल.

हा वजा टॅन स्केअर थीटा बाय टॅन थीटा

त्यामुळे शेवटी  $1$  बाय टॅन थीटा म्हणजे कॉट थीटा म्हणजे तीच उजवी बाजू होती

त्यामुळे या अत्यंत कठीण वाटणाऱ्या समस्येचा पुरावा पूर्ण होतो म्हणून आपण येथे आणखी एका समस्येची चर्चा करूया म्हणून पुन्हा आपल्याला दाखवावे लागेल की ही डाव्या हाताची बाजू या उजव्या हाताच्या बाजूच्या बरोबरीची आहे आणि येथेही आपल्याला एक नमुना दिसतो की एक कोन  $a$  आणि नंतर दोन  $a$  आणि नंतर चार  $a$  आणि नंतर आठ  $a$  आहे तर आपण जे पाहतो ते आपण पाहतो.

एक  $\sin 8a$  आणि  $a \cos$  चार  $a$  आणि

त्यामुळे लगेच तुमच्या मनात धोक्याची घंटा वाजली पाहिजे की आम्हाला माहित आहे की  $2\theta$  ची  $\sin 2\theta$   $\sin \theta$   $\cos \theta$  आहे, म्हणून जर आपण  $\theta$  ला चार  $a$  च्या बरोबरी ठेवली तर इथे काय मिळेल आठ  $\sin$ .

a दोन साइन चार a cos चार a आहे

त्यामुळे आम्हाला येथे  $\cos 4 a$  मिळेल आणि आशा आहे की हा  $\cos 4 a$  रद्द केला पाहिजे म्हणून आपण या उजव्या बाजूला पाहिल्यास आपल्याला काय मिळेल साइन 8 वर आठ चिन्ह a असेल दोन sine चार a मध्ये cos चार a वर आठ sin a म्हणून किमान आता आपल्याला एक पद मिळाले आहे जे lhs वर आहे

त्यामुळे आता आपल्याला फक्त हे दाखवायचे आहे की हे अगदी बरोबर आहे म्हणून आपल्याला हे दाखवायचे आहे की हे बरोबर आहे  $\cos a$  मध्ये  $\cos 2a$  आणि ते असेच केले जाऊ शकते कारण आपल्याला माहित आहे की sine चार a मध्ये हा  $\cos$  पुन्हा या फॉर्म्युलाचा वापर करून संज्ञा असेल परंतु  $\theta$  बरोबर दोन a च्या बरोबरीने आपल्याला sine चार a च्या बरोबरीने दोन sine दोन a मध्ये मिळेल  $\cos$  दोन a म्हणून

त्यामुळे आपल्याला दाखवावे लागेल की दोन sine चार a वर आठ sine a समान आहे तर आपल्याला हे दाखवायचे आहे आणि आताच आपण ही अभिव्यक्ती व्युत्पन्न केली आहे की चिन्ह 4 a च्या बरोबरीचे आहे म्हणून आपल्याला हे दर्शवायचे आहे प्रत्यक्षात आपण ही अभिव्यक्ती व्युत्पन्न केली आहे आम्ही लिहिले आहे की चिन्ह चार a आहे दोन वेळा पाप दोन वेळा दोन गुणा आता या sin फोर a च्या जागी ह्यावर टाकल्याने आपल्याला शेवटी sine दोन a मध्ये  $\cos$  दोन a वर दोन sine a म्हणजे तसे असल्यास ही गोष्ट याच्या बरोबरीची आहे आणि आपण पाहू शकता की आता आपल्याला हे  $\cos$  देखील मिळेल येथे दोन एक पद आणि आता हे खूप सोपे आहे कारण आम्हाला माहित आहे की साइन दोन a म्हणून जर तुम्ही आता फक्त ही संज्ञा पाहिली तर ती संज्ञा दोन साइन a कॉस a म्हणजे साइन टू ए वर टू साइन a आहे म्हणून हे रद्द होईल आणि नंतर हे  $\cos a$  आणि  $\cos$  दोन a च्या बरोबरीचे होते त्यामुळे हे  $\cos a \times \cos 2a$  सारखे होते

त्यामुळे या उदाहरणांवरून काय लक्षात आले पाहिजे की आपण नेहमी पॅटर्न पाहण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे आणि मार्गाच्या बाबतीत योग्य निर्णय घेण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे पुराव्यासाठी अनुसरण करणे आवश्यक आहे कारण यापैकी बहुतेक स्पर्धात्मक आहेत ई परीक्षा वेळेत आहेत आणि पुढील लेक्चरमध्ये आम्ही आणखी काही समस्या सोडवणार आहोत जे आह जे मुळात तुम्हाला अशा प्रकारच्या समस्या सोडवण्यास सोयीस्कर होतील धन्यवाद.