cos x کے لئے cos of x plus y اور cos x minus y مثلثی افعال پر تیسرے لیکچر میں خوش آمدید آخری لیکچر میں ہم نے
کے لئے ایک اظہار اخذ کیا ہے لہذا ہم جاری رکھیں گے۔ اس کے ساتھ اور اس لیکچر میں ہم سائن ٹو ایکس sine y اور sine x اور cos y
اور کچھ دیگر مشتقات بھی اخذ کرنے جارہے ہیں اس لیے آخری sine x cos x سین تھری ایکس کوس ٹو ایکس کوس تھری ایکس کے لیے
y کی جگہ اس ah اور پھر y سائن x جمع سائن cos x cos phi برابر ہے y مائنس x cos of لیکچر میں ہم نے ثابت کیا کہ
اس کو y کو مائنس cos x cos phi مائنس sin x sin y so برابر ہے y جمع cos x سے بدل کر ہمیں دوسرا اظہار ملا کہ
استعمال کیا جا سکتا ہے ان دو فارمولوں کو معروف زاویوں کے علاوہ کسی دوسرے زاویے کی کوسائن کو تلاش کرنے کے لیے استعمال کیا جا
سکتا ہے مثال کے طور پر ہم پہلے ہی کوسائن اور سائن کو 45 ڈگری اور 30 ڈگری کے لی جانتے ہیں تاکہ 15 کے کوزائن کو تلاش کرنے کے
ڈگری کے برابر ہے 30 y کے برابر 45 ہونے سے ڈگری ڈگری اور x لیے استعمال کیا جا سک ۔ اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے اور
مائنس 30 اور پھر یقینا میں یہاں یہ فارمولہ استعمال کرتا ہوں cos 45 لہذا اسے یہاں لکھا گیا ہے لہذا
30. sine یہاں sine 45 جمع cos 45 cos y جو ملتا ہے cos x تو ہمیں
برابر ہے جڑ 2 کے 3 کے برابر ہے۔ سائن cos 30 کے برابر ہے 1 بذریعہ جڑ 2 اور cos 45 تو یہ سب ہیں ڈگری ٹھیک ہے اور یہ یقینا
بھی 1 اوور روٹ 2 ہے اور سائن 30 آدھا ہے لہذا آپ کو ملے گا 45
اور cos x minus y ملتا ہے ایک جمع مربع جڑ تین سے زیادہ دو گنا جڑ دو کے برابر ہے اب cos تو یہ کیسے ہے آپ کو پندرہ ڈگری کا
کے لئے ان دو بنیادی فارمولوں کو استعمال کرتے ہوئے دیگر دیگر آسانیاں بھی اخذ کی جا سکتی ہیں مثال کے طور پر اگر plus x plus y
پھر اسے اس طرح لکھا جا سکتا ہے cos x cos y ہمیں دیا جائے۔ اس قسم کا ایک اظہار 2
تو آئیے یہاں ان دو مساوا
توں پر
توجہ مرکوز کریں لہذا اگر ہم ان دونوں مساوا
توں کو بائیں طرف جوڑ دیں
منسوخ ہونے جا رہا ہے کیونکہ جمع کے طور sin x sin y اور دائیں طرف y ملے گا۔ پلس cos x جمع y مائنس cos x تو ہمیں
برابر cos x cos y ملے گا اور اس لیے دو cos x cos y مائنس یہاں اور پھر یہ دونوں مل جائیں گے اور ہمیں دو sa i پر یہاں
ہے cos of x مائنس y جمع cos of x plus y اور اسی طرح اگر ہم cos x مائنس y مائنس کی گنتی کریں cos x plus y
تو ان دونوں مساوا
ملیں گے x sin y توں میں یہ اصطلاح منسوخ ہو جائے گی اور ہمیں دو گناہ
cos x plus y مائنس cos x مائنس y برابر ہے x sin y تو دو گناہ
تو بعد میں جب ہم بہت کچھ کرتے ہیں مثالیں آپ دیکھیں گے کہ اس قسم کے فارمولے بہت کارآمد ہوں گے اور اگر آپ اسے حفظ کر لیں
کا حساب کیسے لگا سکتے ہیں کوئی سوچ سکتا ہے کہ اب ہم cos تو اچھا ہو گا، چنانچہ ہم نے پچھلی سلائیڈ میں دیکھا تھا کہ ہم 15 ڈگری کی
ہے اور ہاں یہ ممکن ہے cos کی گنتی کر سکتے ہیں جو 7.5 ڈگری کا cos ڈگری کی گنتی کی ہے کیا ہم 15 ڈگری کے نصف cos 15
کے لیے ایک اظہار نکالیں اور پھر کیا کریں ہم یہ cosine کے x کے لحاظ سے دو cosine کے x تو ایسا کرنے کے لیے آئیے پہلے
کو cos کو پندرہ ڈگری کے نصف پندرہ ڈگری کے برابر رکھیں گے اور پھر ہم دیکھیں گے کہ ہم سات پوائنٹ پانچ ڈگری کی x کریں گے کہ ہم
کے طور پر لکھا جا سکتا ہے اور پھر ہم x جمع cos of x کو cos of two x حل کر سکتے ہیں اور تلاش کر سکتے ہیں، لہذا اب
کے برابر ہے لہذا جب x برابر y کے لیے استعمال کرتے ہیں لیکن اس کے ساتھ cos کے y جمع x پچھلی سلائیڈ پر موجود فارمولے کو
ڈالتے ہیں x کے برابر y آپ اس مساوات میں
بن جائے لیکن ہم جانتے x مائنس گناہ مربع x مربع cos مل جاتا ہے تاکہ sin x میں sin x مائنس cos x کو cos x تو آپ کو
کو ایک x ہے تمام ایکس کے لیے ایک کے برابر ہے اور اس لیے اس مساوات میں ہم سائن اسکوائر x مربع cos جمع x ہیں کہ گناہ مربع
سے بدل سکتے ہیں اور یہ وہ اظہار ہے جو ہمیں ملتا ہے x مربع cos مائنس
کے دو گنا مربع کے برابر مائنس ایک cosine کے x ہے cos of two x تو اب ہم دیکھتے ہیں کہ
کے کوزائن کی قدر معلوم ہو جائے x تو اگر آپ کو
کے برابر بھی x کے کوزائن کی قیمت کا حساب لگا سکتے ہیں اور درحقیقت آپ یہ دکھا سکتے ہیں کہ یہ ایک مائنس دو گنا گناہ مربع x تو آپ دو
کو تبدیل کرنا بہت آسان ہے۔ آپ کو صرف دو قدم پیچھے جانے کی ضرورت ہے اور یہاں اس مساوات میں آپ کو اس cos squ ہے حاصل
ہے اور اس طرح آپ کو یہ اصطلاح یہاں حاصل ہوتی ہے یہ اظہار اب آئیے x مربع sin کی اصطلاح 1 مائنس x کرنے کی ضرورت ہے۔
ڈگری کی قدر معلوم cos 15 سات پوائنٹ پانچ ڈگری کا حساب کیسے لگا سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں پچھلی سلائیڈ سے cos دیکھتے ہیں کہ ہم
کے x دو cos ایک جمع x مربع cos ہو اس سے پہلے مساوات کو ایک اور طریقے سے بھی لکھا جا سکتا ہے لہذا ہم لکھ سکتے ہیں دو
کی قدر پر منحصر ہے اب آئیے ہم کوشش کریں اور گنتی کریں۔ x برابر ہے پلس اور مائنس کے بارے میں ابہام cos x برابر ہے اور اس لئے
کے برابر سات پوائنٹ پانچ ڈالتے ہیں لیکن ہم x کے برابر سات پوائنٹ پانچ کے برابر ہے لہذا ہم اس مساوات میں x کی قیمت cos کے x
ایک مثبت عدد یا مثبت حقیقی نمبر ہے اور اس لئے ہم جا رہے ہیں صرف مثبت مربع جڑ لیں cos جانتے ہیں کہ سات پوائنٹ پانچ ڈگری کی
ڈگری کی قدر لینے کی ضرورت ہے جسے ہم نے cos 15 کی قدر ہے لہذا دائیں طرف بہت آسان ہے ہمیں صرف cos تو یہ 7.5 ڈگری کی
فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے اس e cos x minus y پچھلی سلائیڈ میں شمار کیا تھا اور اسے یہاں اور پھر بدل دیں کمپیوٹر
pi مائنس x ایکسپریشن کے مربع جڑ سے بہت سی دوسری آسانیاں کی جا سکتی ہیں مثال کے طور پر ہم یہ دیکھنے کی کوشش کریں گے کہ
کیا ہے cos کا by 2
ہے cos x cos y تو یہ
pi صفر ہے اور cos by two کی pi ہم جانتے ہیں کہ sin x sine y دو نوے ڈگری جمع pi by برابر ہے۔ y تو یہاں آپ کا
ایک کے برابر ہے اور اس لیے یہاں اس سمیشن میں پہلی اصطلاح صفر ہوگی اور صرف دوسری اصطلاح ہوگی حصہ sine کا by two
ڈالیں
ہے pi by two پلس cos کا x کے سائن کے برابر ہے اسی طرح x تو یہ
دوبارہ sin x sin y مائنس cos x cos y جو pi by two برابر y کے ساتھ y جمع cos of x تو ہم اب استعمال کریں گے
sin x صفر ہے یہ پہلی اصطلاح صفر کے برابر ہے اور اس طرح ہم جو حاصل کرتے ہیں وہ مائنس cos of pi by two یہاں کیونکہ
کے اظہار کی گنتی کر سکتے ہیں sine کے y minus pi by two اور plus pi by two کے sine کے y ہے اسی طرح ہم
us y کے گناہ کے اظہار کا احاطہ نہیں کیا ہے x plus y کے sine اور x min لیکن آپ ہوں گے شاید سوچ رہے ہوں کہ ہم نے
کی سائن بائے ٹو کی گنتی pi پلس y لیکن اس کے ساتھ وہ کچھ ہے جو ہم اگلی چند سلائیڈوں میں کریں گے لیکن یہاں اس کے بغیر بھی ہمیں

NPTEL@IITK

کا سائن pi by two x مائنس cos of x کرنے کے قابل ہونا چاہئے اگر آپ یہاں اس مساوات پر واپس جائیں جہاں ہم نے لکھا تھا کہ
کو یہاں سے بدل دیں x ہے اب اگر ہم اس
کے برابر ہے pi by 2 جمع y اصل میں x تو ہم کہتے ہیں کہ
کے برابر ہے pi پلس y کا سائن ہے جو کہ اس کے برابر ہے . ایکسپریشن لیکن ایکس کے ساتھ pi by 2 جمع y تو ہمیں جو ملے گا وہ
جمع y کے برابر ہے ہم نے cos کی بجائے sine x کا pi by two جمع y تو ہم یہاں اس متبادل کو استعمال کر رہے ہیں اس لیے
ڈالتے ہیں pi by two اور پھر مائنس pi by two
کا کیا نشان ہے کیا ہم اس مساوات کی طرف واپس pi by 2 مائنس y ہے اسی طرح ہم یہ جان سکتے ہیں کہ cos کا y تو یہ صرف
کے برابر ہے sin x مائنس cos x plus pi by 2 جائیں گے جو ہم نے ابھی اخذ کیا تھا اب
کے 2 کے برابر بدلنے کی کوشش کرتے ہیں pi مائنس y کو X تو یہاں ہم کیا کرتے ہیں ہم
کو pi 2 مائنس y کی بجائے ہمیں x اب cos سے ual ہے pi by 2 eq مائنس y تو پھر ہمیں جو ملے گا وہ مائنس آف سائن
سے لگانا ہوگا.
ہے لیکن یہاں مائنس کا نشان ہے اور چونکہ ہمارے یہاں مائنس کا نشان نہیں ہے ہمیں ایک pi by two تو ہم حاصل کرتے ہیں کہ یہاں ایک جمع
ڈالنا ہوگا۔ یہاں مائنس سائن کریں
کے مائنس کوسائن کے برابر ہو جاتا ہے لہذا یہ چار شناختیں بہت کارآمد ہیں اور ہم دیکھیں گے کہ جب ہم بعد میں اس سلائیڈ میں کچھ yy تو یہ
مثال کے مسائل کریں گے
x میں sin x sin yi پلس cos x cos y برابر y کے لیے اس اظہار سے ملتا جلتا اخذ کریں گے۔ مائنس cos کے x تو اب ہم
کے لیے ایک اظہار اخذ کرنے جا رہا ہوں اور اس کے لیے ہم sine y اور sine x cos x cos y کے لیے sine کے y مائنس
برابر ہے اگر آپ z کی سائن آف z پچھلے صفحہ پر نتیجہ استعمال کریں گے جہاں ہم نے دکھایا تھا کہ کسی بھی زاویے کے لیے
pi by 2. مائنس x کے کوسائن کی سائن کی pi مائنس x کی سائن برابر ہے x تو
کے برابر سمجھیں گے z اور یہاں ہم اسے pi by 2. مائنس کی 2 کوسائن z کی کوزائن ہے pi مائنس Z کی سائن z تو
ہے y مائنس z x لیکن pi by 2 مائنس cos of z کا سائن ہے z تو اس شناخت کو استعمال کرنے سے ہمیں جو ملتا ہے وہ
لکھ سکتا ہو cosine کا x minus y plus pi by 2 ہے جسے میں cosine کا pi by two مائنس z تو یہ
تو اب اگر آپ کو یہ اظہار نظر آئے
سمجھوں گا اور پھر ہم اس فارمولے کو استعمال کرتے y جہاں میں اسے نیا cos کا y مائنس x یا b کی شکل ہے مائنس cos تو یہ ں
ہیں
nu اور پھر cos x cos nu i cos x cos y ہے لہذا y کے برابر حاصل کرتے ہیں لہذا یہ نیا cos x cos nu y تو ہم اسے
cos y plus pi by two cos of y جمع دو cos of y اب پچھلی سلائیڈ سے ہم جانتے ہیں کہ sine x x sine کے y
ہے sin y مائنس plus pi by two
سے بدلنے جا رہے ہیں y تو میں صرف ہوں اس ایکس کو یہاں
ہے اور پھر پچھلی سلائیڈ سے ہم نے اخذ کیا تھا کہ x پلس سائن y بن جاتی ہے اور پھر ایک مائنس سائن cos x تو یہ چیز یہاں یہ اصطلاح
کے طور پر cos کے y کی سائن ایک ہی ہے pi by two جمع y
x کی سائن y مائنس x ہے اور یہ حتمی اظہار ہے جو کہ sine by 2 کی pi جمع y تو یہ استعمال کرتے ہوئے کہ ہمارے پاس
کے sine کے x plus y اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے اب ہم آسانی سے inus cos x sin y کے برابر ہے cos ym
مائنس مائنس x کے لیے بدلنے کی ضرورت ہے ہم اسے y جمع x سے سائن y کو مائنس y لیے اظہار اخذ کر سکتے ہیں ہمیں صرف اس
کے سائن کے طور پر لکھتے ہیں y
y مائنس x کے سائن کے اظہار میں تھا ہم جانتے ہیں کہ y مائنس x کی طرح ہے جو ہمارے پاس پچھلی سلائیڈ سے y اس y تو یہ مائنس
x سے بدل رہے ہیں حاصل کریں y کو مائنس y ہے اور اس لئے یہاں صرف اس cos x sine y مائنس x cos y کی سائن سائن
کے برابر اب ہم جانتے ہیں کہ کوزائن ایک ایون فنکشن ہے y سائن مائنس cos x کے مائنس y کے برابر مائنس x cos کی سائن y جمع
ان دو حقائق کو استعمال y کا سائن ہے مائنس سائن y ہے اور مائنس cos y کا کوزائن y اور سائن ایک طاق فنکشن ہے اس لیے مائنس
کے برابر ہے لہذا اب ہم نے cos x sine y پلس x cos y آخر کار سائن y جمع x کرتے ہوئے ہم مزید یہ حاصل کرتے ہیں کہ سائن
دو زاویوں کی جمع اور فرق کی علامت کے لئے بھی تاثرات اخذ کئے ہیں جو کہ ہم کیا کرتے ہیں۔ پچھلی دو سلائیڈوں میں کیا اور میں نے دو
مساوات کا خلاصہ کیا ہے ۔ اب یہاں پر اگر ہم ان دو مساوا
توں کو یہاں اس اصطلاح اور اس اصطلاح کو یہاں جوڑیں
جمع y جمع sin x برابر ہے x cos y تو منسوخ ہو جائیں گے اور اس اصطلاح کا دو مرتبہ حاصل کریں گے اور اس لیے دو بار گناہ
کی گنتی کریں y مائنس sin x مائنس sine x plus y میں اسی طرح اگر ہم a y مائنس x سائن
sin x برابر ہے cos x sine y کا دگنا مل جائے گا لہذا دو cos x sine y تو یہ دونوں اصطلاحات منسوخ ہو جائیں گی اور
ہوگا اب دیکھیں کہ زاویہ کے دوہرے کے نشان کی گنتی کیسے کی جاتی ہے اگر ہم صرف اس زاویے کی y مائنس x مائنس سائن plus y
نشانی اور کوزائن کو جانتے ہیں
سے بدل دیتے ہیں x کو y کے اظہار پر واپس جاتے ہیں اور ہم اس y جمع sin x بہت آسان ہے ہم x تو
x برابر ہے y کا سائن ہے اب اس فارمولے میں ہمارے پاس x جمع x x تو ہمیں سائن دو ملتا ہے۔
کے برابر ہے x یہاں y اور x برابر y تو یہاں
پہلے ہم نے دیکھا تھا کہ کسی x کے برابر ہے۔ sin x cos ملتا ہے جو کہ دو گنا cos x sin x جمع sin x cos x تو ہمیں
زاویے کے نصف کا کوسائن کیسے تلاش کیا جاتا ہے
تو ہم نے دیکھا کہ کوزائن کی گنتی کیسے کی جاتی ہے۔ پندرہ ہائی دو ڈگری کا جب ہم صرف پندرہ ڈگری کے کوزائن کی قدر جانتے تھے
کے نصف کے نشان کی گنتی کیسے کی جائے x تو اسی طرح ہم آپ کو دکھائیں گے کہ کسی زاویہ
جو ہم نے پہلے ہی پچھلی سلائیڈوں میں سے x ایک مائنس دو سائن کے برابر ہے۔ مربع x تو ہم اس فارمولے سے شروع کرتے ہیں کیونکہ دو
دو سے زیادہ ہے اور اس x دو cos ایک مائنس x اسکوائر sin ایک پر اخذ کیا ہے لہذا یہاں سے ہیرا پھیری کرکے ہمیں جو ملتا ہے وہ ہے
کی قدر پر منحصر x کے جمع مائنس جڑ کے برابر ہے۔ دو بار پھر یہاں جمع اور مائنس کا انتخاب x دو cos ایک مائنس sin x وجہ سے
ہوگا لہذا مثال کے طور پر اگر ہم اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے 7.5 ڈگری کی سائن تلاش کریں
تو یہاں ہمیں 7.5 ڈگری کا سائن ملتا ہے اب ہم جانتے ہیں کہ اس کی سائن 7.5 ڈگری ایک مثبت حقیقی نمبر ہے اور اس وجہ سے ہم یہاں صرف
کے 15 ڈگری سے زیادہ 2 کے مربع جڑ کے برابر ہے اور ہم اس کی گنتی کر سکتے ہیں کیونکہ ہم cos مثبت علامت لیتے ہیں لہذا یہ 1 مائنس

پہلے سے ہی 15 ڈگری کے کوسائن کی قدر جانتے ہیں یہ جانو مساوات یہ ہے کہ cos of x جمع y cos plus y کی y مائنس x
آدھے y درحقیقت دو مختلف زاویوں کے مجموعے کے نصف کے برابر ہے اور x ہے اب فرض کریں کہ minus y دو cos x cos y
کے فرق کا b اور a کے نصف کے مجموعہ کے برابر ہے ان دو یکساں زاویوں
کو دو کے ساتھ بدلتے ہیں b کو ایک مائنس y کے ساتھ دو سے اور b کو ایک جمع x تو اگر ہم اس مساوات میں
y جمع x لیکن y جمع cos x بذریعہ دو برابر ہے اب b میں مائنس cos a کو b جمع cos a تو ہمیں آخر یہ حاصل ہوتا ہے کہ دو
ہے a زیادہ دو جو b ہے دو سے زیادہ ایک مائنس B ایک جمع
ہے b y مائنس x ملتا ہے اور اسی طرح cos a تو ہمیں
b ہے cos y کی x مائنس تو
کے مجموعے میں تبدیل کرنے کا ایک طریقہ فراہم کرتا ہے اور cosines کے مجموعہ کو دو cosines تو یہ فارمولہ درحقیقت آپ کو دو
کے لیے جو اس کا مجموعہ ہے b cos a plus cos b اور a فرق کے نصف کے مجموعے اور فرق کے لیے اس طرح کسی بھی زاویہ
کا دو گنا کوسائن ہے اور اسی طرح اگر ہم بھی یاد رکھیں ہم نے یہ بھی اخذ کیا b زاویوں کا کوزائن ایک جمع ڈی کا دو گنا کوسائن ہے ایک مائنس
کے x اور پھر وہی متبادل کرتے ہوئے یہاں y جمع cos of x مائنس y مائنس cos of x برابر ہے y سائن x تھا کہ دو سائن
کے سائن b کے دو کے ساتھ ہم کیا کریں گے۔ آخر میں یہاں حاصل کرنا 2 ہے ایک جمع b برابر ایک مائنس y کے دو اور b برابر ایک جمع
b برابر ہے y مائنس x کے سائن دو سے زیادہ b سے زیادہ ایک مائنس 2
کے فرق کو نصف cosine کا کوزائن ہے لہذا یہ فارمولہ آپ کو ایک بار پھر دیتا ہے دو زاویوں کے a کا کوزائن y جمع x مائنس b تو
کی y مائنس x کے نصف کی سائن کی پیداوار کے طور پر ظاہر کرنے کا طریقہ اور ان دونوں زاویوں کے فرق کو اسی طرح ہم جانتے ہیں کہ
کے دو اور b کے برابر ایک جمع x کا اور ہم یہاں ایک بار پھر وہی متبادل کرتے ہیں جس میں y ہے cos x دو گناہ y مائنس x سائن
کے دو کے ساتھ b مائنس b برابر y
x کے برابر ہے ایک جمع y جمع x کے کوزائن دو سے زیادہ b مائنس a کا دو گنا سائن ہوتا ہے اور b تو ہمیں جو ملتا ہے وہ ایک جمع
ہے b ہے y مائنس bx ہے y مائنس
کی سائن اور کوزائن کے ان مجموعوں کو سائن اور کوزائن کی پیداوار میں تبدیل کرنے کے لیے یہ ایک اور b کی سائن ہو گی y مائنس x تو
جمع x cos y کی سائن x مائنس y کی سائن x مائنس y کیونکہ y مائنس x جمع y برابر ہے x اظہار ہے اسی طرح ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ
کے سائن y ہے جب ہم اس کو اس ایکسپریشن سے بدل دیتے ہیں اور اسی طرح کا ایکسپریشن ایکس پلس ایکس مائنس cos x sine y so
کے لیے بھی جو ہمیں ملتا ہے
sine ہے sine x minus y اور sine x cos y جمع cos x sine y ہے sine x جمع y تو ہم اسے یہاں لکھ سکتے ہیں
x cos y مائنس cos x sin y
ہوتا ہے cos x sin y سے گھٹاتے ہیں جو ہمیں ملتا ہے وہ 2 گنا sin x plus y کو sine x minus y تو اگر ہم
بذریعہ دو اور جو ہم حاصل b ایک مائنس y بذریعہ دو اور b کو جمع سے بدل سکتے ہیں x تو یہ اظہار یہاں اور بار بار اس اظہار میں ہم
کا مائنس نشان ہے b y جمع x کے برابر کیونکہ a کا سائن بذریعہ دو b کا دو گنا کوسائن ایک مائنس b جمع a کریں گے وہ ہے
ایک بار پھر سائن اور کوزائن کی o کے نشان کے فرق کو تبدیل کرنے کے طریقے کے لیے اظہار فراہم کرتا ہے۔ t تو یہ آپ کو دو زاویوں
پیداوار آئیے دیکھتے ہیں کہ ایک زاویہ کے تین بار کے کوزائن اور سائن کا حساب کیسے لگایا جائے
cosine کا b جمع a کے طور پر لکھا جا سکتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ cosine کے x جمع x کی کوزائن کو دو x تو تین
کے برابر کے ساتھ استعمال کر رہا ہے x اب اس فارمولے کو دو a sine b مائنس سائن cos of b ہے۔ ایک cosine
x cos گنا x دو cos ملے گا کیونکہ cosine کا x کے برابر ہونے کا انتخاب کرے گا ہمیں تین b x اور x اسے دو a تو یہ
مائنس ون کے برابر ہے x مربع cos کا کوزائن دو گنا x کا سائن جو کہ برابر ہے اب ہم جانتے ہیں کہ دو x گنا x مائنس سائن دو
کی سائن دو گنا x مائنس اخذ کیا تھا اور ہم نے اخذ بھی کیا تھا۔ وہ دو cos x تو ہم اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہیں جو ہم نے پہلے وقت میں
ہے سائن x cos x
کے مائنس دو کوسائن کے برابر ہے x جو x یہاں بار سائن x تو یہ وہی ہے جسے ہم گناہ کے لئے استعمال کرنے جا رہے ہیں دو
کے سوا کچھ نہیں x مربع cos ایک مائنس x لیکن سائن اسکوائر x بار سائن مربع x تو یہ یہ مخصوص اصطلاح ہے دو گنا کوزائن
cos cube جو برابر ہے 2 cos cube x پلس دو cos x مائنس دو cos x مائنس cos cube x تو آخر کار ہمیں دو ملتے ہیں۔
x یہاں اور 2 یہاں
4 تو یہ cos کیوب x 3 مائنس cos x بن جاتا ہے لہذا یہ cosine ہے
کے کوزائن کی قدر معلوم ہے x تو یہ فارمولہ آپ کی مدد کرتا ہے لہذا اگر آپ کو
x کے تین گنا x کی سائن کے لحاظ سے تین گنا x کی کوزائن کی قدر کا حساب لگا سکتے ہیں اسی طرح اب ہم x تو آپ آسانی سے تین گنا
کی سائن کی گنتی کرنے کے لئے ایک اور اظہار اخذ کرتے ہیں
sine a cos b plus cos a sin برابر sine کا b جمع a کا ہم فارمولہ استعمال کرنے جا رہے ہیں x تو دوبارہ سائن کریں تین
b کا سائن ملتا x کے طور پر ڈالیں گے تاکہ جب وہ شامل ہوجائیں ہمیں تین x کو b اور x کو دو a اور ہم استعمال کرنے جا رہے ہیں ہم
ہے x دو a کی سائن کے برابر ہوتا ہے لیکن a کا سائن ملتا ہے x ہے لہذا ہمیں تین
x ہے b لیکن cos بار کی x کے دو b تو
کی کوزائن ایک منفی دو x ہے اور دو x cos x کی سائن دو سائن x گنا جان لیں کہ دو x ہم کے دو x کے cos جمع cos کی x تو
ہے x گناہ مربع
یہاں اظہار o کو استعمال کرنے جا رہے ہیں tw تو ہم ان
ہے لہذا x ایک مائنس دو گناہ مربع cos x کے ساتھ cos two x تو یہ گناہ دو ایکس کا اظہار ہے لہذا ہم اسے ضرب کرنے جا رہے ہیں
اور جب ہم اس اظہار کو کھول سکتے ہیں x ایک مائنس گناہ مربع ہے x مربع cos لیکن x مربع cos گنا x دو سائن
بن جاتا ہے جسے اگر آپ مزید آسان کریں گے sin cube x مائنس ٹو sin x تو یہ
کے برابر ہو گا q مائنس چار سائن x کے تین سائن x تو یہ
کے سائن کی قدر معلوم ہے x کا نشان ہے اس طرح دوبارہ آپ دیکھتے ہیں کہ ہم کر سکتے ہیں اگر آپ کو صرف x تو یہ آپ کا تین
کی سائن کی قدر تلاش کر سکتے ہیں اور یقیناً آپ اس کے برعکس بھی کر سکتے ہیں کیونکہ یہ دراصل ایک ہے اگر آپ دیکھیں کہ یہ xتو آپ 3
کے لحاظ سے کیوبک ہے اگر آپ کو تین ایکس کے سائن کی قدر معلوم ہے x حصہ سائن
کا نشان تلاش کر سکتے ہیں اس لیکچر میں سے زیادہ تر جس پر ہم بات کر رہے ہیں اور x تو آپ ایک کیوبک مساوات کی جڑوں کو حل کرکے
سائن آف y پلس x پچھلے لیکچر میں بھی جس پر ہم سائن اور کوزائن کے بارے میں بات کر رہے ہیں اور اس کے لیے اظہارات دے رہے ہیں۔

Prutor@IITK

x مائنس y cos of x plu sy cos of x minus y اور پھر sine of two x sine of three x cos of two
x cos of three x لیکن پھر ہم اس دوسرے فنکشن کو متعارف کرانے جا رہے ہیں جسے tangent of x کہا جاتا ہے جیسا کہ آپ
کو پہلے ہی اپنے مثلثی تناسب سے معلوم ہوگا لیکن ہم اب اسے یہاں زیادہ باضابطہ طور پر متعارف کروائیں
تو پھر ہم یہاں اکائی کے دائرے پر غور کریں جس کا مرکز o اس نقطہ o پر ہے اور یہ افقی محور x محور ہے عمودی محور y محور ہے
اور فرض کریں کہ ہمارے پاس یہ نقطہ p ہے یہاں دائرے پر ہے اور جس کے نقاط a ہیں x کوآرڈینیٹ a ہے اور y کوآرڈینیٹ b ہے
تو یہ a ہے اور یہ b ہے کیونکہ اگر آپ دیکھتے ہیں کہ یہ op ہے اور اس وجہ سے گردش کے زاویہ کا مماس ہے رداس ابتدا میں یہاں ہے
تک پہنچنے کے لیے ہمیں اس شعاع کو اس p اس نقطہ b ہے اور ob ابتدائی طور پر اوب پر اس طرح رہے ہمارے پاس ابتدا میں یہاں ایک رہے
مرکز o کے گرد x کے زاویے سے گھماننا ہوگا لہذا گردش کی مقدار x ہے اور اس لیے یہ ٹینجنٹ اب اگر آپ اس کو صحیح طور پر دیکھیں
مثلث ہے کیونکہ یہ ایک کھڑا ہے لہذا اگر آپ صحیح زاویہ مثلث کو دیکھیں gle یہاں
کا مخالف رخ یہ ہے جس کی لمبائی ہے x تو یہاں اس زاویہ کا مماس مخالف سمت کی لمبائی کے مخالف کی قدر کے برابر ہے لہذا اس زاویہ
پر a ہے x b ہے جس کی لمبائی اتنی ٹین ہے oa سے ملحقہ طرف x کے برابر ہے لہذا اس زاویہ b so b ملحقہ طرف کی لمبائی پر
اور اگر آپ مزید دیکھنے کی کوشش کریں گے
تو شاید لیکچر میں ایک یا ہاں لیکچر ایک ہم نے x کی سائن کو مخالف سمت کے طور پر متعین کیا تھا مخالف سمت کی لمبائی کو فرضی کی لمبائی
محض x سے تقسیم کیا گیا تھا لیکن چونکہ یہ ایک اکائی کا دائرہ ہے یہ فرضی اصل میں یونٹ کی لمبائی کا ایک رداس ہے اور اس وجہ سے سائن
p اس دائیں زاویہ مثلث کے ملحقہ رخ کی لمبائی کے برابر تھا جو اس نقطہ cosine کا x اور p کوآرڈینیٹ کے برابر تھا۔ اس نقطہ کا y
کے x کو x نمبر ہے۔ چیز لیکن سائن a بذریعہ b ہے اور پھر ہمیں فوراً احساس ہوا کہ a کوآرڈینیٹ کے سوا کچھ نہیں ہے جو x کے
کے کوزائن پر سائن x کا ٹینجنٹ x کے کسی بھی زاویہ کے لئے x کوزائن سے تقسیم کیا گیا ہے اور اس وجہ سے ہمیں یہ تعلق ملتا ہے کہ
پر پلاٹ کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہاں افقی محور پر اور ہمارے لیے x محور بمقابلہ y کے گراف کو x کے برابر ہے، آئیے اب ٹین x
پر ہے o یہ کرنے کے لیے ہم دوبارہ اس اکائی کے دائرے کی مدد لیں گے جس کا مرکز
تو آئیے یہ کہتے ہیں کہ ہم گردش کے زاویہ x سے صفر ڈگری کے برابر شروع کرتے ہیں
تو ہم یہاں کہیں صفر پر ہیں۔ ڈگری
تو جب x 0 ڈگری پر ہوتا ہے
تو ہم اصل میں اس مقام پر کہیں ہوتے ہیں اس لیے کوئی گردش نہیں ہے اس لیے یہ آپشن دراصل یہاں پر ہے اور اس نقطہ کا کوآرڈینیٹ ایک کوما
صفر ہے اور اس لیے چونکہ ٹین ایکس تناسب کے برابر ہے۔ اس نقطہ کے y کوآرڈینیٹ کی لمبائی سے y کوآرڈینیٹ کی x کوآرڈینیٹ کی قدر
لہذا جب x 0 ہے کے برابر ہے
o پر t برابر x کوآرڈینیٹ صفر ہے لہذا y تو ہم یہاں ہیں اور پھر اگر آپ دیکھیں کہ یہ تناسب صرف 0 کے برابر ہے کیونکہ اس مقام پر
کو بڑھاتے ہیں x کے برابر صفر پر ہیں اور پھر جب ہم x کا صفر ٹین صفر ہے لہذا یہ وہ جگہ ہے جہاں ہم گراف پر x
کی قدر میں اضافہ کریں اس x تو ہم اس کا کیا مطلب ہے کہ اس کرن کو ہم گھڑی کی مخالف سمت میں گھمانے کی کوشش کرتے ہیں تاکہ یہ
کی قدر میں اضافہ کرتے ہیں x لیے جب ہم
کوآرڈینیٹ جو شروع میں 0 تھا بننا شروع ہو جائے گا مثبت قدریں لینا شروع کر دے گا مثال کے طور پر y تو جو ہونا شروع ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ
کوآرڈینیٹ دونوں برابر صحیح ہوں گے اور اس x کوآرڈینیٹ اور y برابر 45 ڈگری پر ہمارے یہاں ایک دائیں سماوی مثلث ہے جس کے لیے x
ڈگری ٹین کے برابر ہو گا x 45 لیے جب
ایک کے برابر ہوگا کیونکہ دونوں کوآرڈینیٹ جڑ دو پر ایک ہیں اس لیے وہ نقطہ یہاں کہیں ہے x تو
چلیں یہ ایک ہے pi to pi to four برابر ہے x تو جب
مزید بڑھتا ہے x کی قدر صفر سے بڑھ کر اس طرح ایک ہوجائے گی اور پھر جب tan x تو
میں وہ گھڑی کی مخالف سمت اور فرض کریں کہ کرن اب t کی قدر جب یہ شعاع مزید گھومتی ہے۔ so تو کیا ہوتا ہے مثال کے طور پر
یہاں ختم ہو گئی ہے
تو اب زاویہ اس سے زیادہ ہے کہ ہم کہیں
تو فرض کریں کہ اگر یہ پینتالیس ڈگری تھا
تو زاویہ اب پینتالیس ڈگری سے زیادہ ہے
تو شاید ہم pi زاویہ جب آپ دو کے قریب کہیں ہیں pi کے دو کے قریب جاتے ہیں
صفر پر جاتا a کوآرڈینیٹ کم ہونا شروع ہو جاتا ہے اور یہ صفر کے بہت قریب ہو جاتا ہے لہذا بنیادی طور پر x تو کیا ہوتا ہے کہ پوائنٹ کا
ہے
تو جیسے a صفر پر جاتا ہے لیکن y کوآرڈینیٹ پھر بھی ہوتا ہے ایک کے قریب
تو یہ کہیں تقریباً ایک ہو جائے گا جب آپ pi کے دو کے قریب جائیں گے
قریب جائے گا۔ pi کی مماس صفر پر جائے گا کیونکہ x تو چونکہ یہ محدود ہو جائے گا لیکن یہ اس زاویہ x کے دو سے قریب جائے گا اور
لامحدودیت کیونکہ صفر سے ایک ہے
تو یہ اس طرح جائے گا
تو یہ لامحدود تک جائے گا اور اسی طرح ہم اسے آہ کھینچ سکتے ہیں منفی پہلو کے لئے وہی چیز کھینچیں لہذا اگر آپ یہاں سے شروع کرتے ہیں
اور اگر آپ گھڑی کی سمت میں جاتے ہیں
گھڑی کی سمت میں جانے سے آپ کو اس گردشی زاویہ کی منفی قدریں ملیں گی ow تو اب ہم کم ہو گئے ہیں جیسا کہ ہم جانتے ہیں۔
تو مثال کے طور پر جب ہم یہاں ہوتے ہیں
کے مساوی ہے لیکن جب ہم اس طرف ہوتے ہیں x کے برابر pi تو یہ زاویہ مائنس پینتالیس کہتے ہیں جو اس گراف پر مائنس
تب بھی مثبت ہوگا a کوآرڈینیٹ ہے x کوآرڈینیٹ اب بھی x کوآرڈینیٹ ہمیں کہتے ہیں کہ اس چوتھے کواڈرینٹ میں x تو کسی بھی نقطہ کا
کا ٹینجنٹ منفی ہوگا اور اگر آپ اسے آزمائیں مثال کے طور پر اگر x کوآرڈینیٹ منفی ہونے والا ہے لہذا اس کواڈرینٹ میں یہاں کی قدر y لیکن
یہ زاویہ 45 ڈگری ہے
تو ہم جو دیکھیں گے وہ یہ ہے کہ مائنس 45 کا ٹین مائنس 1 کے برابر ہوگا کیونکہ اگر آپ اس نقطہ کو دیکھیں گے
کوآرڈینیٹ مائنس 1 بذریعہ جڑ 2 ہو گا کیونکہ یہ چوتھے کواڈرینٹ y کوآرڈینیٹ 1 بذریعہ جڑ 2 ہو گا لیکن x تو یہاں اس کے نقاط پوائنٹ ہو گا
مائنس 1 بذریعہ جڑ 2 میں آن ہوتا ہے۔ لہٰذا جب آپ مائنس 1 کے تناسب کو جڑ 2 سے تقسیم کریں گے جڑ دو کی طرف سے ایک آپ کو مائنس ون
ملتا ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ کہیں یہ مائنس ون ہے
پر جاتے ہیں ah سے pi تو کہیں یہاں اور پھر اسی طرح جب ہم مائنس

کوآرڈینیٹ کی قدر منفی ہے y کوآرڈینیٹ 0 پر جاتا ہے لیکن چونکہ x کی طرف پھر کیا ہوتا ہے کہ pi 2 by تو گھڑی کی سمت میں مائنس
سے دو سے آگے گھومنے کو جاری رکھ کر بھرا جا pi یہ تناسب اس طرح مائنس انفینٹی پر چلا جائے گا اور اسی طرح اس پورے گراف کو
باؤنڈڈ فنکشنز تھے میرا cos x اور cos xc sin x سکتا ہے اس گراف کو مکمل کیا جا سکتا ہے اس طرح سائن ایکس کے مقابلے میں اور
کی قدر بھی مائنس ون cos x کی قدر ہمیشہ مائنس ون اور پلس ون کے درمیان ہوتی ہے اور sin x کے لیے x مطلب یہ ہے کہ کسی بھی
کے لئے اس حد تک بے حد جا سکتی x زاویہ x کے ٹینجنٹ کے ساتھ قدر واقعی x اور پلس ون کے درمیان ہوتی ہے لیکن وہ ایسا نہیں ہے
کچھ نہیں ہے tan x کے طاق ضرب بذریعہ 2 کے برابر ہے کیونکہ اگر آپ دیکھتے ہیں کہ یہ کچھ نہیں ہے بلکہ pi ہے جب یہ حقیقت میں
x بذریعہ کا کوسائن x بلکہ سائن

x کا کوزائن صفر پر جاتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ x کے لئے بے حد ہو گا جس کے لئے x کا ٹین ان تمام x تو یہ بات بالکل واضح ہے کہ
کا دو سے ایک طاق ضرب ہو pi x کا کوزائن صفر پر تب جاتا ہے جب
x غیر باؤنڈ ہوگا یہ مائنس انفینٹی یا پلس انفینٹی ہوگا اسی طرح جس طرح ہمارے پاس مائنس x کا ایک طاق ضرب از دو ٹین x pi تو جب بھی
cos x بذریعہ x کا ٹین کیا سائن x کا وقت بھی گن سکتے ہیں لیکن چونکہ x ہے ہم مائنس cos کا x کمپیوٹیڈ سائن اور مائنس ah کی
کا مطلب ہے کہ ہم اسے صرف کسی دوسرے minus xi divided by sine by کے x برابر ہو گا مائنس x مائنس tan of
لیکن ہم جانتے y سے تقسیم کیا جائے گا cos of ہے جس کو sine کی tan y کا y کے طور پر مان سکتے ہیں اور پھر y متغیر
ایک cos کا کوسائن ہے کیونکہ x کے برابر ہے اور مائنس x کی سائن ہے کیونکہ سائن ایک طاق فنکشن ہے یہ مائنس سائن x ہیں کہ مائنس
ہے ایکس کا ٹین cos x پر sin x کے برابر ہے لیکن پھر cosine کے x ایون فنکشن ہے یہ
تو یہ ایکس کے مائنس ٹین کے برابر ہے

مائنس ایکس کا ایک ٹین ایکس کا مائنس ہے ہم ایکس پلس t تو ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ ایکس کا ٹین دراصل ایک عجیب فنکشن ہے کیونکہ
sine y by cos y ہے tan y کا y کی سائن دوبارہ تلاش کر سکتے ہیں اسے لے کر pi
کے برابر ہے اور آپ اس فارمولے کو دوبارہ pi کی سائن ہے x plus اب x plus pi sine by cos y کا pi جمع x تو یہ
کے سائن کے لیے استعمال کر سکتے ہیں y جمع x
میں sine y کو cos x پلس cos y ہو جائے گا x تو یہ سائن
کا pi اب ہم جانتے ہیں کہ sine y sin x مائنس cos y ہے cos x سے تقسیم کیا گیا ہے cos کے x کو pi جمع x تو یہ
کا سائن ہے pi سائن صفر ہے اس لیے یہ اصطلاح صفر پر جائے گی اور یہاں بھی یہ اصطلاح صفر پر جائے گی کیونکہ
cos کے برابر ہے sine x جو کہ pi سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ cos x cos کو sine x cos pi تو جو باقی رہ جاتا ہے وہ ہے
کے برابر ہے tan کے x جو x
کے ساتھ م pi تو ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ ٹینجنٹ فنکشن دراصل
کے ٹینجنٹ کے برابر ہے اور اسی طرح ہم یہاں تک کہ دکھا سکتے pi x جمع x کا ٹینجنٹ x تواتر ہوتا ہے کیونکہ کسی بھی زاویہ کے لئے
کے ٹینجنٹ کے برابر ہوگا x کا ٹینجنٹ pi مائنس x ہیں کہ
کے for pi فارمولے ilar کیا ہے کیونکہ ہمارے پاس سم ہے x مائنس x 2 کے ٹینجینٹ کا ٹین مائنس pi تو آئیے دیکھتے ہیں کہ
مانتے ہیں y اب اگر ہم اسے cos by 2 minus x کے pi اور x سائن بذریعہ 2 مائنس
سے لیکن پچھلی x ہے دو مائنس cos y پر sine by 2 minus x کی pi ہے لہٰذا یہ cos y بذریعہ tan sin y کا y تو
cos by two minus x کی pi اور cos کے x برابر ہے x کی سائنین سائنین بائی دو مائنس pi سلائیڈوں سے ہم نے دکھایا تھا کہ
کی سائن کے برابر ہے x
کے ٹین کے الٹا کے برابر ہے جسے عام طور پر کہا جاتا ہے جو دراصل ایک نیا x کے برابر ہے۔ اصل میں x دو مائنس x کا ٹین pi تو
لکھا co tangent کہا جاتا ہے لہذا اسے cotangent cotangent فنکشن ہے جس کی ہم یہاں وضاحت کر رہے ہیں اسے اصل میں
کے ٹین کا الٹا x کا ٹین صرف pi کے ذریعے x ہے۔ دو مائنس cot کی x لکھتے ہیں لہذا یہ cot جاتا ہے لیکن ہم اسے مختصر میں
cos کے x minus y اور x plus y بھی لکھا جاتا ہے اور یہاں آج تیسرے لیکچر میں اس کلاس میں ہم نے cot کا x ہے جسے
کے لیے بہت سے مختلف cos two x cos three x sin two x sin three x کے اظہار کے ساتھ شروع کیا اور ہم نے
pi فارمولے اخذ کیے اور ہم آہ ٹینجنٹ آہ فنکشن پر بھی تبادلہ خیال کیا ہم اسے ایک مثلثی فنکشن کے طور پر رسمی شکل دیتے ہیں اور ہم نے
کے ٹین کے لیے دو مائنس ایکس کے لیے کچھ آسان تاثرات کے ساتھ شروعات کی مثال کے طور پر یہاں ہم یہ ظاہر کرتے ہیں کہ یہ ٹین ایکس پر
کے ساتھ م pi ایک کے برابر ہے ہم نے بھی کھینچا ٹین ایکس کا گراف اور ہم نے دیکھا کہ ٹین آہ ٹینجنٹ فنکشن
تواتر ہے اگلی کلاس میں ہم اس کوٹینجینٹ فنکشن کے ڈومین اور رینج کی وضاحت کرنے جا رہے ہیں اور پھر ہم ٹینجنٹ فنکشن پر واپس آنے والے
ہیں اور بالکل اسی طرح ہم نے سائن اور کوزائن کے لیے کیا ہم یہ دیکھنے جا رہے ہیں کہ کیا ہم اس رقم کے لیے فارمولے حاصل کر سکتے ہیں
اور زاویوں کے مجموعے اور فرق کے ٹین کے لیے
tan x minus اور اسی طرح tan y اور x کا ٹین لکھ سکتے ہیں y جمع x تو ہم یہ دیکھنے جا رہے ہیں کہ کیا ہم ٹین کے لحاظ سے
کے لئے بھی اظہار شکریہ tan کے x اور 3 tan کے x کے ٹین کے لحاظ سے 2 x کے لئے اور y

Prutor@IITK