مثلثی افعال کے اس دوسرے لیکچر میں خوش آمدید پہلے لیکچر میں ہم نے مثلثی افعال کے پس منظر کو متعارف کرایا تھا جو آپ نے دسویں
متعارف کرائے تھے اور ہم نے اس کی کچھ خصوصیات پر بحث شروع کی تھی۔ x جماعت میں پڑھا تھا، ہم نے دو مثلثی فنکشنز سائن اور کوزائن
صفر کے برابر ہے اگر x کا کوزائن x لہذا ہم اس لیکچر میں اس کے ساتھ جاری رکھیں گے لہذا ہم اگلے سوال کا جواب دینا چاہیں گے جو کہ
a پر غور کریں ۔ اکائی کا دائرہ جس میں کوآرڈینیٹ p تھا اور آئیے اس نقطہ o آپ کو یاد ہو کہ ہمارے پاس ایک یونٹ کا دائرہ تھا جس کا مرکز
ہوتے ہیں b اور
ہے اور ہم جانتے ہیں کہ گردش کے اس b ہے اور یہ لمبائی a یہاں a کی لمبائی ہوتی ہے لہذا یہ نقطہ oa تو اس سیگمنٹ لائن سیگمنٹ
ہے cosine a گردش کے اس زاویہ کی cos زاویہ کی
اس نقطہ cos کی x صفر کے برابر ہے کیونکہ x کی cos کو تلاش کرنے کی کوشش کر رہے ہیں کیونکہ x تو ہم کیا ہیں اگر ہم زاویہ
کے وہ زاویے اوٹیشن جس کے لیے گردش کے بعد فائنل r کوآرڈینیٹ کے برابر ہے جو ہم بنیادی طور پر تلاش کر رہے ہیں وہ ہے x کے
پوائنٹ کا ایکس کوآرڈینیٹ صفر کے برابر ہے
تو اس دائرے پر دو پوائنٹس ہیں جن کے لیے ایکس کوآرڈینیٹ صفر کے برابر ہے
تو ایک یہ پوائنٹ یہاں ہے
محور y تو یہ ایکس محور ہے اور یہ ہے
کوآرڈینیٹ صفر ہے اور پھر دوسرا نقطہ یہ نقطہ ہے جو صفر مائنس ون ہے x تو اس مقام پر
کوآرڈینیٹ صفر ہے اب یہ نقطہ یہاں گردش کے زاویہ سے مطابقت رکھتا ہے لہذا ہم شروع کرتے ہیں اگر ہم x تو یہ وہ دو پوائنٹس ہیں جہاں
یہاں اس کرن سے شروع کرتے ہیں پھر ہم اس شعاع تک پہنچتے ہیں یہاں تک پہنچتی ہے اگر ہم اسے ایک چوتھائی انقلاب کے ذریعے گھمائیں جو
کے دو ریڈینز اور دوسرا حل یہ ہے کہ جب آپ اس مقام پر pi برابر ہے x ریڈینز ہے لہذا ایک حل یہ ہے کہ pi 2 کہ 90 ڈگری یا
پہنچتے ہیں
ریڈین ہوتا ہے pi x 2 تو یہ نقطہ انقلاب کے تین چوتھائیوں کے مساوی ہوتا ہے اور انقلاب کا تین چوتھائی 3
کے ہر عدد عدد کے بعد pi کو دہراتے ہیں۔ دو v کے سائن اور کوزائن دونوں ان کے x تو یہ دوسرا حل ہے اور جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے کہ
cos کے برابر ہے ہذا اس مس وات کا حل pi ک دو k مع cos کے x کے برابر ہے cos ک x cos cos x کا l alues
عددی عدد ہے آئیے ہم کچھ زاویوں کی سائن اور کوزائن کو n جہاں pi سے جمع آدھا گنا n ب ابر ہے x صفر کے برابر ہے جب x
تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو ہم اکثر دیکھتے ہیں آئیے ہم اس دائیں زاویہ مثلث پر
مائنس تھیٹا ہے pi by two جہاں یہ زاویہ 90 ڈگری ہے اور یہ زاویہ تھیٹا ہے یہ تیسرا زاویہ پھر abc توجہ مرکوز کریں یہاں
مائنس تھیٹا کے برابر ہے اب sine by 2 کا pi اور ac by ac کی لمبائی cos segment ab تو ہم یہاں کیا دیکھیں گے کہ تھیٹا کا
مائنس تھیٹا ہے اب ایک زاویہ کی سائن کی تعریف سے اس زاویے pi by 2 ہم دیکھنے کی کوشش کر رہے ہیں دوسرے زاویہ پر جو یہ زاویہ
کی سائن اس زاویہ کے مخالف کے برابر ہو گا
ہے ac جو hypotenuse سے تقسیم ہوتا ہے ab تو اس زاویہ کا مخالف اس طرف
کی سائن بذریعہ دو مائنس تھیٹا اس لیے pi برابر ہے cos تو ہم یہاں کیا دیکھتے ہیں۔ یہ کہ یہ دونوں تناسب یکساں ہیں اور اس لیے تھیٹا کا
اگر آپ کو کسی بھی زاویے کی سائن معلوم ہے
تو آپ یہ بھی جان سکتے ہیں کہ اگر آپ ہر زاویے کی نشانی جانتے ہیں
تو آپ کر سکتے ہیں۔ ہر زاویے کی ان کوزائن کو جانیں
تلاش کرنے کی کوشش کریں اور کچھ عام طور پر cos تو بنیادی طور پر یہ ایک ہی ہیں اور یہ ان کے درمیان تعلق ہے اچھی طرح سے آئیے ہم
کچھ زاویوں پر دستخط کریں جو ہمیں عام طور پر ملتے ہیں
جہاں یہ 90 ڈگری ہے اور یہ ایک سماوی دائیں زاویہ isosceles right triangle triangle abc تو آئیے اس پر غور کریں۔
ہے جو کہ یہ رخ ہے اور اس طرف کی لمبائی برابر isosceles ایک اکائی کے برابر ہے اور کیونکہ یہ bc برابر ab مثلث ہے اس لیے
بذریعہ 4 ریڈین ہوگا اور پائتھاگورس pi ہے یہ زاویہ اور یہ زاویہ بھی برابر ہوں گے اور اس لیے دونوں 45 ڈگری ہوں گے جو کہ دونوں کا
کی مربع جڑ ہوگی مربع جمع بی سی مربع جو کہ دو اکائیوں کے مربع جڑ کے برابر ہے اور اس ab تھیوریم کے مطابق اس فرضی کی لمبائی
کے برابر ہو گا جو ایک ہے دو کے مربع جڑ سے تقسیم اور hypotenuse بذریعہ چار ملحقہ تقسیم شدہ cos کی pi وجہ سے اس زاویہ
جو کہ بھی ایک جیسا ہو گا hypotenuse مساوی کے مخالف کو تقسیم کر کے sine by 4 will کی pi اسی طرح
کے برابر ہو 4 یا 45 ڈگری اس زاویہ کا کوزائن اور سائن دونوں ایک اور ایک ہیں اور وہ دو کے مربع جڑ پر ایک کے برابر pi تو جب زاویہ
کی سائن اور کوزائن معلوم کرنا چاہیں گے جو کہ 30 ڈگری ہے pi ہیں ۔ ہم ایک اور چھوٹی مثال لیتے ہیں جہاں ہم 6 ریڈینز کے ذریعے
ہے اور ہم چاہیں گے سائن اور pi جہاں یہ زاویہ 6 ریڈینز یا 30 ڈگری سے abc تو ہمارے پاس یہاں ایک مثلث کا صحیح زاویہ مثلث ہے
کوزائن کو تلاش کرنے کے لیے آئیے اس لائن کو سی بی سی بی کو اس طرح بڑھاتے ہیں اور یہاں ایک اور زاویہ بناتے ہیں جو کہ مائنس پائی
سکس کے برابر ہے
ہے ٹھیک ہے اب یہ شعاع اور pi by six تو ہم اسے یہاں ایک اور کرن اس طرح بناتے ہیں کہ یہ زاویہ اس کی شدت کا ہے۔ یہ زاویہ بھی
پر acd کہتے ہیں اور اب ہم اس مثلث d یہ سیدھی لکیر اس مقام پر ایک دوسرے کو ایک دوسرے کو کاٹتی ہے آئیے ہم اسے
ہے اور abc دیکھیں ان دو مثلثوں میں ایک مثلث ah توجہ مرکوز کرتے ہیں لیکن اس سے پہلے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر ہم صرف
ہے اور یہ زاویہ 90 ab ہے لہذا یہ مثلث اور ہم سمجھتے ہیں کہ یہ دونوں مثلث ہم آہنگ ہیں کیونکہ ان کا ایک مشترکہ سائیڈ adb دوسرا مثلث
ایک سیدھی لکیر ہے۔ زاویہ بھی 90 ہے اور پھر بلاشبہ تعمیر کے لحاظ سے یہ اور یہ زاویہ یہ زاویہ اور یہ زاویہ cd ہے اور کیونکہ یہ لائن
بھی برابر ہیں لہذا مثلث abc اور مثلث abd
متفق ہیں یا بالکل ایک ہیں اور اس وجہ سے اطراف کی لمبائی بھی ہے۔ برابر abd اور مثلث abc تو مثلث
ایک اکائی کے برابر ہے AC تو فرض کریں کہ اگر یہ
پر adc تو اشتہار بھی ایک اکائی ہے کیونکہ یہ دونوں مثلث ایک دوسرے سے ہم آہنگ ہیں مزید آئیے ہم بڑے مثلث
توجہ مرکوز کریں
اس مخصوص مثلث کے بارے میں بات کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ان دو مثلثوں کی ہم آہنگی سے یہ زاویہ اور adc تو اب میں ہوں اس مثلث
یہ زاویہ برابر ہونا ضروری ہے لہذا اگر اس زاویہ کی پیمائش تھیٹا ہے
ہے۔ تین یا ساٹھ ڈگری کے حساب سے pi تو یہ زاویہ بھی تھیٹا ہے اور یہ کل زاویہ یہاں
تو اب ہم جو دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ اگر آپ اس مثلث کو دیکھیں
تو یہ ایک آئوسیلس مثلث ہے جس سے شروع ہوگا کیونکہ یہ زاویہ اور یہ زاویہ برابر ہیں اور اس وجہ سے مثلث کے تمام اندرونی زاویوں کا
ریڈینز ہونا چاہیے pi جمع تھیٹا جمع تھیٹا کو pi by 3 جمع تھیٹا پلس تھیٹا ہے لہذا pi by 3 مجموعہ 180 ڈگری ہے۔ یہ 60 ڈگری جو

Prutor@IITK

بذریعہ تین ریڈین ہے pi اور جس کا اصل میں یہ مطلب ہے کہ تھیٹا برابر
ایک مساوی adc ہے لہٰذا یہ مثلث pi by three اور یہ یقینا pi by three بذریعہ تین ہے یہ زاویہ بھی ہے pi تو یہ تھیٹا بھی
کے برابر ہیں 3 ریڈینز یا 60 ڈگری اور اس لیے اس لائن سیگمنٹ سی ڈی کی لمبائی pi مثلث ہے یہ ایک مساوی مثلث ہے کیونکہ تینوں زاویہ
بھی دوسرے دو اطراف کی لمبائی کے برابر ہوگی جو ایک یونٹ ہے لہذا یہ سی ڈی بھی ایک یونٹ کی لمبائی کی ہے
ان دونوں اطراف کی لمبائی abd اور abc تو اب ہمارے پاس جو ہے وہ یہ ہے کہ سی ڈی کی لمبائی ایک یونٹ مزید ہے کیونکہ یہ دو مثلث
ایک اکائی ہے cd متفق ہیں لہذا یہ لمبائی اور اس لمبائی کو برابر ہونا چاہئے لہذا اگر پوری لمبائی bd اور bc
تو پتہ چلتا ہے کہ یہ لمبائی نصف یونٹ ہوگی نصف اکائی ہونی چاہیے اور اس لیے اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس زاویہ pi کی cosine by
six افسوس اس زاویے کی یہ نشانی ہے
کے برابر ہے pi by six تو اس زاویہ کی سائن
انتی سائن کے برابر ہوگی اس زاویہ کا pi کی sine by 6 تو
پر abc تو آئیے ہم اس مثلث
کا سائن بذریعہ چھ فرضی کے pi نصف یونٹ کے برابر ہے اور اس لیے cb توجہ مرکوز کریں جس کا فرضی طوالت ایک یونٹ ہے اور
کا سائن pi by six ہم نے دکھایا کہ ction مخالف ہو گا جو نصف تقسیم ہو گا جو نصف کے برابر ہے۔ اس سادہ ساخت کے ذریعے
ایک ہے x مربع cos جمع x آدھے کے برابر ہے اور اسی طرح کیونکہ ہم نے پچھلی کلاس میں دکھایا تھا کہ سائن اسکوائر
ہو جائے گی۔ جڑ تین بائے دو کے برابر ایک pi کی cos by six تو اس تعلق کو استعمال کرتے ہوئے آپ جو دکھا سکتے ہیں وہ یہ ہے کہ
کے درمیان کوئی xn cos کے x کی سائن اور اسی طرح مائنس x کی سائن اور مائنس x اور سوال جو ذہن میں آئے گا وہ یہ ہے کہ کیا
تعلق ہے
محور ہے اور ہمارے یہاں ایک y محور ہے یہ x محور ہے یہ x ہے۔ یہ o تو ہم نے یہاں دوبارہ ایک اکائی کا دائرہ کھینچا ہے جس کا مرکز
ہے لہذا اگر میں اس سے ایک کھڑا چھوڑ دوں x ہیں اور گردش کا یہ زاویہ b اور e کوآرڈینیٹ بالترتیب y اور x ہے جس کے p نقطہ
کے برابر ہوگی oa a پھر یہ لمبائی a محور پر x اس پوائنٹ پر p پوائنٹ
میں دلچسپی ہے پھر x کے برابر ہوگی اب ہمیں گھمائیں کیونکہ ہمیں اس زاویہ مائنس b کے برابر ہوگی اور یہ یہاں یہ لمبائی oa a تو یہ
کی ضرورت ہے۔ اس مخصوص رداس کو گھڑی کی سمت میں گھماؤ کی اسی مقدار سے r ہمیں مائنس ایکس حاصل کرنے کی ضرورت ہے ہمیں
کے لئے کیا تھا لہذا جب آپ اسے اسی مقدار سے گھماتے ہیں x گھمائیں جو ہم نے اس زاویہ
ہوتا ہے اور جب ہم یہاں سے گھومتے ہیں x تو یہ زاویہ مائنس
تو جب ہم گھڑی کی سمت میں گھومتے ہیں گردش کی اتنی ہی مقدار جو ہم نے یہاں سے یہاں تک جاتے وقت کی تھی آئیے ہم یہ کہتے ہیں کہ ہم
گناہ کا نشان ڈھونڈتے ہیں لہذا فرض کریں کہ اس کا x کا مائنس x تک پہنچتے ہیں مائنس q کا نشان تلاش کرنے کے لئے ایک نقطہ x مائنس
کا سائن ہے x پھر مائنس d اور c ہے q کوآرڈینیٹ برابر ہوگا۔ پوائنٹ
کی سائن برابر ہوگی x کے برابر ہے یہ وہ چیز ہے جو ہم پہلے ہی جانتے ہیں کہ مائنس b کی سائن x تو
کو فرضی کی لمبائی سے تقسیم کیا جاتا ہے جو ایک کے d جو ہے q کوآرڈینیٹ ہے اس پوائنٹ y کا ah تو یہ اس کے مخالف ہے لہذا یہ
برابر ہوتا ہے
کے برابر ہوتا ہے d کا سائن s تو مائنس
مثلث کو دیکھتے ہیں ah کے درمیان کوئی تعلق ہے یا نہیں اب ہم اس b اور d تو بنیادی طور پر ہمیں یہ دیکھنے کی ضرورت ہے کہ آیا اس
ہے اگر ہم یہاں یہ دو مثلث دیکھیں a تو یہ نقطہ
تو ایک مثلث اوب ہے
تو یہاں یہ مثلث ہے اور دوسری مثلث اوق ہے پھر جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ افسوس کی بات یہ ہے کہ ان دو مثلثوں کے درمیان وہ ہم آہنگ
ان دونوں میں مشترک ہے اس o ہیں کیونکہ اس طرح مثلث اوپ کوشش ہے مثلث اوق کے موافق ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ یقیناً یہ سائیڈ
کے برابر ہے کیونکہ یہ دونوں اس یونٹ کے دائرے کا رداس ہیں اس لیے ہمارے پاس oq کی لمبائی oaq مثلث op کا یہ سائیڈ oap مثلث
ہے اس زاویہ کے برابر ہے کیونکہ یہ دونوں طول و aop یہاں جو کہ اس مثلث کا زاویہ x دو اطراف ہیں جو برابر ہیں اور پھر یہ زاویہ
x سے p ہم نے گرا دیا تھا اس نقطہ a عرض میں ایک جیسے ہیں لہذا یہ دونوں مثلث اب ہم آہنگ ہیں جب ہم نے حقیقت میں یہ نقطہ کھینچا تھا
محور تک کھڑا ہے لہذا اب یہ 90 ڈگری ہے کیونکہ یہ دونوں مثلث ہم آہنگ ہیں یہ زاویہ بھی اس زاویہ کے برابر ہونا چاہئے جو 90 ڈگری بھی ہوگا
دراصل ایک سیدھی لکیر ہوگی کیونکہ یہ زاویہ 90 ہے اور یہ 90 ہے لہذا یہاں کل paq اور اس وجہ سے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ یہ
ایک سیدھی لکیر ہے جو دو طرفہ ہے جو بنیادی طور پر ایک دوسرے کو کاٹ رہی paq زاویہ یہ کل زاویہ 180 ڈگری ہے اور اس وجہ سے یہ
کے a برابر so c کے برابر ہو گا a کوآرڈینیٹ بھی x کا q محور 90 ڈگری پر ہے اور اس وجہ سے یہ ظاہر ہے کہ اس نقطہ x ہے۔
محور کے ساتھ 90 ڈگری پر ایک دوسرے کو کاٹ x اس وجہ سے ظاہر ہوتا ہے کہ اس کی وجہ یہ ہے کہ یہ پوری لائن سیدھی لائن ہے اور یہ
کوآرڈینیٹ محور کے م y رہا ہے لہذا بنیادی طور پر یہاں یہ لائن سیگمنٹ اس کوآرڈینیٹ محور
توازی ہے کیونکہ یہ دونوں لائنیں م
کا کیا ہوگا کیونکہ یہ d لیکن اب a برابر ہے c کا مساوی ہونا ہوگا یہ یہاں صحیح ہے لہذا c توازی ہیں یہاں اس خاص نقطہ کے کوآرڈینیٹ
کے برابر ہوگی اس کی لمبائی مثلث اوق کے اس طرف کی لمبائی کے برابر t دونوں مثلث یہاں متفق ہیں پہلے مثلث کے اس طرف کی لمبائی
ہوگا d محور سے نیچے ہے لہذا ah x کے برابر ہوگی لیکن چونکہ یہ چوتھے کواڈرینٹ میں ہے یہ b ہوگی لہذا اس لمبائی کی لمبائی بھی
b کا سائن مائنس x کے برابر ہو جہاں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اب یہاں اور یہاں سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ مائنس b مائنس
کے برابر ہے کے ساتھ شروع کریں اور x سائن b کے مائنس کے برابر ہے جو اس حقیقت سے ہوتا ہے کہ x کے برابر ہوگا جو کہ مائنس
اس لیے جو ہم دیکھتے ہیں وہ یہ ہے کہ مائنس ایکس کی سائن سائن ایکس کے مائنس کے برابر ہے اور یہ ایک بہت ہی بنیادی تعلق ہے اب اس قسم
کا ایک خاص نام ہے اور وہ ہیں طاق فنکشن کہلاتے ہیں ان کو طاق فنکشن کہا fx کے برابر ہے مائنس کے x کے مائنس f کے فنکشنز جہاں
جاتا ہے اگر ہم یہاں ایک ہی اعداد و شمار کو استعمال کرتے ہیں
اگر آپ اس مثلث کو دیکھیں cos کی x تو ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ
کے لیے ہم اس x کیا ہے؟ مائنس cos اور ہے۔ مائنس ایکس کی a اس لمبائی کے برابر ہے ایک سے تقسیم کیا گیا ہے جو cos کی x تو
کے برابر ہوگا جو فرضی سے تقسیم کیا جائے گا جس کی لمبائی ایک ہے اس لیے یہ a پھر اسی cos کا x مثلث اوق کو دیکھتے ہیں اور مائنس
f کے برابر x کے f ہمیشہ برابر ہوتا ہے۔ اور ایسے فنکشنز جہاں cos کا x اور مائنس cos کا x کے برابر ہے اور اس لیے a بھی
کے برابر ہے f کے x کے لئے مائنس x تمام f کا x ہو کہ f کے اگر کوئی فنکشن f کے x جب f کے
کا x کی ایک قدر کے لئے نہیں ہے بلکہ تمام اقدار کے لئے ہے x تو یہ صرف
تو یہاں بھی یہ ہے اگر اسے ایک طاق فنکشن کے طور پر کہا جاتا ہے

کی تمام اقدار کے لئے پورا کرنا چاہئے تاکہ ہم دیکھیں x کی ایک قدر کے لئے نہیں بلکہ اس کے ڈومین میں x تو فنکشن کو اس تعلق کو صرف
cos حقیقی نمبر سے تعلق رکھنے والے حقیقی اعداد کا سیٹ جو cos کا x کی تمام اقدار کے لیے مائنس x برابر ہے۔ cos x کہ
فنکشن کا ڈومین ہے اس لیے اس طرح کے فنکشنز کو ایون فنکشنز کہا جاتا ہے ان کو ایون فنکشنز کہا جاتا ہے
کی قدروں کی حد میں تھوڑا سا گہرا یا تھوڑا سا گہرا کھودیں ہم cos x اور sin x تو اگلا ہم ایک کو تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔
کو صفر سے بڑھا کر دو پائی تک پہنچتے ہیں x حرکت کرتے ہیں جب ہم
صفر کے درمیان ہوتا ہے اور اسی طرح 0 ہوتا ہے جب ہم یہاں ہوتے ہیں x گردش کا زاویہ x تو جب ہم اس کے درمیان ہوتے ہیں جب یہ زاویہ
اور جیسا کہ ہم اس نقطہ کو گھڑی کی مخالف سمت میں دائرے پر منتقل کرتے ہیں سمت جب تک ہم اس نقطہ تک نہیں پہنچ جاتے ہم سب ہیں ہم
ریڈین کے درمیان ہوتا ہے pi by 2 اور x 0 ہمیشہ پہلے کواڈرینٹ میں ہوتے ہیں لہذا جب
پوائنٹ کے ایکس cos x کوآرڈینیٹ پوائنٹ اور y کے b برابر ہوتا ہے sin x پہلے کواڈرینٹ میں ہوتا ہے اور چونکہ p تو پوائنٹ
کوآرڈینیٹ جیسا کہ آپ یہاں دیکھ سکتے ہیں صفر اور ایک کے درمیان ہے اور اس وجہ سے x کوآرڈینیٹ کے برابر ہے اب پہلے کواڈرینٹ میں
جو x صفر سے بڑا اور ایک کے برابر سے کم ہوگا جب کہ سائن cos x اس کے درمیان ہوگا صفر سے ایک کے وقفہ میں ہوگا لہذا cos x
کوآرڈینیٹ ہے وقفہ صفر سے ایک میں بھی ہوگا اس لیے میں نے یہاں ایک گھنگریالے بریکٹ رکھا ہے کیونکہ میں نے ah y کہ اس نقطہ کا
ایک سے زیادہ ess ہونا پڑے گا۔ l کو sin x سے دو کے مقابلے میں pi سے کم ہونے کی وضاحت کی ہے۔ x پہلے کواڈرینٹ کو
کے برابر دو کے برابر ہوتا ہے اور اس وجہ سے یہ کبھی بھی اس قدر کو x pi صرف ایک کے برابر ہوتا ہے جب ah sine x کیونکہ
حاصل نہیں کرے گا اور اس لیے یہاں ایک گول بریکٹ ہے اور اسی طرح ہم مثال کے طور پر اس جدول کے دیگر اندراجات کو بھر سکتے ہیں۔ اگر
ہم دائرے کے ساتھ آگے بڑھتے ہیں
تو اگر ہم اس نقطہ سے گھڑی کی مخالف سمت میں آگے بڑھتے ہیں
کے درمیان ہوتا ہے pi by two تو ہم دوسرے کواڈرینٹ میں ہوتے ہیں اس طرح جب گردش کا زاویہ
بنیادی طور پر ہے اگر آپ دیکھتے sine x نصف گردش ہے لہذا دوسرے کواڈرینٹ میں pi تک اتنا زیادہ ہوتا ہے۔ pi by two pi تو
کوآرڈینیٹ دائیں ہے sin x y ہیں کہ
محور کے اوپری طرف ہے۔ لہذا دوسرے کواڈرینٹ میں x کے مثبت پہلو پر ہے یہ اس افقی ah دوبارہ اس کے درمیان پڑے گا sine x تو
کوآرڈینیٹ ہمیشہ صفر اور ایک کے درمیان ہوگا y کسی بھی نقطہ کا
کے cos x کے لیے cos x تو یہ بھی درمیان میں ہوگا لیکن اس صورت میں یہ صفر اور ایک کے درمیان ہوگا لیکن دوسرے کواڈرینٹ میں
محور کے دوسری طرف ہے y اس t لیے کیا ہوتا ہے وہ نقطہ
کوآرڈینیٹ کے برابر ہے x دائرے پر متعلقہ نقطہ کے cos sine کوآرڈینیٹ منفی ہو جاتا ہے اور چونکہ ایک زاویہ کا x تو کیا ہوتا ہے کہ
کی قدر دوسرا کواڈرینٹ اس طرح سے جائے گا جب ہم یہاں ہوں گے cos x کیونکہ اس میں
تو اس پائی کا کوسائن بذریعہ دو اصل میں صفر ہے اور جب ہم اس مقام پر پہنچتے ہیں
تو یہ اتنے کے برابر ہوتا ہے کہ اس پوائنٹ کا کوآرڈینیٹ مائنس ون کوما صفر ہے
کا کوسائن مائنس ون اور x کوآرڈینیٹ مائنس ایک ہے ایک سو اسی ڈگری کا کوسائن مائنس ون کے برابر ہے لہذا دوسرے کواڈرینٹ میں x تو
صفر کے درمیان ہوگا اور اسی طرح آہ دیگر اندراجات کو بھرا جا سکتا ہے اس لیے بنیادی طور پر ہمیں گھڑی کی مخالف سمت میں حرکت کرتے
رہنا ہے۔ سمت یہاں سے شروع ہو کر جب ہم آگے بڑھتے ہیں
تو اس مقام تک ہم تیسرے کواڈرینٹ میں ہوتے ہیں اور پھر جب ہم اس مقام سے مزید آگے بڑھتے ہیں جہاں سے ہم نے شروع کیا تھا پھر ہم چوتھے
محور x y محور پر ہمارے پاس گردش کا زاویہ ہے x کو سائن فنکشن کے گراف کو پلاٹ کرنے کے لئے tr y کواڈرینٹ میں ہیں اب ہمیں
کی سائین کی قدر ہے x پر ہمارے پاس گردش کے زاویہ
یونٹ کے AH تو ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک ہے اور یہ مائنس ایک ہے اور آئیے ہم کہتے ہیں کہ اب میں نے یہاں ایک چھوٹا سا دائرہ کھینچا ہے
پر ہے اور ہم کہتے ہیں کہ ہم اس نقطہ سے شروع کرتے ہیں یہاں سے شروع کرتے ہیں یہاں سے شروع کرتے ہیں o رداس کا مرکز اس نقطہ
اور اب اس مقام پر گھڑی کے مخالف سمت میں جانے کی کوشش کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ سب سے پہلے پچھلی سلائیڈوں سے ہم جانتے ہیں کہ
اس مقام پر گردش کا کوئی زاویہ نہیں ہے x کوآرڈینیٹ کے برابر ہوگا اب اس مقام پر جب y کا سائن اس پوائنٹ کے x کسی بھی نقطہ کے
صفر کے برابر ہیں اور چونکہ ہم یہاں دائرے پر اس نقطہ پر ہیں x محور پر ہم یہاں x تو کوئی گردش نہیں ہے گردش کا زاویہ صفر ہے لہذا
کے برابر صفر کا سائن صفر ہوگا لہذا ہم اس نقطہ کو اس طرح کھینچتے ہیں ہم جیسے جیسے ہم مخالف x کوآرڈینیٹ صفر ہے اور اس لئے y
سمت میں آگے بڑھتے ہیں۔ آئیے ہم کہتے ہیں کہ ہم اس پوزیشن اور اس پوزیشن کے درمیان آدھے راستے پر پہنچ جاتے ہیں جو یہاں ہے لہذا ہم
وہاں کہیں ہیں
سے چار یا پینتالیس ڈگری ہے لہذا جب ہم یہاں پہنچیں گے pi تو اسے 90 ڈگری کا نصف ہونا چاہئے جو
کوآرڈینیٹ کے برابر ہوگا جو جڑ دو کے برابر ہوگا جو تقریبا صفر پوائنٹ سات صفر سات ہے لہذا y کے ah تو اس زاویہ کی علامت اس نقطہ
کی قدر 0.707 ہے اور اس کے بعد سے یہ 1 ہے اور اس کا نصف ہو جائے گا sin pi by 4 ہے اور pi by 4 ہم یہاں دیکھتے ہیں یہ

تو یہ 0.5 ہو جائے گا
تو آئیے کچھ کہتے ہیں تقریباً اتنا بہت افسوس ہے کہ یہ 2 بائی 3 ہو جائے گا
تو یہ 0.66 ہے
تو یہ کچھ ایسا ہو گا
تو یہ لمبائی کچھ اس طرح ہو گی یہاں سے یہاں تک کیونکہ یہاں ایک تین چھوٹے مربع دکھائے گئے ہیں
کے اس x فور پر جائیں گے جب آپ سائن pi by چار تقریباً ایک آہ صفر پوائنٹ سات ہو گا اس لیے جب آپ صفر سے sin pi by تو
گراف کو پلاٹ کرتے ہیں
تو یہ کچھ اس طرح لگتا ہے اور پھر جب ہم آگے گھڑی کی مخالف سمت میں مزید پینتالیس ڈگری تک جائیں جہاں ہم اس مقام تک پہنچتے ہیں جس کا
ہے 1 اور اس لیے sine pi by 2 ہے لہذا pi by 2 کوآرڈینیٹ ایک کے برابر ہے اور گردش کا یہ زاویہ اب y کوآرڈینیٹ ہے جس کا
ہم اس مقام تک پہنچتے ہیں
تو اب ہم گراف کو اس طرح جوڑتے ہیں پھر اس پوائنٹ سے شروع ہونے والی گھڑی کی مخالف سمت اور پھر اس سمت جاتے ہوئے ہم دوسرے
کوآرڈینیٹ کی قدر کم ہونی چاہیے۔ ایک سے زیادہ کیونکہ ہم یہاں y کواڈرینٹ میں ہیں لیکن اب یہاں دوسرے کواڈرینٹ میں کسی بھی نقطہ پر
دوبارہ ایک سے کم ہونا شروع ہو جائے گا اور جب تک ہم یہاں اس مقام تک پہنچ جائیں x نیچے آ رہے ہیں اس لیے سائن
تو اس نقطہ کے لیے یہاں کل گردش کا زاویہ ایک سیدھی لکیر ہے جو 180 ڈگری یا پائی ریڈینز ہے اور اس نقطہ کا کوآرڈینیٹ یہاں مائنس ون
کوآرڈینیٹ صفر ہے اور اس لیے ایک اسی ڈگری کا سائن صفر ہے اور اس لیے دوسرے کواڈرینٹ میں اگر ہم y صفر ہے اس لیے اس پوائنٹ کا

اس گراف کو پلاٹ کرنے کی کوشش کریں
کے گراف پر سائن صفر کے برابر pi کچھ ایسا ہی نظر آئے گا لہذا یہاں یہ نقطہ یہاں اس پوائنٹ سے مطابقت رکھتا ہے یہاں wi. تو یہ
ہے اور پھر ہم مزید آگے بڑھ سکتے ہیں اور ہمیں صرف یہاں کسی بھی نقطہ کے لئے کرنا پڑے گا مثال کے طور پر یہاں ہم اس نقطہ کو یہاں
کہتے ہیں۔ ہمیں صرف یہاں سے شروع ہونے والے گردش کے کل زاویہ کو دیکھنے کی ضرورت ہے اور پھر گردش کے اس زاویہ کے مطابق
کوآرڈینیٹ کو اس پر پلاٹ کرنا y کوآرڈینیٹ کو دیکھنے کی ضرورت ہے اور اس y ہمیں یہ نقطہ ملتا ہے اور پھر ہمیں صرف اس نقطہ کے
محور یہاں اس طرح ہم اس گراف کو مکمل کرتے ہیں لہذا اگر آپ اسے تھری پائی بائی ٹو پر آگے کرنے کی کوشش کریں جو اس مقام پر y ہوگا۔
تھری پائی بائی ٹو کا سائن مائنس ون کے برابر ہوگا
تو آپ کو یہیں کہیں ہونا چاہئے لہذا اگر آپ کوشش کریں اس کو جوڑنے کے لیے آپ کو کچھ اس طرح کا گراف مل سکتا ہے اور پھر اس طرح
تک جانا تب ہوتا ہے جب آپ تیسرے کواڈرینٹ میں ہوتے ہیں اور پھر آگے جاتے ہیں pi by 2 سے pi 3
تو آپ چوتھے کواڈرینٹ میں ہوتے ہیں اور آپ کا وکر نظر آئے گا۔ کچھ اس طرح
ah کو اسی طرح سے پلاٹ کیا جا سکتا ہے یہ صرف یہ ہے کہ x cosine کے ah sine of x تو یہ آپ کس طرح پلاٹ کرتے ہیں
پر پلاٹ y کوآرڈینیٹ کی قدر یہاں x کوآرڈینیٹ کو دیکھنے کے لئے آپ کو ان پوائنٹس میں سے ہر ایک کے y کے بجائے اس پوائنٹس کے
کے کوسائن کا گراف ملتا ہے ہم خود ہمارے پاس نہیں جا رہے ہیں فرض کریں کہ آپ کے پاس دو زاویے x کرنی ہوگی۔ محور اس طرح آپ کو
کی قدریں معلوم ہیں y cos x cos y سائن x ہیں اور آپ کو سائن y اور x
x کا کوسائن تلاش کر سکتے ہیں اور پھر شاید y مائنس x کیا آپ y مائنس x تو کیا آپ اس کی قدر تلاش کر سکتے ہیں؟ اس زاویے سے
کا سائین تلاش کر سکتے ہیں، اس لیے ہم آگے بتانے جا x کا کوزائن یا دو بار y جمع دو x کا کوزائن y جمع دو x کا کوسائن یا y جمع
اور زاویوں کے مجموعے کو ظاہر کرنے کے لیے cosine کے لحاظ سے فرق کے cos x sine x cos y sin y رہے ہیں ہم
پر غور کریں q اس یونٹ کے دائرے کا مرکز ہے اور یہاں اس نقطہ o فارمولے اخذ کرنے جا رہے ہیں اور فرض کریں کہ
بھی pen تو مجھے ایک نیلے رنگ کا استعمال کرنے دیں۔
کے لیے گردش کا p ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ let اور p ہونے دیں اور پھر ہمارے پاس ایک اور نقطہ x تو گردش کے اس زاویہ کو
ہے y زاویہ
کوآرڈینیٹ y ہوگا اور cos کا x کا کوآرڈینیٹ ہوگا x کا کوآرڈینیٹ q اس نقطہ y کے سائن اور کوسائن کی تعریف سے نقاط اور x تو
کا سائن ہوگا اور پھر یقیناً یہاں یہ زاویہ y کوآرڈینیٹ y ہوگا اور cos کا y coordinate x کا x کے لیے p سائن ہوگا۔ اس پوائنٹ
تک جانے کے لیے اس کی گردش کا r کے برابر ہوگا اور اب ہم ایک اور نقطہ بھی کھینچتے ہیں اس طرح کہ یہاں سے y مائنس yx مائنس x
زاویہ برابر ہے
کے برابر ہے y مائنس x تو سرخ رنگ میں یہ زاویہ بھی
ہے y مائنس x تو یہ بھی
کے نقاط ہوں r میں ایک کوما صفر ہے اس نقطہ a کے برابر ہے۔ لہذا اس نقطہ a تو اب ہمارے پاس ہے اور ہم کہتے ہیں کہ یہاں یہ نقطہ
x ہونے جا رہے ہیں cos کے y مائنس x سرخ رنگ میں ہے لہذا نقاط y مائنس x کے لئے گردش کا زاویہ r گے کیونکہ اس نقطہ
کا سائن ہے اب ہمیں دو پر فوکس کرتے ہیں۔ مثلث y مائنس x کوآرڈینیٹ y کوآرڈینیٹ ہے
کو دیکھیں گے opq تو ہم بھی جا رہے ہیں اس لیے ہم سب سے پہلے مثلث
کو اس سبز نقطے والی لکیر کے ساتھ جوڑنے دیں q اور p تو مجھے یہاں
ہے دوسرے مثلث پر غور کیا جانا ہے opq تو مثلث میں سے ایک مثلث
اب اگر آپ ان دو مثلثوں کو دیکھیں anr ہے کہ ہمیں ایک ساتھ جوڑنے کی ضرورت ہے oar تو مثلث
oq کے برابر ہے کیونکہ oar لمبائی میں اس طرف یا مثلث oq میں اس مثلث کا یہ سائیڈ opq تو ہمیں جو نظر آتا ہے وہ یہ ہے کہ مثلث
بھی یونٹ کی لمبائی کا ہے کیونکہ یہ ایک اور op کا مزید سائیڈ opq اور یا دونوں کا رداس ہے اس اکائی کے دائرے کا یہ دائرہ اس مثلث
کے برابر بھی ہے۔ oa کی وجہ سے oar بھی یونٹ کی لمبائی کا ہے جو اس مثلث op یہ تمام opq opq رداس ہے لہذا اس مثلث کا یہ
r ہے اور پھر aa یہ نقطہ o لہذا اگر آپ اس مثلث کو دیکھتے ہیں
ہے poq کا مزید زاویہ o کے برابر ہے اور اس مثلث oa کے سائیڈ oar مثلث opq مثلث کا ہے op بھی رداس ہے لہذا oa تو یہ
کے برابر ہیں اور اس وجہ سے یہ دونوں مثلث متفق ہیں یہ اب y مائنس x کے برابر ہے کیونکہ یہ دونوں زاویے aor مثلث کے زاویہ pq
اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ وہ ہم آہنگ ہیں کیونکہ وہ ان کے تمام اطراف کی لمبائی کے موافق ہیں اطراف مساوی ہونے چاہئیں اور اس
کی لمبائی کے ar کے سائیڈ oar کی سبز نقطے والی لکیر سے دکھائی دیتی ہے، مثلث opq کی لمبائی جو اس مثلث qp لیے اس طرف کی
برابر ہونی چاہیے، کیونکہ یہ دونوں مثلث ایک دوسرے کے موافق ہیں اب ہم کوشش کریں گے۔ اس حقیقت کو استعمال کرنے کے لیے اب اس
کوآرڈینیٹ cos x sin x میں q کے درمیان فاصلہ ہے جہاں پوائنٹ p اور q پوائنٹس qp یہ لمبائی ah حقیقت کو مزید اب یہ لائن
مربع کے برابر ہے لہذا اگر دو qp کے برابر ہے اسی طرح لکھنا ar لکھنا qp یعنی sin yi اور cos y میں q ہے اور پوائنٹ
لمبائی برابر ہیں
پورا مربع inus cos y کے برابر ہوگا۔ cos xm مربع صرف qp تو ان کے مربع کی لمبائی بھی برابر ہے اب
پورا مربع دائیں sin y مائنس sine x پورے مربع کے برابر ہے اور cos phi مائنس cos x مربع ہے qp تو یہ
کے a کے نقاط کو جانیں پوائنٹ r اور نقطہ a مربع کیا ہے نقطہ ar مربع کے برابر ہونا چاہئے اب ar مربع ہے اور اسے qp تو یہ
کی مربع ar ہیں لہذا اس لائن سیگمنٹ y مائنس sin x اور y مائنس cos x کے نقاط r نقاط ایک صفر ہیں نقطہ
y مائنس x مائنس صفر پورا مربع جو کہ y مائنس x مائنس ایک پورا مربع جمع سائن y مائنس کے برابر ہوگی cos x توازن کی لمبائی
کا سائن مربع ہوگا لہذا یہ دونوں برابر ہیں
مائنس x مربع جمع سائن cos x مائنس cos y whole تو آیئے اگلی سلائیڈ میں ان کو مزید آسان بنانے کی کوشش کریں پہلے اظہار
پورا مربع برابر ہے sin y
جمع x اور پھر جمع دوسرا مربع برابر ہے سائن مربع cos x cos y مائنس دو y مربع cos جمع x مربع cos تو پہلا مربع برابر ہے
x مربع cos جمع x سائن مربع x لیکن پھر ڈبلیو یہ جان لیں کہ کسی بھی زاویے کے لیے y سائن x مائنس 2 دو سائن y سائن مربع
x sin مائنس ٹو سائن cos x cos y ایک کے برابر ہے اس لیے یہ دونوں جوڑ کر ایک بن جاتے ہیں اور یہ دونوں بھی جوڑ کر ایک منفی دو
بن جاتے ہیں اور یہ اس کے برابر تھا y
تو یہ اس پہلے اظہار کی سادگی تھی اور یہ اس مخصوص اصطلاح کے برابر ہے آہ یہ خاص اظہار جو دوسرا اظہار ہے
تو آیئے اس کو بھی بڑھاتے ہیں
مربع cos جو برابر ہے y مائنس x مائنس 1 پورا مربع پلس سائن مربع y مائنس cos x تو ہم نے کہا کہ اس کے برابر ہونا ضروری ہے۔

اور y مائنس x مربع کے برابر ہے cos جو اب اس y مائنس x پلس سائن مربع y مائنس cos x پلس ایک مائنس ٹو y مائنس x میں ایک کا اضافہ ہو جائے گا y مائنس x اسکوائر sin
چونکہ اب یہ اور یہ برابر ہیں لہذا جب آپ برابر کرتے ہیں جب ہم ان کو برابر y مائنس x تو یہ آسان ہو جائے گا ایک جمع ایک مائنس ٹو کوس کرتے ہیں
اور یہ ایک بہت ہی os x cos y plus sine x sine y کے برابر ہے۔ c برابر cos کی y مائنس x تو ہمیں آخر کیا ملتا ہے بنیادی نتیجہ ہے جسے ہم بعد میں اپنے آہ دوسرے لیکچرز میں استعمال کریں گے ٹھیک ہے
cos x cos y plus sin x sin y کے برابر ہیں y cos اور x مائنس کے کوئی بھی دو زاویے x تو ہم نے ابھی دیکھا ہے کہ cos x plus y کے cos x plus y کے لئے اس فارمولے کو استعمال کر سکتے ہیں cos x minus y کے بارے میں کیا ہے ہم کے طور پر لکھ سکتے ہیں اور پھر اس فارمولے cos کے y مائنس آف مائنس x لئے بھی ایک اظہار اخذ کرنے کے لئے اس طرح ہم اسے کو استعمال کریں
cos x کے سائن میں جو sine x minus y پلس y مائنس cos of بن جائے گا cos x تو یہ اس فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے cos y کے برابر ہے لہذا ہمارے یہاں cos y y مائنس cos of ایک یکساں فعل ہے لہذا cos کے برابر ہے اب ہم نے دکھایا تھا کہ ہے لہذا ہمیں یہاں مائنس سائن ملتا ہے اور یہ y کی سائن مائنس سائن y فنکشن ہے اور اس وجہ سے مائنس r کی سائن ایک y ہے لیکن بن جاتا ہے y مائنس سائن ایکس سائن
تو اس کے ساتھ ہم ختم کرتے ہیں۔ دوسرا لیکچر جہاں ہم نے سائن اور کوسائن کے درمیان مزید تعلقات کے ساتھ شروع کیا تھا۔ یہ کیسے ہوا کہ سائن فنکشن ایک طاق فنکشن ہے کوزائن فنکشن ایک ایون فنکشن ہے ہم نے یہ بھی دکھایا کہ سائین اور کوزائن کے لیے گراف کیسے پلاٹ کیے جاتے ہیں اور آخر کار ہم نے یہاں فرق کی کوزائن اور دو زاویوں کے مجموعے کے لیے ایک اظہار بھی اخذ کیا اگلی کلاس میں ہم اس نشانی پر کو کیسے اخذ کیا جاتا ہے بنیادی طور پر ان مساوا ah بحث کریں گے کہ
توں سے ہی ہم فرق کی علامت اور دو زاویوں کے مجموعے اور زاویوں کے دو بار اور تین بار کے سائن اور کوزائن اور کچھ دوسرے رش توں کو اخذ کریں گے۔

Pruthvi@IITK