त्रिकोणमितीय कार्यों पर पहले व्याख्यान में आपका स्वागत है, हम उस पृष्ठभूमि की थोड़ी चर्चा के साथ शुरू करेंगे जिसका आपने पहले ही अपने 10 वीं कक्षा में अध्ययन किया होगा, यह मूल रूप से एक ग्रीक शब्द है जो त्रिकोण और मेट्रोन से बना है,

इसलिए त्रिकोणमितीय त्रिभुज मेट्रोनोम का अर्थ है माप

इसलिए अनिवार्य रूप से त्रिभुजों की भुजाओं को मापने और त्रिभुजों के कोणों और भुजाओं के बीच संबंध का पता लगाने का अध्ययन , उदाहरण के लिए, आइए हम इस समकोण त्रिभुज को abc लें,

इसलिए यह 90 डिग्री है, इस कोण को थीटा होने दें जिसका आपने अध्ययन किया होगा आपका रुझान मानक है कि जहां आपने अपने त्रिकोणमितीय अनुपात को परिभाषित किया होगा उदाहरण के लिए थीटा पाप थीटा और थीटा की स्पर्शरिखा

इसलिए इस कोण थीटा के लिए हम इस पक्ष को आसन्न पक्ष के रूप में कहते हैं और यह पक्ष एसी जो दाएं कोण के विपरीत है कोण त्रिभुज को कर्ण कहा जाता है और इस कोण थीटा के लिए यह भुजा ab को आसन्न भुजा और भुजा कहा जाता है।

ई इस कोण के विपरीत थीटा को स्पष्ट रूप से विपरीत पक्ष कहा जाएगा और यदि आप थीटा के कोसाइन को याद करते हैं जिसे आप कॉस थीटा के रूप में लिखते हैं तो कोस वास्तव में कोसाइन के लिए एक प्रकार का संक्षिप्त रूप है,

इसलिए इसे वास्तव में कोसाइन के रूप में लिखा जाता है और कॉस संक्षिप्त रूप है इसके लिए आप पहले से ही यह पढ़ चुके हैं कि यह वास्तव में आसन्न पक्ष की लंबाई के बराबर है जो कि खंड की लंबाई है जो कर्ण की लंबाई पर है जो कि एसी साइन थीटा की लंबाई है फिर से पाप साइन के लिए एक छोटा रूप है साइन पाप थीटा विपरीत पक्ष की लंबाई के बराबर है जो इस मामले में रेखा खंड बीसी है जो कर्ण की लंबाई से विभाजित है जो कि एसी है और फिर अंत में टैन थीटा जो इस कोण की स्पर्शरिखा है थीटा की लंबाई के बराबर है विपरीत पक्ष जो आसन्न पक्ष

की लंबाई पर बीसी है,

इसलिए यह पहले से ही आपके द्वारा अध्ययन किया गया है, बस इन त्रिकोणमितीय अनुपातों को विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए आपके द्वारा उपयोग किया गया है एमएस

इसलिए उनमें से एक बढ़ी हुई दूरी से संबंधित समस्याएं हैं उदाहरण के लिए यह विशेष समस्या यहाँ आह जहाँ आपके यहाँ एक ऊँची इमारत है जिसकी ऊँचाई आपके लिए अज्ञात है मान लीजिए कि ऊँचाई h मीटर है और जब आप यहाँ इस बिंदु पर खड़े होते हैं और भवन के शीर्ष को देखें, जब आप भवन की ओर बढ़ते हैं, तो आप जमीन के संबंध में जिस ऊंचाई कोण को मापते हैं, वह 30 डिग्री होता है, जब आप भवन की ओर 10 मीटर की दूरी पर जाते हैं, तो यह दूरी ac 10 मीटर होती है और फिर से ऊपर की ओर देखें इमारत की ऊंचाई स्पष्ट रूप से बढ़कर 60 डिग्री हो जाती है और फिर आपको निश्चित रूप से ऊंचाई का पता लगाने के लिए कहा जाता है या इन ऊंचाई कोणों के इस माप के आधार पर इमारत की ऊंचाई का अनुमान लगाया जाता है,

इसलिए जिस तरह से आप इसे करते हैं, एच को निरूपित करने दें।

यहां ऊंचाई बीसीबी के बराबर है, मान लें कि एस मीटर है और फिर आप स्पर्शरिखा सूत्र का उपयोग करते हैं,

इसलिए यदि आप इस कोण के लिए स्पर्शरिखा सूत्र का उपयोग करते हैं जो कि 30 डिग्री है जो आपको मिलता है तो वह तन है 30 डिग्री एच बटा एस प्लस 10 के बराबर है क्योंकि एच इसके लिए 30 डिग्री कोण एच विपरीत पक्ष है और एस प्लस 10 यहां आसन्न है और निश्चित रूप से आप जानते हैं कि टैन तीस एक बटा रूट तीन के बराबर है और फिर आप दूसरे त्रिभुज को देखें cdb यह त्रिभुज और आप फिर से कोण की स्पर्शरिखा को 60 डिग्री का उन्नयन कोण लिखते हैं और उसी सूत्र का उपयोग करके आप इसे s से s से विभाजित करने के लिए प्राप्त करते हैं इस मामले में साठ का तन मूल तीन के बराबर है

इसलिए अब आपको दो समीकरण और दो अज्ञात मिल गए हैं, आपको h और s दोनों को खोजने में सक्षम होना चाहिए, यहाँ एक छोटा सा प्रश्न है,

इसलिए पिछले पृष्ठ में जब हम इस कर्ण के विपरीत और आसन्न पक्ष पर चर्चा कर रहे थे , तो किस पक्ष के विपरीत की परिभाषा बहुत स्पष्ट है क्योंकि यह वह पक्ष है जो इस कोण थीटा के विपरीत आह के लिए है, उदाहरण के लिए यदि मुझे विचार करना है तो एक ही समकोण त्रिभुज को फिर से कहें, लेकिन इस कोण पर विचार करने के बजाय यदि थीटा को होना चाहिए था e अन्य कोण कोण acb यदि यह थीटा हो तो परिभाषा अच्छी तरह से कर्ण की परिभाषा अभी भी वही रहेगी क्योंकि कर्ण वह पक्ष है जो समकोण के विपरीत है

इसलिए यह अभी भी कर्ण रहेगा लेकिन आसन्न और विपरीत पक्ष अब बदल जाएगा अब यह पक्ष बीसी होगा

इसलिए यह पक्ष बीसी आसन्न पक्ष होगा और यह पक्ष एबी विपरीत पक्ष होगा क्योंकि अब यह पक्ष वह पक्ष है जो वास्तव में इस कोण के विपरीत है अब इसका कारण यह है कि यदि आप आह कोण या कुछ ऐसा देखा होगा जो आपको हर जगह मिलेगा,

इसलिए एक स्वाभाविक प्रश्न जो मन में आता है कि इन कोणों को कैसे मापें,

इसलिए एक सामान्य उपाय जिसे हम जानते हैं वह है डिग्री लेकिन इससे पहले आइए हम परिभाषित करें कि हमारा कोण अब क्या है इस किरण पर विचार करें तो यह एक किरण है और हम कहते हैं कि हम इस बिंदु o के बारे में इस किरण को घुमाते हैं तो यह इस बिंदु o को स्थिर रखेगा और फिर हम इसे छाँटेंगे

इसलिए हम इस बिंदु f को रखेंगे ixed और फिर हम इस तरह से आगे बढ़ेंगे

इसलिए इस निश्चित बिंदु को शीर्ष कहा जाएगा और मान लीजिए कि हम इसे वामावर्त घुमाते हैं और कहते हैं कि ऐसा है तो यह टिप यहां से चलती है आइए इस बिंदु को इस नए बिंदु बी पर कहें तो यह लंबाई और यह लंबाई समान है और हम इसे इस तरह घुमाते हैं ठीक है अब इस पक्ष को आमतौर पर कोण का प्रारंभिक पक्ष कहा जाता है,

इसलिए जब आप इसे घुमाते हैं तो यह कोण और कुछ नहीं बल्कि यह माप है कि आप इसे कितना घुमाते हैं जब आप इस स्थिति से इस स्थिति में जाते हैं तो कितना घुमाव किया जाता है, इसका एक माप है,

इसलिए इस तरफ o को कोण का प्रारंभिक पक्ष कहा जाता है, इस तरफ के ओब को टर्मिनल पक्ष कहा जाता है जब रोटेशन एंटी-क्लॉकवाइज होता है जैसा कि इस उदाहरण में यहां दिया गया है।

कोण को धनात्मक कहा जाता है और यदि घुमाव तो ऐसा है तो हम उदाहरण के लिए कहते हैं कि मैं इस o को दक्षिणावर्त घुमाने के

बजाय अब यहाँ एक और आकर्षित करता हूँ
यदि हम इसे दक्षिणावर्त घुमाते हैं तो हम कहते हैं कि हम यहाँ से यहाँ जाते हैं
इसलिए यह प्रारंभिक पक्ष है यह टर्मिनल पक्ष है
इसलिए हम इसे अब दक्षिणावर्त घुमा रहे हैं,
इसलिए उस स्थिति में आमतौर पर यह है कि कोणों को मापने के लिए यह कोण ऋणात्मक होगा, कोणों के दो लोकप्रिय उपाय हैं जिन्हें एक कहा जाता है, आमतौर पर एक ही रास्ता होता है इसे मापने के लिए डिग्री के संदर्भ में है, इसे मापने का दूसरा तरीका चमक के संदर्भ में है
इसलिए हम पहले डिग्री पर चर्चा करेंगे क्योंकि यह कुछ ऐसा है जो आप पहले से ही अध्ययन कर चुके होंगे
इसलिए यदि आप एक पूर्ण क्रांति के साथ शुरू करते हैं तो फिर से हम इस किरण को ओ मानते हैं और मान लेते हैं कि हम इसे इस तरह घुमाते हैं तो हम इसे पूरे रास्ते ले जाते हैं और फिर हम इसे वापस लाते हैं
इसलिए एक पूर्ण क्रांति
इसलिए एक पूर्ण क्रांति को 360 डिग्री कहा जाता है कि अब आपके पीछे कोई गणित नहीं है, जानिए क्यों इसे कहा जाता है 360 को 450 या 800 या 720 कारण कहा जा सकता था
क्योंकि हम जानते हैं कि अब मुख्य रूप से ऐतिहासिक हैं
इसलिए हम तीन साठ से चिपके रहेंगे और फिर निश्चित रूप से एक पूर्ण क्रांति 360 डिग्री है ईई और निश्चित रूप से 1 डिग्री एक पूर्ण क्रांति के 1 बटा 360 वें भाग के बराबर होगा
ठीक है कि इस तरह एक डिग्री परिभाषित की जाती है
इसलिए एक डिग्री अनिवार्य रूप से एक पूर्ण क्रांति के 360 वें भाग से एक है अब आइए उस किरण को फिर से देखें।
अब यदि आप देखते हैं कि यदि एक पूर्ण क्रांति को 360 डिग्री कहा जा रहा है तो यदि हम केवल एक चौथाई क्रांति करते हैं तो उदाहरण के लिए यदि हम इस ओए से जाते हैं जो वास्तव में क्षैतिज रूप से झूठ बोल रहा है तो कहें कि ओब जो खड़ा है सीधा खड़ा है जो सीधा खड़ा है और अगर आप इस कोण को यहां देखते हैं तो यदि आप देखते हैं कि आप इस ओब को दोबारा घुमाते हैं तो हम कहते हैं कि यह कोण थीटा के बराबर है
इसलिए हम इसे ओब से शुरू करते हैं यदि हम इसे फिर से घुमाते हैं एक और थीटा द्वारा वामावर्त दिशा में किरण तो हमें ठीक फिर से लेट जाना चाहिए, लेकिन ओ की तुलना में विपरीत दिशा में,
इसलिए यह कुछ इस तरह दिखाई देगा चलो सी कहते हैं तो यह भी थीटा होना चाहिए और फिर एक और पंजा एंटीक्लॉकवाइज टर्न ओसी से शुरू होकर फिर से थीटा हमें यहां ले जाना चाहिए ताकि यह एक और थीटा हो और फिर उसी एंगल थीटा द्वारा एक और एंटीक्लॉकवाइज टर्म हमें वापस ले जाएगा जहां से हमने मूल रूप से शुरू किया था जो कि ओए है लेकिन फिर हम जो देखते हैं वह है वह चौथी बार क्योंकि यदि आप इन सभी कोणों को जोड़ते हैं तो चार गुना थीटा एक पूर्ण क्रांति के बराबर है जिसे हमने अंतिम पृष्ठ देखा है यह 360 डिग्री के बराबर होना चाहिए और
इसलिए यह कोण थीटा 360 का एक चौथाई है जो 90 डिग्री है और यही कारण है कि यदि आप लेटने की स्थिति से सीधे ऊपर की ओर बदलते हैं, तो इस किरण को जितने घूर्णन की मात्रा का सामना करना पड़ता है वह 90 डिग्री है, इसी तरह से अन्य आह आप अन्य सभी कोणों को परिभाषित कर सकते हैं जैसे 180 डिग्री तो 180 डिग्री होगी यदि आप आह पर वापस जाते हैं तो हम अंतिम स्लाइड पर वापस जाते हैं यदि आप ओए से शुरू करते हैं और यदि आप 2 90 डिग्री रोटेशन लेते हैं तो उदाहरण के लिए यदि आप ओए से ओब तक जाते हैं तो यह टी है एक बार 90 डिग्री घुमाना और फिर एक और 90 डिग्री घुमाव ओब से समाज में और आप जो देखते हैं वह यह है कि यह महासागर बिल्कुल वैसा ही है जैसा बिल्कुल नीचे लेटा हुआ है और इस ओए के बिल्कुल विपरीत है
इसलिए अनिवार्य रूप से यह सीए एक सीधी रेखा है
इसलिए सीओए एक सीधी रेखा है और रोटेशन का कोण यह 90 जोड़ यह 90 है और वह 180 डिग्री है
इसलिए हम आमतौर पर कहते हैं कि एक सीधी रेखा 180 डिग्री है कोणों की एक और माप को रेडियन कहा जाता है और यह इसके लिए नया हो सकता है आप में से कुछ तो जिस तरह से इसे परिभाषित किया गया है, आइए हम यहां वृत्त को देखें या जिसका केंद्र इस बिंदु पर है और जिसकी त्रिज्या एक इकाई है
इसलिए यह एक इकाई वृत्त है ठीक है और फिर इस किरण पर विचार करें तो यह एक है त्रिज्या ओए की लंबाई अब एक इकाई है जब आप मानते हैं कि हम इसे वामावर्त दिशा में घुमाना शुरू करते हैं और यहां इस टिप द्वारा चली गई दूरी की मात्रा पर ध्यान केंद्रित करते हैं,

उदाहरण के लिए यदि आप इसे थोड़ा सा स्थानांतरित करते हैं तो यह किरण कुछ ली दिखाई देगी के यह और टिप यहाँ आती है
इसलिए यह अभी तय की गई दूरी है यदि आप रोटेशन कोण को बढ़ाना जारी रखते हैं तो इस चाप की लंबाई सही बढ़ जाएगी,
इसलिए यदि हम बिंदु तक बढ़ते रहें तो हम कहते हैं कि हमने टिप के साथ शुरुआत की बिंदु ए पर हम एक बिंदु बी पर जाते हैं जैसे कि इस चाप एबी की लंबाई भी एक इकाई है जो इस इकाई सर्कल के त्रिज्या के बराबर है,
इसलिए जब ऐसा होता है तो रोटेशन का कोण होता है तो इसे एक रेडियन कहा जाता है एक छात्र के मन में स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि क्या होगा यदि मान लीजिए कि मेरे यहाँ एक त्रिज्या है और अब मैं इसे दो रेडियन के कोण से oc से od तक घुमाता हूँ और इस चाप की लंबाई कितनी है बेशक यह यह है ऐसा प्रतीत होता है कि निश्चित रूप से यह एक इकाई नहीं होगी, शायद एक इकाई से अधिक होगी, लेकिन वास्तव में यह देखना बहुत मुश्किल नहीं है क्योंकि यह कोण दो रेडियन कुछ भी नहीं है, लेकिन इसमें एक रेडियन द्वारा किरण को घुमाते हुए घूर्णन के दो क्रमिक दोहराव होते हैं।
दो बार तो मान लीजिए कि हम शुरुआत में इस बिंदु पर किरण की नोक से शुरू करते हैं और हम कहते हैं कि हम पहले एक रेडियन से घूमते हैं ताकि आप इस बिंदु पर पहुंच सकें, मान लें कि बी और परिभाषा के अनुसार हमने जो देखा है वह यह है क्योंकि यह रोटेशन का

कोण एक रेडियन है और जाहिर तौर पर इस चाप की लंबाई यहाँ पर यह चाप ab यह लंबाई यहाँ से शुरू होकर इस बिंदु तक b भी एक इकाई है, लेकिन हम चाप की लंबाई का पता लगाना चाह रहे हैं जब कोण केंद्र पर घटाया जाता है वह चाप दो रेडियन है तो हम क्या करते हैं कि हम फिर बी से आगे बढ़ते हैं और हम एक दूसरे रेडियन द्वारा आगे बढ़ते हैं

इसलिए हम इस तरह से शुरू करते हैं और फिर हम फिर से एक और रेडियन से घूमते हैं ताकि हम अंत में कुछ बिंदु सी कहें।

यहाँ पर तो यह बिल्कुल एक रेडियन के रूप में नहीं दिख रहा है, लेकिन हम ऐसा मान लेते हैं कि जब आप इस बिंदु पर पहुँचते हैं तो यहाँ से शुरू करें तो इस बिंदु b से बिंदु c तक शुरू करें यदि आप इस विशेष क्षेत्र obc को देखते हैं और यदि आप देखते हैं सेक्टर ओ ab तो जो यह त्रिज्यखंड है वे बिल्कुल समान हैं और

इसलिए यह लंबाई bc भी एक इकाई के बराबर होनी चाहिए क्योंकि फिर से ob से oc तक जाने वाला घूर्णन कोण एक रेडियन है

इसलिए इस चाप की लंबाई bc होनी चाहिए एक रेडियन भी हो और फिर हमें निश्चित रूप से उत्तर मिल जाता है क्योंकि यदि आप अब इस प्रश्न का उत्तर ढूंढते हैं, जहां हम आपको इस चाप सीडी की लंबाई का पता लगाने के लिए कह रहे थे

, जो वृत्त के केंद्र में दो रेडियन के कोण को घटाता है।

यहां हमारे पास एक चाप एसी है,

इसलिए मैं इस चाप एसी के बारे में बात कर रहा हूं जहां केंद्र में अंतरित कोण 1 रेडियन प्लस 1 रेडियन है जो 2 रेडियन है और आप देखते हैं कि चाप की लंबाई यह एक रेडियन है और इसके लिए खेद है एक इकाई प्लस यह एक इकाई तो इसकी कुल एक इकाई जमा एक इकाई दो इकाई है और

इसलिए यदि केंद्र पर किसी चाप द्वारा अंतरित कोण दो रेडियन है तो उस चाप की लंबाई दो इकाई सही होगी तो ऐसा प्रतीत होता है कि यदि आप वृद्धि करें यदि आप रोटेशन के कोण को दोगुना करते हैं तो संबंधित चाप की लंबाई भी दोगुनी हो जाएगी

इसलिए इसमें एक छोटी सी तालिका है यदि चाप की लंबाई अगर आह मान लें कि चाप की लंबाई एक इकाई है तो केंद्र में अंतर कोण है एक रेडियन या इसके विपरीत यदि आप केंद्र में अंतरित कोण को दो रेडियन तक बढ़ाते हैं और जैसा कि हमने पिछली स्लाइड में देखा था , चाप की लंबाई एक इकाई से दो इकाई तक दोगुनी हो जाएगी यदि केंद्र में अंतरित कोण उदाहरण के लिए है कोई भिन्न या दशमलव संख्या कोई भी वास्तविक संख्या जैसे तीन बिंदु एक सात रेडियन तो चाप की लंबाई तीन बिंदु एक सात इकाइयाँ होंगी अब हम जानते हैं कि यहाँ एक वृत्त के लिए हम त्रिज्या एक इकाई कहते हैं यदि मैं इस बिंदु से शुरू करता हूँ तो एक नज़र डालें यह ओए और मैं एक पूर्ण क्रांति करते हैं जो कि ii इस तरह से जाता है और फिर वापस आ जाता है यदि आप एक पूर्ण क्रांति करते हैं तो चाप की लंबाई दो गुना पीआई इकाइयों के बराबर होगी और

इसलिए इस पहलू से जा रहा है t कि चाप की लंबाई और अंतरित कोण बराबर हैं मेरा मतलब यह है कि यदि चाप की लंबाई एक इकाई है तो केंद्र पर अंतरित कोण एक रेडियन है और यदि आप इसे दोगुना करते हैं तो केंद्र पर अंतरित कोण भी दोगुना हो जाता है इसके द्वारा यदि चाप की लंबाई एक इकाई से बढ़कर दो पाई इकाई हो जाती है तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि इस पूर्ण परिक्रमण द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण

दो पाई रेडियन के बराबर होना चाहिए और

इसलिए यह दर्शाता है कि एक पूर्ण क्रांति दो पाई के बराबर है रेडियन तो यह याद रखने वाली बात है कि एक पूर्ण क्रांति पाई रेडियन के बराबर होती है, निश्चित रूप से पाई जैसा कि आप सभी जानते हैं कि यह एक स्थिरांक है यह एक सार्वभौमिक स्थिरांक है और यह एक वृत्त की परिधि के अनुपात के बराबर है ।

वृत्त का व्यास

इसलिए आप इस ब्रह्मांड में कोई भी वृत्त कितना छोटा या कितना भी बड़ा लें, यदि उसी वृत्त के लिए यदि आप परिधि की गणना करते हैं तो आप उसी वृत्त का व्यास ज्ञात करते हैं d यदि आप परिधि को एक व्यास से विभाजित करते हैं, चाहे आप कितना भी बड़ा या छोटा या जो भी वृत्त खींचते हैं , अनुपात हमेशा एक स्थिर होता है और उस स्थिरांक को पाई कहा जाता है, एक और संबंधित प्रश्न जो मन में आ सकता है, वह यह है कि हम कहते हैं कि यह आंतरिक वृत्त है यहाँ तो मेरे पास वही है जो आप इस आकृति में देखते हैं, दो संकेंद्रित वृत्त हैं,

इसलिए एक यह छोटा त्रिज्या वाला आह वृत्त है और दूसरा बाहरी वृत्त का एक बड़ा त्रिज्या है और दोनों का इस बिंदु पर एक ही केंद्र है।

और हम कहते हैं कि हमारे यहाँ यह विशेष किरण है और हम इसे एक रेडियन द्वारा वामावर्त दिशा में घुमाते हैं ताकि किरण अब यहाँ आ जाए तो आंतरिक वृत्त के लिए जिसकी त्रिज्या एक इकाई है हम जानते हैं कि इस चाप की लंबाई त्रिज्या के बराबर भी होगा जो एक इकाई सही है लेकिन हम कहते हैं कि इस बाहरी सर्कल में r इकाइयों की त्रिज्या है

इसलिए मैं यही बात कर रहा हूं और यह भी घूमता है हम इस विशेष किरण को एक रेडियन और w से घुमाते हैं ई बाहरी सर्कल पर चाप की लंबाई देखना चाहते हैं जो कि यह लंबाई x निश्चित रूप से एक इकाई नहीं होगी क्योंकि एक इकाई आंतरिक सर्कल में चाप की लंबाई थी और जैसा कि आप देख सकते हैं ऐसा प्रतीत होता है कि यह निश्चित रूप से है एक से अधिक इकाई लेकिन यह कितना है यदि आप बाहरी सर्कल के लिए इस तालिका में देखते हैं तो हम कहते हैं कि हम इस चाप की लंबाई नहीं जानते हैं

इसलिए बाहरी सर्कल के लिए यदि यह चाप लंबाई x इकाइयों के बराबर है तो जैसा कि हमने खींचा है यहाँ केंद्र पर अंतरित कोण एक रेडियन ठीक है और पिछली स्लाइड से हम जानते हैं कि एक पूर्ण क्रांति कितने रेडियन के बराबर होती है एक पूर्ण क्रांति दो पाई रेडियन के बराबर होती है,

इसलिए यह एक पूर्ण क्रांति है

इसलिए यदि आप केंद्र पर एक चाप द्वारा अंतरित कोण दो पाई रेडियन है जो एक क्रांति से मेल खाता है,

इसलिए यदि आप चाप द्वारा अंतरित कोण को एक रेडियन से दो पाई रेडियन तक बढ़ाते हैं जो एक पूर्ण क्रांति है तो चाप लेंग वें को भी उसी अनुपात में बढ़ाना चाहिए जो यह है कि यदि यहाँ से आप कोण को दो pi गुना बढ़ा रहे हैं तो चाप की लंबाई x से दो pi x तक बढ़नी चाहिए, यह x से दो pi x तक बढ़नी चाहिए लेकिन तब हम जानते हैं कि चाप एक पूर्ण पूर्ण एक पूर्ण क्रांति के लिए लंबाई और

कुछ नहीं बल्कि बाहरी सर्कल की परिधि है जो वास्तव में दो गुना pi गुना r है और जो दो गुना pi गुणा x के बराबर होनी चाहिए क्योंकि यही हमें इस तालिका से मिला है और
इसलिए यह x होना चाहिए आर इकाइयों के बराबर कुछ भी नहीं है ,
इसलिए हम जो देखते हैं वह यह है कि हम एक रेडियन को सामान्य रूप से परिभाषित कर सकते हैं क्योंकि सामान्य रूप से इकाई त्रिज्या के एक सर्कल को देखने के बजाय यदि हमारे पास त्रिज्या आर का एक चक्र है और यदि हम घुमाते हैं तो हम कहते हैं इस तरह से हम इस त्रिज्या को बाहरी वृत्त त्रिज्या पर देखते हैं r आइए हम इस त्रिज्या को देखें, इस किरण को अब यदि हम इसे एक रेडियन से घुमाते हैं तो हम यहाँ पहुँच जाते हैं
इसलिए उस स्थिति में क्योंकि हम इसे एक रेडियन द्वारा घुमाते हैं यह विशेष चाप लंबाई त्रिज्या के बराबर होगी जो कि r है
इसलिए अनिवार्य रूप से एक रेडियन को रोटेशन कोण के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जैसे कि उस रोटेशन कोण के अनुरूप चाप की लंबाई सर्कल के त्रिज्या के बराबर होती है
, अगला चरण यह है हम पिछली स्लाइड में चर्चा कर रहे थे कि यदि आपके पास त्रिज्या r का एक वृत्त है और आप इस किरण o को देखते हैं यदि आप इसे एक रेडियन से घुमाते हैं और यहाँ इस चाप की लंबाई त्रिज्या के बराबर होगी जो कि r इकाई है अगला प्रश्न है मान लीजिए कि हमारे पास एक किरण है और मैं इसे थीटा रेडियंस द्वारा घुमाता हूं और इस चाप सीडी की लंबाई के लिए सामान्य सूत्र क्या है, तो हमारे पास यहां एक टेबल है, हम पिछली स्लाइड से जानते हैं कि यदि त्रिज्या के इस सर्कल में आर के लिए यदि रोटेशन का कोण एक रेडियन है तो चाप की लंबाई त्रिज्या के बराबर r इकाई होगी यदि यह दो रेडियन है तो निश्चित रूप से चाप की लंबाई भी दोगुनी हो जाएगी यह सामान्य रूप से दो r इकाई बन जाएगी यदि यह कोई वास्तविक संख्या है तो एक रेडियन है एफ़ओ r उदाहरण रेडियन पर तीन बिंदु नौ तो चाप की लंबाई भी आनुपातिक रूप से बढ़कर 3.
98 r हो जाएगी और
इसलिए यदि कोण सामान्य रूप से कुछ थीटा चमक है, उदाहरण के लिए यहाँ तो चाप की लंबाई भी बढ़नी चाहिए क्योंकि यदि ऐसा हो रहा है तो तुलना की जा रही है एक रेडियन के लिए हम इसे बढ़ा रहे हैं या इसे थीटा रेडियन में घटा रहे हैं,
इसलिए यहां थीटा का एक गुणन कारक है जो एक से थीटा तक जा रहा है और
इसलिए चाप की लंबाई भी आनुपातिक रूप से r से थीटा r तक बढ़नी चाहिए और
इसलिए हमें अपना उत्तर मिलता है कि रोटेशन के इस कोण के अनुरूप इस चाप की लंबाई थीटा
r इकाइयों के बराबर होगी जैसा कि आप में से कई लोगों ने अब तक अनुमान लगाया होगा कि इन उपायों के बीच एक संबंध है जिस पर हम अब चर्चा करेंगे
इसलिए हमने पहले कहा था कि एक पूर्ण क्रांति 360 डिग्री है यानी जब हम परिभाषित कर रहे थे कि डिग्री क्या है और बाद में हमने यह भी कहा कि एक पूर्ण क्रांति दो के बराबर होती है o pi रेडियन और
इसलिए चूंकि उन्हें
समान होना चाहिए, दो pi रेडियन तीन सौ साठ डिग्री के बराबर होने चाहिए और
इसलिए एक रेडियन तीन साठ के बराबर होना चाहिए जो दो pi डिग्री से विभाजित हो,
इसलिए यदि आप इस अनुमान का उपयोग करते हैं कि pi बराबर है बाईस बटा सात जो कि एक सन्निकटन है, तो आप बस 360 को 44 से 7 से विभाजित करते हैं जो लगभग 57.
27 डिग्री है,
इसलिए यह सूत्र यहां 1 रेडियन के बराबर 360 गुणा 2 पीआई डिग्री आपको रेडियन से डिग्री में रूपांतरण देगा , उदाहरण के लिए यदि मैं आपसे पूछें कि pi बटा 4 रेडियन कितने डिग्री के बराबर है
इसलिए इसका बहुत सरल है क्योंकि 1 रेडियन 360 गुणा 2 pi pi बटा 4 रेडियन होगा pi गुणा 4 गुना 360 बटा 2 pi डिग्री जो 45 के बराबर होने वाला है डिग्री इस तरह से आप रेडियन से डिग्री में परिवर्तित होते हैं और फिर निश्चित रूप से कोई आपसे पूछ सकता है कि क्या मैं आपको डिग्री के संदर्भ में एक कोण देता हूं, आप इसे रेडियन में कैसे परिवर्तित करेंगे ताकि यह भी फिर से बहुत सरल हो
इसलिए हम बस मैं nverse invert पूरे तर्क को उलट दें और कहें कि अब तीन साठ डिग्री पाई रेडियन के बराबर है और
इसलिए एक डिग्री को तीन साठ रेडियन पर दो पाई के बराबर होना चाहिए और मान लीजिए कि अगर कोई आपसे कहता है तो पता करें कि कितने रेडियन तीन सौ हैं और एक सौ पैंतीस डिग्री यह बहुत आसान है क्योंकि यदि एक डिग्री दो पाई गुणा तीन साठ रेडियन है तो एक पैंतीस डिग्री एक पैंतीस गुणा दो पाई बटा तीन साठ रेडियन के बराबर होगा जो तीन पीआई के बराबर होगा
इसलिए तीन पीआई को चार रेडियन से विभाजित किया जाता है,
इसलिए रूपांतरण बहुत सरल है आइए हम यहां एक छोटा सा उदाहरण लेते हैं,
इसलिए मैंने यहां जो खींचा है वह एक घड़ी है ताकि आप 12 बजे 3 बजे 6 बजे 9 बजे देख सकें और ऐसा कहा जाता है कि घड़ी की मिनट की सुई की लंबाई पांच सेंटीमीटर के बराबर होती है, जिसकी लंबाई पांच सेंटीमीटर के बराबर होती है, अब टिप कितनी चलती है मिनट की सुई बयालीस मिनट में कितनी चलती है तो आइए जानते हैं शुरू करने के लिए मिनट की सुई इस स्थिति में थी और फिर उसे किसी कोण से घूमना पड़ता है और फिर अंत में 42 मिनट के बाद यह यहां पहुंच जाता है तो आइए पहले हम इस रोटेशन के कोण का पता लगाने का प्रयास करें
अब हम जानते हैं कि एक पूर्ण क्रांति दो pi रेडियन के बराबर है लेकिन फिर यह एक पूर्ण क्रांति नहीं है, ठीक ऐसा ही है क्योंकि इस मामले
में घड़ी की मिनट की सुई की एक पूर्ण क्रांति एक r होने वाली है जो वास्तव में 60 मिनट के बराबर है जबकि हम जानते हैं कि इस समस्या में हमें यह पता लगाने के लिए कहा जाता है कि 42 मिनट में टिप कितनी चली गई और क्योंकि 42, 60 से कम है, यह एक पूर्ण क्रांति नहीं है, वास्तव में यह बयालीस बटा साठ एक क्रांति के बराबर है क्योंकि एक पूर्ण क्रांति मेल खाती है दो पाई रेडियन के बयालीस

गुणा साठ के घूर्णन के लिए बयालीस बटा साठ गुणा दो पाई रेडियन के अनुरूप होगा जो एक बिंदु चार पाई रेडियन के बराबर है और फिर हम लेन कैसे ढूंढते हैं इस चाप का gth यहाँ है क्योंकि प्रश्न आपसे पूछ रहा है कि मिनट की सुई की नोक 42 मिनट में कितनी दूर चलती है ताकि कोण थीटा द्वारा इस रोटेशन के अनुरूप इस प्रमुख चाप की लंबाई का पता लगाया जा सके जैसा कि हमने पिछली स्लाइड पर देखा था यह चाप l रोटेशन के कोण के बराबर होगा इस वृत्त की त्रिज्या का थाटा गुना इस मामले में वृत्त की त्रिज्या
इस मिनट की इस हाथ की लंबाई के बराबर है जो पांच सेंटीमीटर है
इसलिए उत्तर एक के बराबर है बिंदु चार पीआई गुणा पांच सेंटीमीटर और यदि आप पीआई के बराबर बाईस बटा सात को सन्निकटन के रूप में उपयोग करते हैं तो आप इसे एक बिंदु चार गुणा बाईस गुणा सात गुना पांच सेंटीमीटर तक प्राप्त करेंगे जो कि 22 सेंटीमीटर के बराबर होने वाला है तो यह एक था आप में से बहुत से लोग अब इस सत्र का उद्देश्य जान रहे होंगे और आने वाले अन्य सत्रों में इन त्रिकोणमितीय अनुपातों को सामान्य बनाना होगा जो आप अपने पी में पहले ही सीख चुके होंगे।
पुनरावर्ती वर्ग दो त्रिकोणमितीय फलन
इसलिए हम फिर से साइन और कोसाइन पर वापस जाते हैं और उन्हें साइन और कोसाइन कार्यों के लिए सामान्यीकृत करने का प्रयास करते हैं,
इसलिए इस स्लाइड में हमारे पास एक इकाई सर्कल है जिसमें त्रिज्या एक इकाई है जिसका केंद्र इस बिंदु पर है।
इस क्षैतिज अक्ष को x अक्ष और ऊर्ध्वाधर को y अक्ष कहें, अब इस बिंदु p को इकाई वृत्त पर मान लें, जिसके x और y निर्देशांक क्रमशः a और b हैं, तो इसका क्या अर्थ है कि यदि आप इस बिंदु को x पर प्रक्षेपित करते हैं अक्ष तो यह लंबाई एक इकाई के बराबर है यह एक इकाई है और यह लंबाई y अक्ष पर इस बिंदु का प्रक्षेपण है और निश्चित रूप से यह b इकाइयों के बराबर होगी और आइए हम इस बिंदु o को इस बिंदु p से जोड़ते हैं ताकि यदि हम इसे देखते हैं
इसलिए हमारे पास यहां एक समकोण त्रिभुज है और आइए हम इस कोण को x कहते हैं और अब हम औपचारिक रूप से इन कार्यों को x की ज्या और x की cos को परिभाषित करने के लिए तैयार हैं,
इसलिए x की ज्या आपके बराबर होगी यदि आप देखते हैं तो पहले अध्ययन किया गया इस त्रिभुज को चालू करें और हम इस बिंदु को कहते हैं कि x की b ज्या, b के बराबर है , जो कर्ण की लंबाई से विभाजित है, लेकिन चूंकि यह एक इकाई वृत्त है,
इसलिए यह कर्ण इकाई लंबाई का है,
इसलिए x की ज्या इस y के बराबर है।
इस बिंदु p का निर्देशांक और इसी तरह x का कोज्या a बटा कर्ण के बराबर होगा जो फिर से इकाई लंबाई का है,
इसलिए यह केवल x का एक कोज्या है जो इस बिंदु के x निर्देशांक के बराबर है जो अब निश्चित रूप से है हम इन दो कार्यों साइन और कोसाइन को परिभाषित कर रहे हैं, हमें इस फ़ंक्शन की सीमा और डोमेन को परिभाषित करने की आवश्यकता है यदि आप यह देखते हैं कि यह x वास्तविक मूल्यवान है तो यह कोई वास्तविक मान ले सकता है और
इसलिए इस फ़ंक्शन का डोमेन इन दोनों कार्यों कोस और साइन है वास्तविक संख्याओं का सेट r
इसलिए डोमेन वास्तविक संख्या r के सेट के बराबर है और अब हम सीमा के बारे में बात करते हैं यदि आप उदाहरण के लिए x के साइन फ़ंक्शन के लिए देखते हैं, तो इस x के लिए किसी भी x के लिए y निर्देशांक के बराबर है
इस बिंदु के p अब इस रूप में एस बिंदु पी चलता है
इसलिए यदि आप शुरू करते हैं तो मान लीजिए कि अगर हम शुरू में कहते हैं कि पी यहां था तो जब पी यहां है तो एक्स शून्य के बराबर है और फिर जैसे ही आप आगे बढ़ते हैं , हम कहते हैं कि इस सर्कल पर वामावर्त दिशा में एक्स बढ़ना शुरू हो जाता है और आप इस तरह से चलते रह सकते हैं ताकि जैसे-जैसे आप आगे बढ़ेंगे आपको x के अलग-अलग मान मिलेंगे और x के प्रत्येक मान के लिए आप वास्तव में x और y निर्देशांक को माप सकते हैं क्योंकि प्रत्येक भिन्न x के लिए आपके पास वृत्त पर एक बिंदु है ।
यूनिट सर्कल और आप वहां से एक्स और वाई कोऑर्डिनेट पा सकते हैं और
इसलिए आप वास्तव में किसी भी एक्स के साइन और कॉस को ढूंढ सकते हैं, लेकिन देखने वाली बात यह है कि बी का यह मान और किसी भी बिंदु पी के लिए ए का मान वृत्त को एक से कम होना चाहिए क्योंकि इसका कारण यह है कि यह बिंदु वृत्त पर है और
इसलिए त्रिज्या एक इकाई के बराबर है और यह a और b दोनों एक इकाई से कम होना चाहिए क्योंकि यदि आप उदाहरण के लिए इस समकोण त्रिभुज को यहाँ देखें यदि आप इस विशेष बिंदु p को देखते हैं तो यह स्पष्ट रूप से इससे कम है और इसी तरह इस b को इस त्रिज्या से कम होना चाहिए यदि आप इसे यहाँ प्रोजेक्ट करते हैं तो यह b के बराबर है ताकि यह भी त्रिज्या से कम हो और त्रिज्या एक इकाई है
इसलिए एक बात सुनिश्चित है कि दोनों को एक से कम होना चाहिए, वे अब भी एक के बराबर हो सकते हैं उदाहरण के लिए मान लें कि यह बिंदु p
इसलिए यह एक ऊपरी सीमा है
इसलिए हमेशा कम होना चाहिए एक से अधिक क्योंकि इस वृत्त पर किसी भी बिंदु का सबसे बड़ा x निर्देशांक इस बिंदु से अधिक नहीं होगा
इसलिए यहाँ इस बिंदु का निर्देशांक 1 अल्पविराम 0 है।

इसलिए वृत्त पर किसी भी बिंदु का x निर्देशांक एक से अधिक नहीं हो सकता है,
इसलिए एक इसी तरह वृत्त पर किसी भी बिंदु का y निर्देशांक नहीं हो सकता है क्योंकि यह बिंदु शून्य है
इसलिए कोई y con निर्देशांक ऊपर या ah इस ah विशेष रेखा के ऊपर नहीं हो सकता है, आइए हम बताते हैं क्योंकि हमारे यहां यह रेखा है
इसलिए नहीं y निर्देशांक या कोई बिंदु इस रेखा के ऊपर नहीं होगा

इसलिए

इसलिए बी को दूसरी तरफ एक के बराबर से कम होना चाहिए उदाहरण के लिए यदि हम जिस क्षण हम इसे नब्बे डिग्री से अधिक घुमाते हैं तो मान लें कि हमारे पास यहां एक बिंदु है q तो स्पष्ट रूप से आप देख सकते हैं कि इस बिंदु का x निर्देशांक है ऋणात्मक और सबसे बड़ा ऋणात्मक मान जो इस वृत्त के किसी भी बिंदु का x निर्देशांक हो सकता है, जब हम पहुँचते हैं मान लें कि हम घूमते हैं और इस विशेष बिंदु पर पहुँचते हैं जिसका निर्देशांक शून्य से एक अल्पविराम शून्य है,

इसलिए किसी भी बिंदु का x निर्देशांक बड़ा होना चाहिए माइनस वन के बराबर से इसी तरह y कोऑर्डिनेट को भी एक के बराबर से बड़ा होना चाहिए ताकि आप इस साइन और कोसाइन फंक्शन दोनों की रेंज देख सकें,

इसलिए यह दोनों कॉस की रेंज है क्योंकि साइन एक्स बी है और कॉस एक्स है ए तो साइन और कोसाइन फ़ंक्शन दोनों की सीमा माइनस वन से प्लस वन के बीच है

इसलिए कुछ अन्य गुण हैं जो दिए गए हैं कि हमने इन कार्यों को परिभाषित किया है, हम कुछ गुणों पर चर्चा कर सकते हैं कि ये फ़ंक्शन संतुष्ट होंगे

इसलिए यदि हम वापस जाते हैं पिछली स्लाइड के लिए k जहां हमने वृत्त खींचा था , मुझे अभी आपके लिए एक वृत्त बनाने दें तो यह x निर्देशांक x अक्ष था और यह यहाँ y अक्ष है और हमने इस बिंदु p को x और y निर्देशांक के रूप में खींचा था और बी क्रमशः यह एक्स था यह ए था और यह लंबाई बी थी यह ओ हम कहते हैं कि यह बिंदु ए है और हमने कहा था कि एक्स की साइन बी के बराबर है और एक्स का कॉस बराबर है अब यदि आप देखें इस समकोण त्रिभुज पर यहाँ oap फिर पाइथागोरस प्रमेय से हम जानते हैं कि os वर्ग तो o इस खंड की लंबाई oaoa वर्ग प्लस ap वर्ग op वर्ग के बराबर है और

इसलिए अब यह oa कुछ भी नहीं है,

इसलिए अनिवार्य रूप से क्या है हम कह रहे हैं कि एक वर्ग जोड़ b वर्ग अब op वर्ग के बराबर है क्योंकि यह एक इकाई वृत्त है, यह op एक के बराबर है

इसलिए यह एक के बराबर है और a और कुछ नहीं बल्कि cos x है,

इसलिए हमें जो मिलता है वह है cos वर्ग x प्लस d sin x sin वर्ग x बराबर एक है तो किसी भी x sin वर्ग x plu .

के लिए एस कॉस स्क्वायर एक्स हमेशा एक होता है अब हमने पहले ही कहा है कि साइन एक्स और कॉस एक्स माइनस वन और प्लस वन के बीच स्थित होगा तो ऐसा कब होता है कि साइन एक्स शून्य हो जाता है यदि आप फिर से इस सर्कल
को सर्कल पाप पर बिंदुओं के साथ देखते हैं x इस सर्कल पर बिंदुओं के y निर्देशांक के बराबर है x रोटेशन का कोण है

इसलिए sin x बराबर शून्य मूल रूप से इसका मतलब है कि हम यह पता लगाना चाहते हैं कि किस बिंदु के लिए ऐसा होता है कि y निर्देशांक शून्य के बराबर हो जाता है बेशक यदि आप इस सर्कल और सर्कल के सभी बिंदुओं को देखते हैं तो केवल दो बिंदु हैं जहां y निर्देशांक शून्य है तो एक यह बिंदु यहां है जो अब एक शून्य है इस बिंदु के लिए कोण x शून्य के बराबर है

इसलिए यह एक है समाधान है कि साइन x शून्य है जब x शून्य के बराबर है दूसरा बिंदु जहां y निर्देशांक शून्य है, यह बिंदु है और आप इस बिंदु से इस बिंदु तक पहुंचते हैं इस किरण या इस त्रिज्या को pi रेडियन या 180 डिग्री से घुमाते हैं जो अनिवार्य रूप से आधा क्रांति है

इसलिए निश्चित रूप से हम उस चिह्न x को शून्य के बराबर देखते हैं जब या तो x शून्य के बराबर या x बराबर pi के बराबर होता है, लेकिन फिर हमें एक बात का भी एहसास होना चाहिए कि ये दोनों कार्य sin x और cos x यदि हम x को गुणकों से बढ़ाते या घटाते हैं तो उनका मान दोहराया जाएगा।

दो पाई का क्योंकि दो पीआई रेडियन एक पूर्ण क्रांति से मेल खाते हैं , उदाहरण के लिए मान लीजिए कि हम इस बिंदु पी पर विचार करते हैं जहां पाप जिसके लिए पाप एक्स वाई समन्वय के बराबर है, अब हम इसे ऑप से शुरू करते हैं यदि हम इसे इस दिशा में ले जाते हैं और एक बनाते हैं पूर्ण रोटेशन तो इस एक्स के बजाय हमारे पास क्या कोण होगा कि हम ऐसा कुछ करने जा रहे हैं

इसलिए एक पूर्ण घूर्णन और फिर दूसरा एक्स ताकि हम जिस कोण को देख रहे हैं वह एक्स नहीं बल्कि एक्स प्लस टू पीआई है रेडियन सही है लेकिन हम जो महसूस करते हैं वह यह है कि बिंदु के निर्देशांक मेल खाते हैं क्योंकि x प्लस टू pi रेडियन के बाद भी हम एक ही बिंदु p पर पहुंचते हैं

इसलिए यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि और चूंकि हम एक ही बिंदु पर x और y पर पहुंचते हैं निर्देशांक निश्चित रूप से समान होने जा रहे हैं और

इसलिए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक्स की साइन और एक्स प्लस टू पीआई की साइन समान हैं और यदि हम एक्स प्लस फोर पीआई या एक्स प्लस सिक्स पीआई देखते हैं तो वही होगा।

दो पीआई रेडियन सिर्फ एक पूर्ण क्रांति जा रहे हैं और ऐसा नहीं है कि जब आप एक पूर्ण क्रांति पर जाते हैं तो आप नहीं बदलते हैं हम मूल रूप से सर्कल पर एक ही बिंदु पर आते हैं

इसलिए हम लिख सकते हैं कि सामान्य रूप से एक्स की साइन एक्स के बराबर है किसी भी पूर्णांक k के लिए प्लस k गुणा दो pi रेडियन और यही बात कोज्या के लिए भी सच है x की कोज्या x जमा दो pi की कोज्या के बराबर है और वह भी x जमा चार pi की कोज्या के बराबर है और

इसलिए x की कोज्या भी है किसी भी पूर्णांक k के लिए x प्लस k गुणा दो pi की कोज्या के बराबर और

इसलिए अब इस समस्या पर वापस जा रहे हैं जहां से हमने शुरू किया था , जिसमें x के उन मानों का पता लगाना था जिनके लिए x के अलावा x शून्य के बराबर है।

और x बराबर pi होगा l .

होगा ओटी कई अन्य समाधान क्योंकि चूंकि x बराबर शून्य एक समाधान है x शून्य के बराबर है और दो पीआई भी एक समाधान होगा और

इसलिए चार पीआई भी इस समीकरण पाप x के बराबर शून्य का समाधान होगा और
इसलिए इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं साइन x शून्य के बराबर होगा, इसका मतलब है कि n का मतलब है कि x , pi के एक पूर्णांक गुणज के बराबर है,
इसलिए आप pi का कोई भी पूर्णांक गुणक लें, यदि आप उस कोण का चिह्न लेते हैं, तो आपको चिह्न x शून्य के बराबर मिलेगा,
इसलिए k हो सकता है कोई भी पूर्णांक
इसलिए यह ऋणात्मक भी हो सकता है
इसलिए इस कक्षा में हमने जो अध्ययन किया वह उस पृष्ठभूमि का एक छोटा सा अंश था जो आपने अपनी कक्षा 10 में पढ़ा था और फिर हम मूल त्रिकोणमितीय अनुपातों को x और cos की ज्या दो त्रिकोणमितीय फलनों के लिए सामान्य बनाने का प्रयास करते हैं।
और हमने अगली कक्षा में इन दो फलनों के कुछ बुनियादी गुणों पर चर्चा की, हम इन दो फलनों के कुछ और गुणों के साथ जारी रखेंगे और बाद में और अधिक फलनों पर चर्चा करेंगे जैसे x का tan और अन्य फलन आयन धन्यवाद