خوش آمدید طلباء کو رشتہ کے آخری لیکچر میں خوش آمدید کہتے ہیں تو آخر میں ہم آج کے لیے جا رہے ہیں ہمیں پچھلے لیکچر میں فنکشنز پر کچھ
اور چیزیں دیکھنا ہوں گی ہم نے اس بارے میں کچھ حقائق دیکھے تھے جن کو مخصوص حقائق کے نام سے جانا جاتا ہے جیسے کہ کس طرح کی
خصوصیات فنکشنز کا آج وہ چوراہوں اور یونینوں پر کیسے برتاؤ کرتے ہیں آئیے ہم اس بات کا جائزہ لیتے ہیں کہ فنکشن کمپلیمنٹ پر کس طرح
کا سب سیٹ ہے اگر آپ کے پاس سب سیٹ x تک ایک فنکشن ہے تو اگر y سے سیٹ x برتاؤ کرتا ہے اب فرض کریں کہ آپ کے پاس سیٹ
کا اب سوال یہ ہے کہ کیا مندرجہ ذیل برابری درست ہے آئیے ایک سادہ پر نظر ڈالیں تو آہ سب سے زیادہ چیز یہ ہے کہ ہم کیا چاہتے تھے x ہے
جیسا ہی ہے کیا درج ذیل مساوات کو درست رکھتا ہے اب ہم سے پہلے اس کو سمجھنے کی fa مائنس fx کا یہ ایک a مائنس x یہ ہے
کو مائنس فور سے وقفہ مائنس چار سے چار سے f یا ایک فنکشن f کوشش کریں آئیے ایک مثال کو دیکھنے کی کوشش کریں جس پر آپ نقشہ
مربع کے ذریعہ دیا گیا ہے آئیے ہم اس فنکشن کو دیکھتے ہیں اب بطور اوپن 0 کا انتخاب کریں۔ بند 4. اب x کے برابر fx پر غور کریں جو r
کو دیکھیں تو یہ بالکل fx کی تکمیل صفر کے قریب مائنس چار کے قریب ہوگی اور اگر آپ a in x کو دیکھیں a مائنس x یہاں اگر آپ
کھلا صفر سے سولہ کے قریب ہے آپ کے پاس ہے اب پوری چیز اگر آپ ایف ایکس مائنس ایف اے f کا a صفر سے سولہ کے قریب ہے اور
کو دیکھیں تو یہ بالکل سنگلٹن صفر ہے دوسری طرف اگر کوئی ایف ایکس مائنس اے کی گنتی کرنے کی کوشش کرتا ہے تو یہ صفر کے قریب دو
میں مناسب طریقے سے موجود ہے یہ وہی ہے جو f کے a مائنس x مائنس فیا fx سے سولہ کے قریب ہوگا جو ہم نے یہاں دیکھا ہے۔ کیا
fa مائنس fx کے لئے درست ہے تو یہ f ہم نے اس مثال کے ذریعے مشاہدہ کیا ہے اب مندرجہ ذیل سوال یہ ہے کہ کیا یہ ہمیشہ تمام فنکشن
سے کسی بھی فنکشن کے لیے درحقیقت جواب ہاں میں ہے تو آئیے ہم یہ ثابت کرنے کی کوشش کریں xy میں موجود ہے f کے a مائنس x
سے نہیں ہے اب ہمارے پاس f کے f کا تعلق y سے ہے لیکن fx کا تعلق y سے ہے جس کا مطلب ہے fe مائنس fx کا تعلق y کہ
کے عنصر میں کم از کم ایک x کی تصویر جس سے فوری طور پر یہ ظاہر ہوتا ہے کہ بڑے x کے نیچے f x ہے۔ y میں f جو ہے وہ
سے نہیں ہے جس سے فوری طور پر یہ ظاہر ہوتا f کے a کا تعلق y اب دوسری طرف rm fx کا ہے۔ y fo موجود ہے جیسے کہ x
x کا ہے لہذا ان دو بیانات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ f کی شکل y a میں موجود نہیں ہے اس طرح کہ a ہے کہ ٹوپی میں کوئی بھی عنصر
نہیں ہے جس a کا ایک عنصر تیار کیا ہے جو کہ x جو ہمارے پاس ہے ہم نے کیپٹل e کا تعلق سرمائے سے نہیں ہے x لیکن x کا تعلق ہے
میں موجود ہے اب ہم دو چیزوں f مائنس کے fa x مائنس fx سے تعلق رکھتی ہے اس طرح f مائنس کے f x ہے y fx کی تصویر
fa x مائنس fx میں موجود ہے اور دوسری f کے f کے چوراہے b ہے جو f کا b کو دیکھتے ہیں کہ ہمارے پاس ایک انٹرسیکشن
پر f میں موجود ہے وہ کیا ہے جس میں فنکشن کی کمی ہے تاکہ مساوات ان معاملات میں درست ہو یا وہ کیا ہے جس کی ہمیں f کے a مائنس
مزید ضرورت ہے تاکہ مساوات درحقیقت برقرار رہے آئیے ہم اس مثال کو دیکھتے ہیں کہ ہمارے پاس جو مثال تھی جو ہمارے پاس تھی وہ ہے
مربع تھا لیکن اس میں کیا x مساوی fx مربع یہ وہ فنکشن تھا جو ہمارے پاس fx equal to x تک کی میپنگ r مائنس فور سے لے کر
کے مائنس دو کے برابر کے چار کے درحقیقت یہ کیا ہے کہ ہمارے پاس f کے دو کے برابر f اگر آپ اس فنکشن کو دیکھتے ہیں s کمی ہے
ہے جو ہمارے پاس ہے تو آئیے ایک ایسے فنکشن کو دیکھنے کی کوشش کریں جو نہیں ہے اس طریقے سے برتاؤ x مائنس f کے برابر fx
کریں تو آئیے اس تعریف کے ساتھ شروع کریں کہ ہم کسی فنکشن کو اس انداز میں دیکھ رہے ہیں کہ جب بھی آپ کو کوڈ مائن میں کوئی عنصر ملے
جو ڈومین میں کسی عنصر کی شبیہہ ہو تو ہمیں جس چیز کی ضرورت ہے وہ یہ ہے کہ ایک اور صرف عنصر جس کی شبیہ وہ فکسڈ عنصر ہے
دو کے فوراً اس کا f x ایک برابر x کا f یا انجیکشن اگر fs one one تک ہم کہتے ہیں کہ x سے f تو آئیے اسے لکھیں تو چلیں
دو پھر ہم اس طرح کے فنکشن کو ایک ون یا انجیکٹیو کے طور پر پیمانہ کرتے ہیں اگر ہم پچھلی مثال کو x ایک کے برابر x مطلب ہونا چاہئے
کوئی ایک نہیں ہے جو ہم نے دیکھا ہے کہ یہ ایک سے ایک نہیں ہے اب ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔ آئیے f مربع کے برابر ہے تو fx x دیکھیں
یہ ظاہر کرتا ہے کہ w کیوب کے ذریعہ دیا گیا ہے اب کیا یہ ایک ایک فنکشن ہے . x مساوی fx تک ایک فنکشن کو دیکھتے ہیں جو r سے r
کی تعریف سے اس کا کیا مطلب ہے اس کا f دو تو پھر x ایک اور x دو کے لئے کچھ x کے f ایک کے برابر x ہے f کا ایک ایک f
ایک مکعب ہے اس کا x دو مکعب کے برابر ہے اب مکعب کی جڑیں لے رہا ہے دونوں طرف ہمارے پاس x ایک مکعب x مطلب یہ ہوگا کہ
ایک دے گا اور اسی طرح دوسری طرف ہمارے x ایک مکعب اس کا مکعب جڑ آپ کو x دو مکعب کا مکعب جڑ ہے اب x مکعب جڑ وہی ہے جو
ایک ہے ایک فطری سوال جو کوئی یہاں پوچھنا چاہتا ہے پچھلی مثال میں ہے f دو ہے لہذا x دو مکعب کی جڑ x دو ہے کیونکہ مکعب x پاس
کوئی نہیں ایک مربع جڑ لیں مثال کے طور پر آپ کے پاس چار ہیں کیوں کوئی چار کا مربع جڑ نہیں لے سکتا اور پھر کہتے ہیں کہ فنکشن ایک y
ہے لیکن اگر آپ چار کا مربع جڑ لیں تو آپ کے پاس دو جڑیں ہیں ایک جمع دو اور دوسری مائنس دو ہے لہذا آپ کے پاس چار کے دو مربع جڑ ہیں
کو تین چار پانچ چھ سات کے طور y برابر 1 2 3 4 اور 5 اور آئیے x لہذا فنکشن ایک نہیں ہے اس صورت میں ہمارے پاس ایک اور مثال ہے
x کے برابر ہے fx تک اس کی وضاحت کرتے ہیں y سے f x پر منتخب کریں اور آٹھ اب ڈیفائن کرتے ہیں آئیے اس فنکشن کو دیکھتے ہیں
جمع دو ہے اب آئیے اس کو تصویری انداز میں پیش کرنے کی کوشش کریں دو تین چار اور x پلس ون ایکس پلس ٹو صحیح ہمارے پاس جو ہے وہ
پانچ تین چار پانچ چھ سات اور آٹھ اب آپ کے پاس یہ چیزیں ہیں اگر آپ دیکھیں گے کہ ایک فنکشن کو تین میں میپ کیا گیا ہے دو کو چار میں میپ
کیا گیا ہے تین کو پانچ میں میپ کیا گیا ہے چار کو چھ میں میپ کیا گیا ہے اور آخر میں پانچ کو سات دائیں پر میپ کیا گیا ہے۔ یہاں آپ دیکھ سکتے
کا کوئی دوسرا x ہیں کہ 3 4 5 6 رینج میں موجود ہر عنصر کو ایک منفرد پری امیج ملی ہے لہذا تین کا پہلے سے تیار کردہ بالکل ایک ہے اور
سے تین کو جنم دیتا ہے اور اسی طرح چار کے لیے دو واحد پری امیج ہے اور پانچ کے لیے تین صرف پری امیج ہے f عنصر نہیں ہے جو اس
ایک ایک ہے اس صورت میں مثال f چھ کے لیے چار صرف پری امیج ہے اور سات پانچ کے لیے واحد پری امیج ہے اس طرح اس معاملے میں
کے طور پر اس قسم کی جہاں صورتحال کو تصویری طور پر بیان کرنا آسان ہو یہ ہمیشہ اچھا ہوتا ہے کہ یو آپ اس پر ایک خاکہ دیکھیں کیونکہ
خاکہ یا اس قسم کی تصویری نمائندگی ہمیں یہ سمجھنے میں مدد دیتی ہے کہ آیا کوئی فنکشن ایک ہے یا نہیں اب آئیے ایک اور تصور کو دیکھتے ہیں
f ڈومین co کا f کی حد کے برابر ہے جب بھی co domin f کا f اگر surjective تک کہا جاتا ہے یا y سے f ایک فنکشن
ٹھیک ہے اب آئیے دیکھتے ہیں اسی فنکشن کو دیکھتے ہیں جو surjective ہے یا onto کی حد کے برابر ہے آپ کہتے ہیں کہ فلاں فنکشن
ہے اور فنکشن پر اب اگر آپ اس کو دیکھیں تو اس معاملے f مربع کے برابر ہے سوال fx x تک دیا گیا r کو مائنس فور سے فور تک f ہم
کا کو ڈومین صرف 0 سے 16 تک ہوگا۔ اگر میں کوئی ایسا عنصر چنتا ہوں جو 0 سے 16 کے درمیان نہ ہو یا اگر میں کوئی ایسا عنصر f میں
منتخب کرتا ہوں جو منفی ہو یا اگر میں کوئی حقیقی نمبر منتخب کرتا ہوں جو 16 سے بڑا ہو تو پھر مائنس فور سے لے کر چار تک کوئی ایکس
y صفر سے کم یا y اس سے کم ہے تو مجھے اسے y جا رہا ہے۔ مجھے صحیح نمبر دینے کے لیے اس طرح اگر fx موجود نہیں ہے کہ
y کے برابر ہو کیونکہ y سے 16 پھر ہم نے مشاہدہ کیا کہ مائنس چار سے چار میں کوئی بھی ایکس موجود نہیں ہے جو کہ r عظیم لکھنے دیں
سولہ سے بڑا ہے y صفر سے کم ہے یا y کا ہمارا انتخاب ایسا ہے کہ
تک اس کو صفر ون سے لامحدود تک r اب اس پر نہیں ہے۔ ہم ایک اور مثال دیتے ہیں آئیے اس ایک کو دیکھتے ہیں وقفہ صفر سے f اس لیے
کا تعلق ہے زیرو کوما انفینٹی تو یہ ہمارا کو y اب کیا یہ ایک آنٹو فنکشن ہے x x کے برابر ایک fx صفر کوما انفینٹی کے طور پر دیا گیا ہے
fx y تیار کرنا پڑے گا کہ x کا انتخاب کریں اب ہمیں صفر کوما انفینٹی سے ایک عنصر y ڈومین سے ایک عنصر co ڈومین ہے لہذا آئیے
اس x ہے تو ایک بار جب ہم نے اسے منتخب کرلیا تو ہمارا دعویٰ ہے کہ وہاں موجود ہے اس لامحدود وقفہ میں کھلے صفر کھلے انفینٹی میں
کو کیسے پیدا کیا جائے اب فرض کریں x کو کیسے پیدا کیا جائے جیسا کہ اس y کے برابر ہے اب اس fx y لامحدود وقفہ میں اس طرح کہ

ہے اس سے فوری طور پر یہ ظاہر ہو y ہوگا لیکن ہمیں جو دیا گیا ہے وہ یہ y سے ایک میرا x کے برابر ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ fx y
y کو 1 بذریعہ x منتخب کریں y کے برابر 1 بذریعہ x یا منتخب کریں y کو بطور منتخب کریں 1 بذریعہ x تو by y برابر 1 x گا کہ
f ہے جو ہونے والا ہے لہذا y ہے لہذا یہ ایک ایک کرکے y کا ہمارا انتخاب 1 بذریعہ x ہے لیکن x جو 1 بذریعہ fx منتخب کریں پھر
ایک آنٹو فنکشن ہے fx کے برابر فنکشن x پر ہے اس طرح ہم نے دکھایا ہے کہ کھلا وقفہ 0 کوما انفینٹی سے اوپن انٹرول 0 کوما انفینٹی تک 1
f x اب آئیے ہم فنکشنز کا ایک اور اہم تصور دیکھتے ہیں جسے کمپوزیشن کہا جاتا ہے۔ فنکشنز کا فرض کریں کہ آپ کے پاس دو فنکشنز ہیں
کی g کی تشکیل دی گئی g اور f تک دیے گئے y سے g اور x y سے f تک تو دو فنکشن z سے g y تک اور ایک فنکشن y سے
z ہو گا اور اس کا میرا کوڈ x یہ ہے اس فنکشن کا ڈومین f کمپوزٹ کا استعمال کرے گا g کے ساتھ درج ذیل ہے تو معیاری گردش f تشکیل
سے r کے برابر ہے اب آئیے کچھ کو دیکھتے ہیں۔ فنکشنز کی کمپوزیشن کی مثالیں ہم یہاں g کے x fx پر f دیا جائے گا جس کی تشکیل
کیوب x کی طرف سے دیا گیا r gx سے g from r مربع اور ایک اور فنکشن fx equal to x تک کے فنکشن کو دیکھتے ہیں جو r
x ہے جو g کا fx ہے جو x پر f کو دیکھتے ہیں جس میں g پاور سکس ہے دوسری طرف اگر آپ x کے برابر پورا مربع جو کہ بالکل
پر مشتمل f پاور سکس ہے جس میں آپ محسوس کر سکتے ہیں اس صورت میں کہ x مربع پورے مکعب کے برابر ہے جو x مربع کے برابر
sin x کے برابر ہے جو fx تک r سے r کے ساتھ بنا ہوا ہے اب آئیے ایک اور مثال دیکھیں جو آپ کے پاس f کے ساتھ g کے برابر g
g ff کمپوزیشن کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور f کے ساتھ g مربع کے ہم x کے برابر ہے gx تک r سے g کے برابر ہے اور
کی گنتی کرنے g مربع کا سائن ہو گا دوسری طرف آئیے x ہے جو کہ f مربع کا x ہو گا جو f کا g کے x پر g x کمپوز کے ساتھ
کے برابر ہے جو sin x کے g ہوگا جو کہ g کا fx کے ساتھ frtx کے ساتھ تشکیل دیا گیا g کے ساتھ اب f کی کوشش کرتے ہیں۔
ed f compose g کے ساتھ g compos f کے برابر ہے تو اس معاملے میں ہم نے جو مشاہدہ کیا ہے وہ یہ ہے کہ x مربع sine
کے برابر نہیں ہے اس طرح کمپوزیشن کی گنتی کے لیے وہ ترتیب بہت اہم ہے جس میں ہم تحریر کرتے ہیں

کے برابر نہیں ہو سکتا۔ آئیے ایک f g کے ساتھ مشتمل f اس لیے کمپوزیشن کموٹ نہیں کر سکتی ہے جو ہم نے اس مثال سے دیکھا ہے کہ
کے برابر ہے 0 1 4 9 10 16 20 25 اور b اور مثال کو دیکھنے کی کوشش کریں آئیے ایک سادہ سی مثال دیکھیں جو 1 2 3 4 اور 5
کی طرف سے f کے f بطور 0 1 2 3 4 5 6 7 آٹھ نو دس گیارہ بارہ تیرہ چودہ سے پندرہ تک اب آئیے ایک مربع کے برابر c اور 30
کے فعل کو دیکھیں۔ ایک b اگر b کے مربع جڑ کے طور پر b کے ذریعہ دیئے گئے c سے b کے g تک اور b سے f دیئے گئے
کامل مربع نہیں b کی 2 سے وضاحت کریں اگر b کی جڑ کے طور پر بیان کریں ورنہ b کامل مربع ہے جب بھی یہ ایک کامل مربع ہے اسے
کے طور پر بیان کریں اگر یہ کامل مربع نہیں ہے تو اس کی وضاحت کریں اب ہم ان دو فنکشنز کی b ہے اگر یہ کامل مربع ہے تو اسے جڑ
تک کی گنتی کرنے کی کوشش کرتے g سے اب c کے ساتھ ایک فنکشن کے طور پر ایک سے f ترکیب کو دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں آئیے
کے طور پر دیا جاتا ہے لیکن ایک مربع ہمیشہ ایک کامل g کے برابر جو ایک مربع کے f کے a کے مساوی f کے ساتھ g ہیں۔ اس کو لکھیں
کامل مربع ہوتا ہے اور

اس لیے یہ مجھے کنویں کے انتخاب کا صرف مربع جڑ دے گا۔ مربع جڑ صرف مثبت مربع جڑ ہے اور اس وجہ سے آپ کے پاس جو ہوگا وہ مربع
فنکشن کو دیکھیں تو یہ نظر آتا ہے۔ جیسا کہ g پر مشتمل ہے بالکل ایک ہے اگر آپ a کے ساتھ f اس طرح g کا مربع جڑ ہے جو صرف ایک
سے 2 b کا مربع جڑ لے رہا ہے اور یہ کسی اور مقام پر b ایک کافی پیچیدہ فنکشن جو ایک قدر لے رہا ہے یا وہ ہے جو آپ کو کچھ پوائنٹس پر
بھی لے رہا ہے کچھ پوائنٹس کے دوسرے سیٹ یہ کافی پیچیدہ فنکشن ہے لیکن اگر آپ دیکھیں کمپوزیشن میں تو یہ بہت آسان ہونے جا رہا ہے
اس لیے بعض اوقات کمپوزیشن چیزوں کو بہت زیادہ واضح کر دیتی ہے اب آئیے ہم اس بات کو نمایاں کرنے کی کوشش کریں کہ ہم کیا چاہتے ہیں
یہ وہ جگہ ہے جہاں ہم نے اس کے ساتھ شروع کیا جو ہم b کے ساتھ شروع کیا ہے f کے درج ذیل b لہذا ہم نے اصل میں ایک انٹرسیکشن
کا b ایک ہے کیا یہ درست ہے کہ ایک چوراہے f ایک نہیں ہے اب سوال یہ ہے کہ فرض کریں کہ f ان مثالوں میں سے یہ ہے کہ aw ہیں .
faf fa کا b کے برابر ہے درحقیقت درج ذیل بیانات برابر ہیں کیا ہیں ہمارا پہلا بیان یہ ہے کہ ایک چوراہے f کے b f ایک چوراہے f
fb اور b fa اور a سیٹوں disjoint ایک ایک اور تیسرا کسی بھی دو fs کے برابر ہے دوسرا intersection fbe
ہے ایک تیسرا ہے کسی f ہے دوسرا ایک f کے ساتھ ایک تقطیع کا f کے b ہے برابر ہے f کا b ہیں پہلا ایک چوراہے disjoint
کا متضاد ٹھیک ہے اب آئیے اس بیان کو ثابت کرنے کی کوشش کریں اب ہم اسے b کا f اور a کا b اور a بھی دو متضاد سیٹوں کے لئے
ایک ہے تو آئیے اس سے شروع کریں جس سے ہم جانتے ہیں کہ ہم جانتے f ثابت کرنے کی کوشش کریں دو کا مطلب ایک ہے تو فرض کریں کہ
کے ساتھ موجود ہے تو ہمیں یہ ثابت کرنا پڑے گا کہ دوسرا طریقہ شامل ہے۔ یہ ایک f کے b میں f یہ ایک چوراہے کے f کا b ہیں کہ
کے b کا تعلق y میں موجود ہے تو آئیے اسے آگے بڑھائیں جس طرح سے f کے b کے ساتھ ایک چوراہے b کے f ہے f چوراہے کا
f کے b کا تعلق y سے ہے اور f کے a کا تعلق y سے ہے جس سے فوری طور پر یہ ظاہر ہوتا ہے کہ f کے ساتھ چوراہے کے f
کی a ہے۔ اسی طرح y موجود ہے جیسے کہ a سے ہے اس کا مطلب ہے کہ کیپیٹل میں ایک عنصر f کے a کا تعلق y سے ہے اب
کی y b موجود ہے اس طرح کہ b میں b سے تعلق رکھتا ہے جس سے فوری طور پر یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کیپٹل f کے b y کا f شکل
اور اسی طرح ہمارے f کی شکل a کا ہے y میں کہتا ہے کہ a ہے a کا ہے اب ہمارے پاس یہ ہے کہ ہمارے پاس ایک عنصر f شکل
کے برابر ہے تو fb کیا ہے جو fa کے برابر y کا ہے تو ہمارے پاس f کی شکل y b اس طرح ہے کہ b میں ایک عنصر b پاس
کے برابر ہے جو b کے برابر کا مطلب fa fb ایک ہے ایک کی تعریف کے مطابق 1 1 f کی چونکہ b ہے f کے برابر f ہمارے پاس
x برابر fx یہ وہ ہے جس کی ان تمام مثالوں میں کمی تھی جو ہمارے پاس پہلے تھی مثال کے طور پر b ایک چوراہے سے تعلق رکھتا ہے a
کے مربع یہ وہ ہے جس میں کمی تھی ایک کی کمی تھی تاکہ ہم ثابت نہ کر سکیں کہ ہم معکوس عدم مساوات کو ثابت نہیں کر سکے
کے اگلے مساوی کو دیکھتے ہیں ایک کا مطلب تین ہے فرض کریں کہ ایک b سے تعلق رکھتا ہے۔ اب ایک چوراہے f ہے fx جو y اس لیے
کا a کے متضاد ذیلی سیٹ ہونے دیں تو ہمارے پاس x کو b اور a کے ساتھ اب b کے f کے f ایک چوراہے کے f کا b چوراہے
کے لئے رکھتا ہے اب ہمیں جو دیا گیا ہے وہ b اور a کے برابر ہے یہ تمام ذیلی سیٹوں f کے f کے انٹرسیکشن b b ہے انٹرسیکشن f
اب جس طرح سے ہم نے وضاحت کی ہے۔ mt ہے b کے کوئی بھی دو متضاد ذیلی سیٹ ہیں جو کہ ایک انٹرسیکشن b x اور a یہ ہے کہ
تک ایک فنکشن ہے لہذا کنونشن کے ذریعہ ہم ہمیشہ جو انتخاب کرتے ہیں وہ یہ y سے ایک غیر خالی سیٹ x ایک فنکشن یہ ایک غیر خالی سیٹ
ہونا f کا mt جو جا رہا ہے f کا b ہے کہ ایک خالی سیٹ کی تصویر خالی ہے لہذا یہ کنونشن کے ذریعہ ہے اور اس لئے ایک چوراہے
کے ساتھ جو b کے f ہو جائے گا f ایک چوراہے کا f کا b صرف ایک خالی سیٹ ہو گا لیکن ہمارے مفروضے کے مطابق ایک چوراہا
یہ دونوں سیٹ جوڑ fb اور fa ہے جو خالی جو ہم نے دکھایا ہے وہ یہ ہے کہ f کا b ہمارے مفروضے سے ہونے والا ہے ایک چوراہا
سیٹ f disjoin فرض کرتا ہے کہ f رہے ہیں یہ کہہ کر دونوں اب ثابت کرتے ہیں وہ تیسری مساوی تین کا مطلب ہے دو فرض کریں کہ
سے ہے فرض کریں x دو کا تعلق x ایک کوما x ایک ہے لہذا f سیٹ کرتا ہے تو ہمیں جو دکھانا ہوگا وہ یہ ہے کہ disjoint لیتا ہے دو
دو کے x ایک x ایک ہے جو ہمیں دکھانا ہو گا وہ یہ ہے کہ f کے برابر تو یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ f ایکس دو کے f ایک کا x کہ
کے x 2 ایک x ہیں تو آئیے اس کے برعکس فرض کریں کہ f کے برابر یہ دو f دو کے x برابر ہے اب فرض کریں کہ آپ کے پاس
نہیں ہے اب ہم ایک تضاد پیدا کریں گے کہ تضاد کیسے 1 1 f نہیں ہے جو ہم نے فرض کیا ہے وہ یہ ہے کہ 1 1 f برابر نہیں ہے یعنی

دو x ایک f x کا x دو ہیں لیکن x ایک اور x دو ہیں جو x ایک اور x پیدا کیا جائے جو ہمارے پاس ہے وہ دو عنصر ہے الگ الگ عناصر
دو x ایک اور سنگلٹن x دو کے برابر نہیں ہے جو فوری طور پر کہے کہ یہ دو سنگل دس سیٹ سنگلٹن x ایک x کے برابر ہے تو f کے
سیٹوں میں لیتا ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ سنگلٹن disjoint سیٹوں کو disjoint f ہیں منقطع لیکن پھر ہمارا مفروضہ یہ کہتا ہے کہ
جیسا نہیں f ہے یہ ایکس ٹو کے سیٹ f کے برابر نہیں ہے۔ سنگلٹن ایکس ٹو کا مطلب ہے کہ یہ سیٹ ایکس ون کا بالکل f f کا x one
پر مشتمل سیٹ یہ دونوں ہیں۔ ایک نہیں اور وہی جو فوری f کا سنگلٹن x2 ہے اور f ایک کا x ہے جو ہم نے دکھایا ہے کہ سیٹ جس میں
ایک ہے یا ایک انجیکشن فنکشن اب f کے برابر نہیں ہے جو کہ ایک تضاد ہے اس طرح f دو کے x f ایک کا x طور پر یہ ظاہر کرتا ہے کہ
ایک کو اگر ایک صرف fs تک پھر b سے a سے f آخر میں ہم مرکب کے لحاظ سے ایک ایک فنکشن کی خصوصیت دیتے ہیں اور فنکشن پر
پر ایک شناختی فنکشن ہو گا اور دوسرا a صرف g کے ساتھ مشتمل پہلا ایک f تک موجود ہو کہ b اس صورت میں اگر ایک فنکشن جی سے
پر شناختی فنکشن کے طور پر کام a کو g کے ساتھ مشتمل f تک اس طرح کی ضرورت ہے کہ b سے g ایک دو آپ ہے۔ ایک آنٹو فنکشن g
آپ کے f کرنا چاہئے یہ وہی ہے جو ہم چاہتے تھے اب آئیے ہم اسے ثابت کرنے کی کوشش کریں آئیے آگے کے معنی کو دیکھیں فرض کریں کہ
تو اچھی طرح سے om b to a پاس ایک ہے آپ کو ایک فنکشن دیا گیا ہے جو ایک ہے اب ہمیں جو پیدا کرنا ہوگا وہ ایک فنکشن جی ایف آر ہے۔
آپ کے پاس ایک دو تین اور چار ہیں اور پھر آپ نے اچھی y یہ ہے x وضاحت کریں آہ ہمارے ایک سرے پر ایک خاکہ ہے فرض کریں کہ یہ
have is one is mapped in two two two is mapped to a طرح سے اسے ایک دو تین چار اور پانچ کہتے ہیں تو آپ کیا
three to 5 اور چار کو تین میں میپ کیا جاتا ہے یہ وہ فنکشن ہے جس کی اب ہم نے تعریف کی ہے تو آئیے ہم اس مثال کو اپنے ماڈل کے
اب اگر آپ g کا b ہونے جا رہا ہے جیسا کہ g میں a سے b طور پر رکھیں اور پھر یہ وضاحت کرنے کی کوشش کریں کہ یہ جی کیا ہے
میں سے ایک کے لیے صرف دو ہونے والا ہے اور اسی طرح دو کے لیے یہ ایک کے لیے تین کے لیے یہ y اس مثال کو دیکھیں تو قدرتی انتخاب
کی شکل میں ہے تو اگر آپ عناصر ایک دو تین اور پانچ b a چار ہے اور اس کے لیے 5 یہ 3 ہے تو آئیے ہم اسے اس طرح بیان کریں کہ اگر
کے عناصر کی تصاویر ہیں اور اس وجہ سے x کو مثال میں دیکھیں کہ ہمارے پاس وہیں ہے یہ سب یہ سب ہونے جا رہے ہیں۔ صرف y اور
کا عنصر ہے تو آئیے کسی بھی عنصر کو ٹھیک x یہ سمجھ میں آتا ہے کہ صرف ایک چیز جو رہ گئی ہے وہ ہے 4 جس کی ہمیں ضرورت ہے
کا کوئی بھی عنصر اور پھر ہم اسے صوابدیدی طور پر بیان کرتے ہیں تو آئیے اسے ڈیش کے طور پر بیان کریں ورنہ x اور پھر ent کریں
آئیے ایک عنصر کو ٹھیک کرتے ہیں جو اس عنصر کی حد میں نہیں ہے آئیے ہم ایک صوابدیدی عنصر کا انتخاب کریں اور پھر اس کا نقشہ بنائیں۔ اس
ڈیش کے لیے تو یہ ڈیش وہ انتخاب ہے جو ہم بناتے ہیں یہ کسی کی اپنی پسند پر منحصر ہے
کے ساتھ بنتا ہے۔ f اس لیے اب ہمیں دو چیزوں کو درست ثابت کرنے کے ساتھ جانا پڑے گا ایک یہ کہ جی دو پر ہے اور دوسری یہ کہ جی
ہے اگر f کی g کی تعریف کے مطابق a میں b پر f جس پر مشتمل ہے g شناخت کا فنکشن اچھی طرح سے ثابت کرتا ہے کہ پہلا ایک
کا ایک عنصر a اب میرے پاس a کا ہوتا ہے۔ f کسی نقشے کی شکل b کی تعریف کو دیکھیں تو یہ مندرجہ ذیل کہتا ہے جب بھی میرا g ہم
پر یہ وہی ہے جو میں چاہتا تھا کہ دوسرا لگاتار یہ a پر جائے گا جو بالکل وہی شناختی فنکشن ہے جس کی تشخیص کی گئی e ہے لہذا یہ f
g a کا b میں اس طرح کہ b کیپٹل b میں یا y کیپٹل b سے تعلق رکھتا ہو ایک پیدا کرنا پڑے گا۔ عنصر AI جی جاری ہے تاکہ ایک کیپٹل
کا انتخاب کرنے دیں تو b تو مجھے pped میں a کی تعریف کے مطابق g ہوگا ma میں f کے a ہوگا a ہے لیکن جب بھی میرے پاس
پر ہے اب آئیے f اس طرح a ہوگا جو کہ بالکل g کا f کا g a کا b کے طور پر منتخب کرنے دیں پھر f کے a کو b کو b
کے ساتھ f تک موجود ہے کہ b سے g ریورس ثابت کرنے کی کوشش کریں حصہ یا بات چیت کا حصہ فرض کریں کہ وہاں ایک آنٹو فنکشن
ایک ہے تو آئیے اس تعریف کی تصدیق کرنے کی کوشش کریں فرض کریں f پر مجھے کیا دکھانا ہوگا کہ a ایک شناختی فنکشن ہے g مشتمل
کے برابر ہے جو ہمیں دکھانا ہوگا کہ ایک دو کے برابر ہے f ایک دو کے f کے برابر آپ کو دیا جاتا ہے کہ ایک کا f دو کے f کہ ایک کا
کے برابر ہے یہ f ایک دو کے g کا f کے ایک دو کا جس کا مطلب یہ ہو گا کہ ایک کا f برابر f لیکن ایک بار جب آپ جان لیں کہ ایک کا
دو پر لکھنے کے مترادف ہے جس کا مطلب ہوگا لیکن ہم کیا جانتے ہیں یہ ہے کہ e f کے ساتھ g کو ایک کے برابر f مرکب g مندرجہ ذیل
اب ایک ایسا ہی سوال ہے جو یہ f بالکل وہی شناختی فنکشن ہے جو ہمیں فوراً بتائے گا کہ 1 کے برابر 2 اس طرح f کمپوزیشن جی پر مشتمل
کرنے دیں b سے a کو fs ہے؟ آنٹو فنکشنز کے لیے بریکٹیرائزیشن درحقیقت جواب ہاں میں ہے تو c پیدا ہوتا ہے کہ کیا اس سے ملتا جلتا
پر g اور دوسرا b کے ساتھ بنا ہو f g تک موجود ہو کہ پہلا a سے g پر اگر اور صرف اس صورت میں اگر کوئی فنکشن fs پھر
a سے f سے متعلقہ فنکشن آن ٹو ہوگا اور اگر آپ کے پاس ایک فنکشن g شناختی فنکشن ہے۔ ایک ہے تو اگر آپ کے پاس ایک ایک فنکشن ہے تو
تک ایک ہو جائے گا ٹھیک ہے ہم اس کے ثبوت کو دیکھتے ہیں آئیے ایک بار پھر اسی طرح کا خاکہ b سے g تک ہے تو متعلقہ فنکشن b سے
دیکھتے ہیں ایک حصے کے لیے میں اسے ایک دو تین چار اور پانچ کہتا ہوں اور اب دوسری طرف مجھے یہ ایک اچھی طرح سے رکھنے دو۔ ایک
سادہ سیٹ تاکہ چیزیں واضح ہو جائیں ایک کو ایک سے دو میں میپ کیا جاتا ہے دو میں تین کا نقشہ لگایا جاتا ہے ایک چار میں میپ کیا جاتا ہے دو
پر f میں اور پانچ کو بھی دو میں میپ کیا جاتا ہے یہ فنکشنز ہیں اور جو آپ کے پاس ہے وہ ایک آنٹو فنکشن ہے لہذا آگے کا مطلب فرض کریں کہ
کے لیے مندرجہ ذیل کا مشاہدہ کرنے دو b میں ہر b تک ایک فنکشن کی وضاحت کرنی ہوگی تو ہر ایف آئی آر کے لیے a سے b ہے مجھے
ہے یہاں اگر آپ عنصر ایک کو دیکھیں تو اس میں ایک اور تین ہوں گے اور b کا f میں a کی وضاحت کرتا ہوں جیسے کہ ab میں ایک سیٹ
ab پر منحصر ہے تو میں یہ بھی لکھتا ہوں کہ یہ b عنصر a کو ٹھیک کریں تو یہ a میں ایک منفرد ab ایک دو ہوں گے۔ دو چار اور پانچ تو
کا انتخاب a سے ایک عنصر a کے لیے میں نے سیٹ b سے ہے تو جس کا مطلب ہے میرے کوڈ میں ہر ab ہے تاکہ یہ کہے کہ یہ سیٹ
کے طور پر کیسے بیان کیا جائے یہ انتخاب ہمیشہ موجود رہتا ہے ab کے برابر b تک a g سے b کو g g کیا ہے اب یہ واضح ہے کہ
میں سے ایک عنصر کو ab پر ہے کیا کرنا پڑے گا۔ کہ ہمیں ان میں سے ہر ایک سیٹ 2 g اس طرح کا انتخاب ہمیشہ موجود رہتا ہے کیونکہ
پر b پر مشتمل ہے f چننا پڑے گا تو ایک بار جب ہم نے اس کی وضاحت کر دی تو ہمیں کیا کرنا پڑے گا وہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ پہلی چیز
g کے b کو دیکھیں جو g پر مشتمل b ہے ایک اچھا چلیں پہلے ایک ایک کرکے تصدیق کریں آئیے کسی بھی g شناخت ہے اور دوسری چیز
کے تمام عناصر پر مشتمل ہوتا ہے جو a سیٹ کیپٹل b سے آتا ہے۔ a کیپٹل ab ہے یہ سیٹ کیپٹل ab اباب gb چھوٹا ہے لیکن f کا
انتخاب ہے یہ انتخاب میں سے ایک انتخاب ہے اور ہم نے صحیح اور اس سیٹ سے ایک a کے ساتھ میپ کیا جاتا ہے اور یہ چھوٹا b عنصر
منفرد انتخاب کیا ہے اور
دینے جا رہے ہیں جو بالکل وہی شناخت ہے جس پر دوسرا جو ہم چاہتے تھے وہ یہ ہے کہ ہمیں اس بات کی تصدیق b اس لیے یہ ہے مجھے
g دو کے b کا اطلاق کریں f پر f کے g کے b کے برابر دو آئیے g کے p ایک g کا b ایک ہے فرض کریں g کرنی ہوگی کہ
شناختی فعل ہے g کمپوزس f دو پر لیکن b g کمپوزڈ f ایک کے برابر b پر g پر مشتمل f کے برابر ایک جس کا مطلب ہو گا f کے
تک ایک ایک فنکشن موجود ہے کہ a سے b ایک ہے ایک بات کو ثابت کرتے ہیں جزوی فرض کریں کہ g دو اس طرح b ایک برابر b لہذا
g پیدا کرنا پڑے گا اس a کو ایک عنصر g میں ڈالنے کے لئے bi کو b شناختی فنکشن ہے ہمیں یہ دکھانا پڑے گا کہ f کے ساتھ مشتمل
کا انتخاب کرنے دیں پھر ہمارے پاس جو ہے وہ یہ ہے a کے طور پر g کے b ہے لہذا بہترین انتخاب یہ ہے کہ مجھے b a f کا طرح
ہے b f a کا a کہ مجھے یہ دکھانا پڑے گا کہ
کے ساتھ بنا ہوا شناختی فعل ہے جو f g لیکن v پر مشتمل ہے g پر f بننے والا ہے جو f کا g کے b جو re f کا a اس لیے

آن ہے تو یہ دو خصوصیات ہیں جو ہمارے پاس تھی ایک فنکشن کی خصوصیت ایک آنٹو فنکشن کے لحاظ سے ہے اور f ہے اس طرح b بالکل دوسرا ایک فنکشن کے لحاظ سے ایک فنکشن کی خصوصیت ہے اور اس کے ساتھ میں آپ سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں ۔