शेवटच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांचे स्वागत करा आम्ही संबंधांची संकल्पना पाहिली आता या वर्गात आम्ही शेवटच्या वर्गात समतुल्य संबंध म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या नातेसंबंधांच्या नवीन वर्गाचा अभ्यास करणार आहोत जेव्हा आम्ही समाप्त केले तेव्हा आम्ही एक म्हणून ओळखली जाणारी संकल्पना परिभाषित केली.

सममितीय संबंध आपण त्याच व्याख्येने सुरुवात करू या सममितीय नातेसंबंधाच्या व्याख्येपासून सुरुवात करूया
a हा रिक्त नसलेला संच असू द्या आणि r हा
a पासून स्वतःचा संबंध असू द्या आपण असे म्हणतो की
जोडी जर ऑर्डर केलेली जोडी असेल तर स्वल्पविराम असेल b r च्या मालकीचा आहे असे सूचित करते की विरुद्ध जोडी b स्वल्पविराम a देखील r मध्ये आहे आपण त्याच उदाहरणाचे देखील पुनरावलोकन करू या ज्याचे आपण शेवटचे वर्ग करू या त्याच उदाहरणाकडे आपण एक दोन तीन चार आणि पाच r होता ते सर्व आहे x आणि y मधील फरक ही विषम संख्या आहे या अटीसह क्रॉस a पासून x स्वल्पविराम y आम्ही संच r स्पष्टपणे लिहिला आहे आपण ते पुन्हा एकदा करूया आपण हा r पुन्हा r लिहू या एक स्वल्पविराम दोन फरक पाहण्यासाठी एक आणि दोन मधली एक आहे जी विषम संख्या आहे

त्यामुळे तुमच्याकडे एक दोन तसेच एक स्वल्पविराम आहे एक फरक शून्य आहे म्हणून एक स्वल्पविराम एक दिसत नाही आणि एक स्वल्पविराम तीन फरक दोन एक स्वल्पविराम चार फरक तीन आहे म्हणून तो एक दिसतो स्वल्पविराम पाच दिसत नाही कारण फरक चार आहे आता दोन स्वल्पविराम एक तो येथे आहे कारण फरक एक दोन स्वल्पविराम दोन फरक शून्य दोन स्वल्पविराम तीन फरक एक दोन स्वल्पविराम चार येथे फरक दोन दोन स्वल्पविराम पाच फरक आहे तीन पुढील एक तीन स्वल्पविराम एक फरक दोन तीन स्वल्पविराम दोन फरक एक तीन स्वल्पविराम चार आणि नंतर तीन स्वल्पविराम पाच फरक दोन आता आपण चार चार स्वल्पविराम वर जाऊया एक फरक तीन चार स्वल्पविराम दोन फरक दोन चार स्वल्पविराम तीन चार स्वल्पविराम पाच आणि नंतर आपल्याकडे पाच स्वल्पविराम असेल एक फरक चार पाच स्वल्पविराम दोन आणि पाच स्वल्पविराम चार हे r चे घटक आहेत जर आपण हा r th बघू.

en हे स्पष्ट आहे की खालीलपैकी एक गोष्ट लक्षात घेतली जाऊ शकते ती म्हणजे जेव्हा जेव्हा b जोडी a स्वल्पविराम असतो तेव्हा विरुद्ध जोडी b स्वल्पविराम a देखील असतो उदाहरणार्थ एक स्वल्पविराम दोन असतो आणि त्याचप्रमाणे दोन स्वल्पविराम एक असतो.

त्याचप्रमाणे पुन्हा पुढील एक एक स्वल्पविराम चार आहे आणि तुमच्या लक्षात येईल की एक स्वल्पविराम चार आणि चार स्वल्पविराम एक आहे त्याचप्रमाणे एक स्वल्पविराम दोन आणि दोन स्वल्पविराम एक दोन स्वल्पविराम तीन तीन स्वल्पविराम दोन दोन स्वल्पविराम पाच पाच स्वल्पविराम दोन चार स्वल्पविराम पाच फाई स्वल्पविराम चार म्हणजे हे म्हणते की r हे सममितीय संबंध आहे म्हणून r हे सममितीय संबंध आहे म्हणून आपण आणखी एक उदाहरण पाहू या एक समान 2 3 4 5 आणि 6 r हे सर्व mn स्वल्पविराम m आहे ज्याच्या अटीसह क्रॉस a पासून आहे की n भागाकार m बरोबर आहे आपल्याकडे त्या सर्व जोड्या आहेत n स्वल्पविराम m अशा n भागतो m आता आपण संच r स्पष्टपणे लिहू या आता 1 भागाकार 1 म्हणून तुमच्याकडे हे 1 1 1 भागाकार सर्व संख्या आहेत

त्यामुळे आपल्याकडे असेल एक सह जोडलेले आहे सर्व एक चार एक पाच एक सहा आता दोन च्या पुढे जात आहे तुम्ही पाहाल की दोन एकाला भागत नाही तर दोन दोन भागतात पण ते तीन भागत नाही पण चार भागते ते पाच भागत नाही पण सहाला तीनच्या पुढे भाग जात नाही एक किंवा दोन परंतु ते स्वतःला तीन भागाकार विभाजित करते चार किंवा पाच न भागता उलट सहा भाग घेतात आणि नंतर चार साठी आपल्याकडे फक्त एक चार स्वल्पविराम चार आहे आणि त्याचप्रमाणे तुमच्याकडे चार स्वल्पविराम पाच आहेत आणि माफ करा पाच स्वल्पविराम पाच आणि सहा स्वल्पविराम सहा हे आहेत तुमच्याकडे बरोबर असलेल्या गोष्टी हे घटक आहेत आता लक्षात आले आहे की तुमच्याकडे एक स्वल्पविराम दोन आहे तर तुम्हाला हे लक्षात घ्यावे लागेल की एक स्वल्पविराम दोन r चे आहेत पण विरुद्ध जोडी दोन स्वल्पविराम एक r च्या मालकीचे नाही त्याचप्रमाणे तुमच्याकडे हे आहे जोडी दोन स्वल्पविराम सहा हा एक r आहे परंतु विरुद्ध जोडी सहा स्वल्पविराम दोन r मध्ये नाही म्हणून या दोन गोष्टी म्हणतात की r सममितीय संबंध नाही किंवा सममितीय संबंध नाही आता आपण आणखी एक उदाहरण करू या समान करूया वर e दोन तीन चार पाच आणि मी x कॅपिटल x निवडू या a चा पॉवर सेट म्हणून हा समावेश आहे म्हणून हा सर्व उपसंचांचा संच आहे x वर संबंध r परिभाषित करा खालीलप्रमाणे दोन उपसंच एक स्वल्पविराम दोन जोडी एक स्वल्पविराम a दोन हे r मध्ये आहे जर a च्या a1 आणि a2 च्या कोणत्याही दोन उपसंचांसाठी a दोन मध्ये समाविष्ट असेल तर आपण म्हणतो की a1 a2 शी संबंधित आहे किंवा a1 स्वल्पविराम a2 हा r आहे जर a2 मध्ये a1 समाविष्ट असेल तर कोणी करू शकेल खालील लक्षात घ्या की सिंगलटन टू हे a मध्ये समाविष्ट आहे आणि इतकेच नाही की इतर उपसंच दोन स्वल्पविराम तीन मध्ये देखील समाविष्ट आहे हे आणखी एका मध्ये समाविष्ट आहे हे लक्षात घ्या की सिंगलटन दोन दोन स्वल्पविराम तीन मध्ये समाविष्ट आहे याचा अर्थ असा होतो की जोडी सिंगलटन दोन स्वल्पविराम सिंगलटन दोन घटक दोन स्वल्पविराम तीन ही जोडी r आहे म्हणा, तुमच्याकडे r मध्ये सेट आहे पण दुसरीकडे हे खरे नाही
की दोन स्वल्पविराम तीन सिंगलटन टू मध्ये नसतात कारण दोन स्वल्पविराम तीनला दोन घटक मिळाले आहेत तर सिंगलटन दोनला फक्त एक घटक ज्याचा अर्थ असा की विरुद्ध जोडी दोन स्वल्पविराम तीन स्वल्पविराम सिंगलटन दोन हे r च्या मालकीचे नाही म्हणून r सममितीय नाही आता करूया पुढील संकल्पनेवर जाऊया आणखी एक गोष्ट परिभाषित करूया a रिकामा नसलेला संच असू द्या आणि r चा
a पासून स्वतःचा संबंध असू द्या आपण म्हणतो की स्वल्पविराम a हा जोडी r सर्व a साठी r चा असेल तर r हे रिफ्लेक्सिव्ह आहे, आपण शेवटचे उदाहरण पाहू या की आपल्याजवळ शेवटचे उदाहरण आहे म्हणजे आपला संच a आहे एक दोन तीन चार पाच आणि x हा पॉवर सेट आहे a आम्ही r ची व्याख्या
a च्या क्रॉस पॉवर सेटच्या पॉवर सेटमध्ये एक स्वल्पविराम दोन पॉवर सेट म्हणून केली आहे या अटीसह की एक दोन मध्ये समाविष्ट आहे हे आपल्याला माहित आहे की प्रत्येक संच स्वतःमध्ये समाविष्ट आहे आणि म्हणून जर b मध्ये समाविष्ट असेल तर याचा अर्थ असा होईल की जोडी b स्वल्पविराम b r च्या मालकीचे आहे म्हणून ते काय म्हणते b स्वल्पविराम b r चे आहे म्हणून r
रिफ्लेक्सिव्ह आहे आता आपण पुन्हा केलेल्या उदाहरणांपैकी एकाकडे परत जाऊ
या.

एक दोन तीन चार पाच म्हणून आणि आमचा r ते सर्व x कॉम आहे एका क्रॉस a मध्ये x आता y ला भागेल अशा स्थितीसह या उदाहरणात आम्ही r स्पष्टपणे लिहिले आहे जे काही मिनिटे मागे आहे हे लक्षात येते की एक नेहमी एक भाग करतो दोन नेहमी भागतो दोन तीन नेहमी तीन विभाजित करतो चार चार भाग करतो आणि त्याचप्रमाणे शेवटी पाच भाग जातो पाच म्हणजे ही सर्व जोडी ही संपूर्ण गोष्ट या सर्व घटकांचा हा संच r मध्ये समाविष्ट आहे याचा अर्थ आर रिफ्लेक्सिव्ह आहे असे समजू या आपण आणखी एक उदाहरण पाहू या एक एक दोन तीन चार निवडू या आणि नंतर म्हणूया की r च्या बरोबरीचे आहे ते सर्व n स्वल्पविराम m जसे की m n चौरसाच्या बरोबरीची पहिली गोष्ट म्हणजे तुमच्या लक्षात येईल की जोडी एक स्वल्पविराम एक हा r आहे कारण एक हा फक्त एकाचा वर्ग आहे परंतु दोन स्वल्पविराम दोन हे r च्या मालकीचे नाहीत याचा अर्थ असा आहे की r त्याच उदाहरणात प्रतिक्षिप्त नाही हे देखील लक्षात येते की जोडी 2 स्वल्पविराम 4 r च्या मालकीची आहे परंतु विरुद्धची जोडी 4 स्वल्पविराम 2 r च्या मालकीची नाही
त्यामुळे हे असेही म्हणते की r सममित नाही आता आपण हलवू या e पुढील व्याख्येसाठी a हा रिक्त नसलेला संच असू द्या आणि r हा a मधील स्वतःचा संबंध असू द्या,
आम्ही असे म्हणतो की r हा संक्रामक आहे जर खालील धारण केले तर स्वल्पविराम b आणि b स्वल्पविराम c r च्या मालकीचा असेल जे हे सूचित करते दोन मिळून असा अर्थ लावला पाहिजे की जोडी a स्वल्पविराम c देखील r मध्ये आहे आम्हाला स्वल्पविराम b आणि b स्वल्पविराम c च्या दोन जोड्या हव्या आहेत लक्षात घ्या की जेव्हा जेव्हा स्वल्पविराम b आणि b असेल तेव्हा दुसऱ्या जोडीचा पहिला घटक पहिल्या जोडीच्या दुसऱ्या घटकासारखाच असतो
स्वल्पविराम c r मध्ये आहेत याचा अर्थ असा होतो की स्वल्पविराम c ही जोडी r मध्ये आहे मग आपण असे म्हणतो की असे नाते संक्रमणात्मक संबंध आहे आता आपण उदाहरणे पाहू या की आपल्याकडे फक्त पहिले उदाहरण होते जे आपल्याकडे होते ते एक दोन समान आहे तीन चार पाच आणि नंतर r हे सर्व n स्वल्पविराम m आणि एक क्रॉस a आहे ज्याची अट n विभाजित करते m हे आता आपल्या लक्षात आले आहे खालील आह आपण संच थोडा अधिक वाढवू या जेणेकरून गोष्टी स्पष्ट होतील आपण वाढवूया सेट नोटीस देते की 2 स्वल्पविराम 4 हा एक आर एन आहे d चार स्वल्पविराम आठ हे r मध्ये देखील आहे की दोन स्वल्पविराम i आठ देखील r मध्ये आहे खरेतर जेव्हा जेव्हा n ला m आणि m ला k ला विभाजित करते तेव्हा ही दोन विधाने एकत्रितपणे सूचित करतात की n विभाजित करते k बरोबर म्हणून r हे सकर्मक आहे आता आपण दुसरे पाहू या उदाहरण म्हणजे आपल्याकडे फक्त काही मिनिटे मागे एक दोन तीन चार पाच च्या बरोबरी आहे आणि x हा a आणि r चा पॉवर सेट आहे
त्या सर्व जोड्या a एक स्वल्पविराम a दोन p मध्ये a च्या क्रॉस p च्या p मध्ये a दोन एक दोन मध्ये आम्ही पाहिले की हे प्रतिक्षेपी आहे परंतु सममितीय नाही हे सकर्मक आहे की नाही हे आपण पडताळून पाहू या म्हणून समजा एक स्वल्पविराम दोन r चे आहेत आणि दोन स्वल्पविराम तीन r चे आहेत आता प्रथम एक एक स्वल्पविराम दोन r चे आहे जे आम्हाला सांगते की a1 a2 मध्ये समाविष्ट आहे दुसरा a2 a2 स्वल्पविराम a3 r चा आहे जो आम्हाला सांगते की a2 a3 मध्ये समाविष्ट आहे म्हणून आमच्याकडे एक दोन मध्ये समाविष्ट आहे आणि दुसर्या हातात दोन समाविष्ट आहेत तीन मध्ये अशा प्रकारे हे दोन कंटेनमेंट एकत्र एर आपल्याला सूचित करते की एक तीन मध्ये समाविष्ट आहे याचा अर्थ असा होतो की आपल्याकडे जोडी आहे एक स्वल्पविराम तीन r च्या मालकीचा आहे म्हणून r संक्रामक आहे आपण आणखी एक उदाहरण पाहू या जे आपण काही मिनिटांपूर्वी पाहिले होते.
आमच्याकडे a आहे एक दोन तीन चार पाच आणि r हे सर्व n स्वल्पविराम m आहेत अशा स्थितीत की n आणि m मधील फरक विषम संख्या आहे आता येथे समजा जोडी n स्वल्पविराम m r मध्ये आहे आणि m स्वल्पविराम k हा एक r आहे आता आपण n आणि k बद्दल काय म्हणू शकतो हा प्रश्न आहे तर आता आपण काही उदाहरणे पाहू या आपण आता या उदाहरणात हे एक पाहू या आपल्याजवळ एक स्वल्पविराम दोन आहे का हे खरे आहे तेच आपल्याला हवे होते n स्वल्पविराम n r मध्ये आणि m स्वल्पविराम k r मध्ये आहे याचा अर्थ असा होतो की जोडी n स्वल्पविराम k r मध्ये आहे हेच आम्हाला हवे होते आता आम्हाला माहित आहे की n स्वल्पविराम एक स्वल्पविराम दोन r मध्ये आहे आणि दोन स्वल्पविराम तीन हे r मध्ये आहे कारण एक आणि दोन मधील फरक एक आहे आणि दोन आणि तीन मधील फरक देखील चालू आहे e पण एक आणि तीन मधला फरक दोन आहे म्हणून हा r चा नाही म्हणून r हा ट्रान्झिटिव्ह नाही आता मुख्य गोष्टीकडे वळूया की मुख्य गोष्ट आम्हाला हवी होती मुख्य गोष्ट जी आम्ही सुरुवातीला सांगितली होती ती आम्ही सांगणार आहोत.
समतुल्य संबंध म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या संबंधांबद्दल r रिफ्लेक्सिव्ह नसलेल्या संचातून r
स्वतःमध्ये असममित असल्यास त्याला समतुल्य संबंध म्हणतात आणि शेवटी
जेव्हा r सममित रिफ्लेक्झिव्ह आणि ट्रांझिटिव्ह असतो तेव्हा आपण असे म्हणतो की असे नाते हे समतुल्य नाते आहे आपण काही उदाहरणे पाहू या आपण
एक दोन तीन चार पाच ची समानता पाहू या आणि नंतर r त्या सर्व n स्वल्पविराम m या अटीसह n विभाजित m असे काय आहे की आपण काय केले हे आपल्याला माहित आहे खरं तर असे आढळले की r सममितीय नाही म्हणून पुन्हा r प्रतिक्षेपी आहे तिसरा r संक्रामक आहे या गोष्टी आमच्या लक्षात आल्या आहेत म्हणून पहिला r सममितीय नाही असे म्हणते की
त्यामुळे याचा अर्थ असा होतो की r समतुल्य संबंध नाही बरोबर आपण या पुढील उदाहरणाकडे जाऊ या की आपल्याकडे एक दोन तीन चार पाच आणि नंतर x हा a च्या सर्व उपसंचांचा घात संच होता आणि मग आपण r ची व्याख्या जोड्या एक स्वल्पविराम a म्हणून करू.
दोन आणि pa क्रॉस pa या अटीसह की एक दोन मध्ये एक समाविष्ट आहे येथे आपण जे पाहिले ते म्हणजे r सममितीय नाही दुसरा तसेच r रिफ्लेक्झिव्ह आहे परंतु r संक्रामक नाही म्हणून पहिला r बरोबर या तीन गोष्टी एकत्र आहेत म्हणून पहिले एक आणि दुसरे हे दोघे म्हणतात की माफ करा पहिला म्हणतो की r हे समतुल्य संबंध नाही पण आता प्रश्न असा आहे की असे कोणतेही नाते आहे का जे समतुल्य संबंध आहे होय आपण आणखी एक उदाहरण पाहू या z दर्शवूया.
सर्व पूर्णांकांचा संच म्हणून खालीलप्रमाणे r परिभाषित करा z वरील संबंध r खालीलप्रमाणे परिभाषित करा म्हणून आम्ही म्हणतो की जोडी n स्वल्पविराम m r च्या मालकीचे आहे जर n m modulo 9 ला एकरूप असेल तर n m ला एकरूप असेल तर n हा

फरक काय आहे
उणे m आहे नऊ ने विभाज्य हा फरक आत्तापर्यंत भागला पाहिजे हे पाहूया की हे संबंध आपण जे काही परिभाषित केले आहे ते समतुल्य संबंध आहे आता प्रथम आपण काय पहावे ते हे आहे की हे सममित आहे समजा n स्वल्पविराम m r च्या मालकीचा आहे म्हणजे ते काय आहे n हे m मोड्युलो नऊ ला एकरूप आहे तो फरक आहे n उणे m नऊ ने निःशेष भाग जातो हेच हेच सांगते की तेथे एक पूर्णांक k अस्तित्वात आहे जसे की n वजा m k गुणिले नऊ आहे
त्यामुळे आपल्याकडे जे आहे ते n उणे m आहे k गुणिले नऊ आपण n वजा m म्हणजे k गुणिले नऊ असे लिहू या म्हणजे m वजा n म्हणजे k गुणिले नऊ म्हणजे m वजा n हा फरक नऊ ने भाग जातो याचा अर्थ m n मोड्युलो नऊ ला एकरूप आहे म्हणजे काय? की आमच्याकडे m स्वल्पविराम n ही जोडी r आहे म्हणून r सममितीय आहे आता दुसरा r रिफ्लेक्सिव्ह आहे की नाही हे आपण पडताळून पाहू या n हे z चे आहे तर लक्षात घ्या की n उणे n 0 आहे जे मी ते 0 म्हणून देखील लिहू शकतो वेळा ९ म्हणजे n हे n मोड्युलो नाइनशी एकरूप आहे
याचा अर्थ असा होतो की जोडी n स्वल्पविराम n r मध्ये आहे म्हणजे r प्रतिक्षेपी आहे आता r संक्रामक आहे की नाही हे n स्वल्पविराम m r चे आहे आणि m स्वल्पविराम r च्या मालकीचे आहे याची पडताळणी करूया.
कॅपिटल r म्हणून n स्वल्पविराम ही जोडी n स्वल्पविराम m हे भांडवल r चे आहे जे असे सूचित करते की n उणे m आहे n हे m मोड्युलो नाइनशी एकरूप आहे याचा अर्थ असा आहे की n उणे m
नऊ ने भाग जातो याचा अर्थ असा आहे की मध्ये k पूर्णांक आहे z मध्ये z मध्ये k पूर्णांक आहे जसे की n उणे m k गुणिले नऊ आहे या समीकरणाला एक असे म्हणू या , तर आपल्याजवळ जे आहे ते म्हणजे m स्वल्पविराम r कॅपिटल r मध्ये आहे याचा अर्थ असा होतो की हे असे म्हणण्यासारखे आहे m हे r मॉड्युलो नऊशी एकरूप आहे जे m वजा r हा नऊ ने
निःशेष भाग जात आहे असे म्हणण्यासारखे आहे याचा अर्थ असा की pnz पूर्णांक अस्तित्वात आहे जसे की m वजा r हा फरक p गुणा नऊ प्रमाणे आहे आता ते काय आहे? आम्हाला पाहिजे आहे व्या e जोडी n उणे r हा फरक n वजा r नऊ ला एकरूप आहे की नाही किंवा तो नऊ ने भागतो आहे किंवा नाही हे काय आहे तेच आपल्याला हवे होते आपण शेवटचे समीकरण दोन म्हणू या की आपल्याकडे n उणे m आहे ते काय आहे k गुणिले नऊ आणि m वजा r बरोबर काही s गुणिले नऊ p गुणिले नऊ बरोबर आहे खरेतर या दोन गोष्टी आहेत ज्या आपल्याला आता चांगल्या होत्या या दोन गोष्टींसह आपण n उणे r ची गणना करण्याचा प्रयत्न करूया जे n उणे m च्या बरोबरीचे आहे.
अधिक m वजा r समान आहे मला पहिल्या दोन गोष्टी एकाच कंसात ठेवू द्या आणि दुसऱ्या आणि तिसऱ्या ब्रॅकेटमध्ये मी फक्त m जोडत आणि वजा करत आहे पहिल्यासाठी आमच्याकडे n वजा m आहे जे k गुणिले नऊ अधिक m वजा आहे r जे p गुणिले नऊ आहे जे k अधिक p गुणिले नऊ आहे आता k एक पूर्णांक आहे आणि p देखील एक पूर्णांक आहे म्हणून pk अधिक p एक पूर्णांक आहे म्हणून मी लक्षात घ्या की k अधिक p पूर्णांक आहे म्हणून n वजा r आहे जे k अधिक p गुणिले नऊ बरोबर k अधिक b आणि पूर्णांक सह सूचित करते re याचा अर्थ असा होतो की n वजा r हा 9 ने निःशेष भाग जातो जो n हा r मोड्युलो 9 ला एकरूप आहे याचा अर्थ असा होतो की जोडी n स्वल्पविराम r कॅपिटल r च्या मालकीचा आहे म्हणून आम्ही r हे सममित रिफ्लेक्झिव्ह आणि एक संक्रमणात्मक संबंध असल्याचे दाखवले आहे.
म्हणून r हा समतुल्य संबंध आहे आणि आता आपण आणखी एक उदाहरण करू या हे उदाहरण भूमितीशी संबंधित आहे सर्व डेल्टाचा संग्रह असू द्या म्हणजे डेल्टा हा दोन आहे जो r किंवा द्विमितीय त्रिकोण आहे.
त्रिकोण उजवीकडे तुमच्याकडे r दोन मध्ये त्रिकोण आहे आता आपण rr वर संबंध परिभाषित करू या
सर्व डेल्टा बरोबर एक डेल्टा एक स्वल्पविराम डेल्टा दोन ची तुलना क्रॉस a मध्ये डेल्टा एक डेल्टा ला एकरूप आहे या स्थितीसह ते स्पष्ट आहे.
आमच्या प्राथमिक वर्गात प्रथम गोष्ट अशी आहे की r सममितीय का आहे ते सममितीय का आहे हे आपल्याला माहित आहे की जर डेल्टा एक असेल तर त्रिकोण डेल्टा एक असेल तर डेल्टा टू वर गेला म्हणजे डेल्टा दोन डे ला एकरूप आहे.
lta एक म्हणून खरं तर हे दोन्ही समतुल्य आहेत म्हणून सममितीय आहेत आणि त्याचप्रमाणे प्रत्येक त्रिकोण स्वतःशी एकरूप आहे प्रत्येक त्रिकोण स्वतःशी एकरूप आहे म्हणजे r काय रिफ्लेक्झिव्ह आहे आता तिसरा एक संक्रमण समजा डेल्टा एक स्वल्पविराम डेल्टा दोन r आणि डेल्टा दोन च्या मालकीचे आहे स्वल्पविराम डेल्टा तीन ही जोडी देखील एक r आहे जे आपल्याला दाखवायचे आहे की डेल्टा 1 डेल्टा 3 r च्या मालकीचा आहे म्हणून डेल्टा 1 स्वल्पविराम डेल्टा 2 r च्या मालकीचा आहे म्हणजे डेल्टा 1 हे डेल्टा 2 ला एकरूप आहे त्याचप्रमाणे डेल्टा दोन स्वल्पविराम डेल्टा थ्री r चा आहे याचा अर्थ डेल्टा दोन डेल्टा तीन ला एकरूप आहे बरोबर आमच्याकडे हे दोन आहेत तर आता हे काय म्हणते की हे दोघे एकत्र आहेत म्हणून मी पहिल्याला एक म्हणू या आणि दुसऱ्याला दोन या दोन एकत्र आहेत म्हणून एक आणि दोन सूचित करतात की डेल्टा वन डेल्टा तीनशी एकरूप आहे म्हणजे याचा अर्थ असा होतो की जोडी डेल्टा एक स्वल्पविराम डेल्टा तीन r च्या मालकीचा आहे म्हणून r हा समतुल्य संबंध आहे आता द्या s आणखी एक तत्सम उदाहरण करा जे पुन्हा युक्लिडियन समतल भूमिती किंवा द्विमितीय युक्लिडियन भूमिती वरून येते ते सर्व डेल्टा समान असू द्या जसे की डेल्टा हा द्विमितीय त्रिकोण आहे किंवा r दोन मध्ये त्रिकोण आहे.
द्विमितीय त्रिकोण दंड आता r ला त्या सर्व डेल्टा 1 स्वल्पविराम डेल्टा 2 म्हणून क्रॉस a मध्ये परिभाषित करू या अटीसह की डेल्टा 1 डेल्टा दोन सारखा आहे आणि त्रिकोण डेल्टा एक त्रिकोण डेल्टा दोन सारखा आहे आता तो समान पुरावा आहे आम्ही मागील उदाहरणासाठी जे केले ते दाखवू शकते की r हा समतुल्य संबंध आहे, समान पुरावा आहे किंवा मागील उदाहरणाप्रमाणे मागील उदाहरणाप्रमाणेच पद्धत आहे, आता आपण आणखी एक उदाहरण करू या अटीसह सर्व समान स्क्रिप्ट करूया.
की a हा एक मर्यादित संच आहे ही स्क्रिप्ट a मध्ये सर्व संच आहेत जे फक्त मर्यादित संच आहेत म्हणून स्क्रिप्टवर r ची व्याख्या खालीलप्रमाणे करा म्हणजे aa जोडी वर येईल a स्वल्पविराम b r च्या मालकीचा असेल तर
ai मधील घटकांची संख्या s घटकांच्या संख्येच्या बरोबरीचा असेल तर सेट सैद्धांतिक स्वरूपात r त्या सर्व जोड्यांच्या समान आम्ही

सत्यापित करतो की हा r समतुल्य संबंध आहे प्रथम r सममितीय आहे म्हणून स्वल्पविराम b भांडवल r चा आहे याचा अर्थ काय आहे याचा अर्थ a च्या घटकांची संख्या b च्या घटकांच्या संख्येएवढी आहे असे म्हणण्यासारखे आहे आणि हे b च्या घटकांची संख्या ea च्या घटकांच्या संख्येइतके आहे असे म्हणण्यासारखे आहे आणि याचा अर्थ असा आहे की जोडी b स्वल्पविराम a हा r आहे आणि म्हणून हे असे म्हणते की म्हणून r आता दुसऱ्यासाठी सममित आहे.
 r संक्रामक आहे की नाही हे सत्यापित करण्यासाठी r संक्रामक आहे की नाही हे सत्यापित करा म्हणून a हा एक मर्यादित संच असू द्या म्हणून एक मर्यादित संच दिल्यास आपल्याला माहित आहे की a च्या घटकांची संख्या a च्या घटकांच्या संख्येइतकी आहे ज्याचा अर्थ असा आहे की जोडी a स्वल्पविराम आहे एक आर म्हणून r रिफ्लेक्सिव्ह आहे आणि शेवटी
तिसरा जोडी a स्वल्पविराम b r च्या मालकीची आहे आणि जोडी b स्वल्पविराम c r च्या मालकीची आहे आता जोडी a स्वल्पविराम b r च्या मालकीचा आहे याचा अर्थ a मधील घटकांची संख्या या संख्येइतकी आहे b मधील घटक त्याचप्रमाणे आपल्याकडे आहे की जोडी b स्वल्पविराम c r मध्ये आहे म्हणजे b च्या घटकांची संख्या c च्या घटकांच्या संख्येएवढी आहे हे एक आणि दोन म्हणून चिन्हांकित करू या म्हणून एक आणि दोनने आपल्याकडे घटकांची संख्या आहे.
 c च्या घटकांच्या संख्येच्या बरोबरीने हे दोन्ही मिळून असे सूचित करतात की r संक्रामक आहे म्हणून r सममितीय प्रतिक्षेपी आणि संक्रमणात्मक आहे अशा प्रकारे r समतुल्य संबंध आहे भूमितीवरून आणखी एक उदाहरण पुन्हा करू या समतल r दोन आणि वजा मूळ मी फक्त विमान r दोन मधून मूळ काढत आहे ज्याला सर्वसाधारणपणे पंक्चर केलेले विमान असे म्हणतात,
चला या पंक्चर केलेल्या विमानासह पंक्चर केलेल्या विमानाचा विचार करू या r खालीलप्रमाणे r ची व्याख्या करू या, मी म्हणेन की जोडी x एक y   एक i   s x दोन y दोन शी संबंधित आहे किंवा जोडी x एक x एक स्वल्पविराम y एक x दोन स्वल्पविराम y दोन संबंधित आहे जो एक क्रॉस आहे जर r मध्ये शून्य नसलेला स्केलर लॅम्बडा अस्तित्वात
असेल तर x एक स्वल्पविराम असेल y one is equal to lambda times x दोन स्वल्पविराम y दोन आता हे r समतुल्य संबंध आहे याची पडताळणी करू या म्हणून प्रथम एक द्या x एक स्वल्पविराम y एक स्वल्पविराम x दोन स्वल्पविराम y दोन हे भांडवल r चे आहेत याचा अर्थ असा होतो की तेथे शून्य नसलेले वास्तव आहे वास्तविक संख्या जसे की x एक स्वल्पविराम y एक लॅम्बडा गुणा समान आहे x दोन स्वल्पविराम y दोन आता लॅम्बडा नॉनझिरो असल्याने लॅम्बडा इन्व्हर्टेबल आहे म्हणजे 1 बाय लॅम्बडा अर्थ आहे म्हणून याचा अर्थ असा होतो की 1 बाय लॅम्बडा गुणा x 1 स्वल्पविराम y 1 समान आहे ते x 2 स्वल्पविराम y 2.
 तर हे x दोन स्वल्पविराम y दोन समान आहे असे म्हणण्यास समतुल्य आहे एक बाय लॅम्बडा गुणा x एक स्वल्पविराम y एक म्हणजे ही जोडी x दोन स्वल्पविराम y दोन स्वल्पविराम x एक स्वल्पविराम y एक हा एक आहे r म्हणून r सममित आहे आता हा r रिफ्लेक्सिव्ह आहे की नाही हे तपासूया म्हणून आता x एक स्वल्पविराम y one च्या मालकीचा आहे हे आपल्याला माहित आहे की कोणत्याही x एक स्वल्पविराम y एक x एक स्वल्पविराम y एक एक गुणिले x एक स्वल्पविराम y one च्या समान आहे आणि एक शून्य नसलेला स्केलर आहे ज्याचा अर्थ असा आहे की ही जोडी x एक स्वल्पविराम y एक स्वल्पविराम x एक स्वल्पविराम y एक हा r आहे म्हणून r प्रतिक्षेपी आहे आता शेवटी सत्यापित करू या की हा r संक्रामक आहे की तिसरा नाही [संगीत] जोडी x एक स्वल्पविराम y एक स्वल्पविराम x दोन स्वल्पविराम y   दोन r चे आहेत आणि जोड्या x दोन स्वल्पविराम y दोन स्वल्पविराम x तीन स्वल्पविराम y तीन r च्या आहेत आता जोडी x एक स्वल्पविराम y एक स्वल्पविराम x दोन स्वल्पविराम y दोन हे r चे आहे असे सूचित करते की तेथे शून्य नसलेली वास्तविक संख्या आहे जसे की जोडी x एक स्वल्पविराम y एक आहे लॅम्बडा गुणा x दोन स्वल्पविराम y दोन आता मी याला एक म्हणून कॉल करू या
त्याचप्रमाणे जोड्या x दोन स्वल्पविराम y दोन स्वल्पविराम x तीन स्वल्पविराम y तीन हे r मध्ये आहे याचा अर्थ असा आहे की r मध्ये शून्य नसलेला स्केलर बीटा अस्तित्वात आहे
ते x दोन स्वल्पविराम y दोन बीटा गुणा x तीन स्वल्पविराम y तीन आहे मी या समीकरणाला tw म्हणू दे o आता मी काय करणार आहे की आम्हाला जे हवे होते ते मिळवण्यासाठी
दोन n एक च्या जागी आपण करू या x एक स्वल्पविराम y एक हा लॅम्बडा गुणा x दोन स्वल्पविराम y दोन आहे पण जेव्हा मी x दोन ची जागा घेतो तेव्हा स्वल्पविराम y दोन मला लॅम्बडा लॅम्बडा गुणिले बीटा गुणिले x तीन स्वल्पविराम y 3 मिळतात परंतु लॅम्बडा आणि बीटा दोन्ही नॉन-झिरो रिअल नंबर आहेत जे सुचविते की हा लॅम्बडा बीटा एक शून्य नसलेली वास्तविक संख्या आहे
जी जोडी x एक स्वल्पविराम आणि एक स्वल्पविराम x   तीन स्वल्पविराम y तीन हे r मध्ये आहे म्हणून r संक्रमणात्मक आहे अशा प्रकारे आम्ही r हे सममितीय प्रतिक्षेपी आणि संक्रमणात्मक आहे असे दाखवले आहे
 त्यामुळे r हा समतुल्य संबंध आहे म्हणून पुढील वर्गात आपण याचा पुरावा करू आणि या समतुल्य वर्गांचे आणखी काही गुणधर्म आणि नंतर
धन्यवाद फंक्शन म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या कल्पनेची व्याख्या करण्याचा प्रयत्न करेल