★ Matrix ★ आव्यूह ★

आव्यूह (Matrix) :- अवयवों की आयताकार व्यवस्था -ओं को आव्यूह कहा जाता है।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n$$

पंक्ति, स्तम्भ

क्रम (Order)

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$1 \le i \le m \qquad 1 \le j \le n$$

Q. $A_{2\times3}$ का आव्यूह बनाओ जहाँ $a_{ij} = \frac{|i-2j|}{3}$

Ans
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = \frac{|1-2\times1|}{3} = \frac{1}{3}$ $\qquad a_{21} = \frac{|2-2|}{3} = 0$

$a_{12} = \frac{|1-4|}{3} = 1$ $\qquad a_{22} = \frac{|2-4|}{3} = \frac{2}{3}$

$a_{13} = \frac{|1-6|}{3} = \frac{5}{3}$ $\qquad a_{23} = \frac{|2-6|}{3} = \frac{4}{3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Note :- → आव्यूह के अवयव वास्तविक तथा काल्पनिक हो सकते है।

→ यदि सभी अवयव वास्तविक है तो इसे वास्तविक आव्यूह कहते है।

Page 238

Q. 24, अवयवों से कितने भिन्न-2 क्रम वाले आव्यूह बनाये जा सकते है।

Ans
24 × 1
1 × 24
12 × 2
2 × 12
8 × 3
3 × 8
6 × 4
4 × 6

total = 8

m-2
$N = 2^p \, 3^q \, 5^r \, 7^s \ldots$
भाजकों की संख्या $= (p+1)(q+1)(r+1) \ldots$
↳ आव्यूह के क्रमों की संख्या

$24 = 2^3 \times 3^1$
No. of divisors $= (3+1)(1+1)$
$= 8$

(2) 24000
$= 2^6 . 3^1 . 5^3$
No. of divisors $= (6+1)(1+1)(3+1)$
$= 56$

आव्यूहों के प्रकार :- (Type of Matrices)

(1) पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) :-

$A = [a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; \ldots \; a_{1n}]_{1 \times n}$

(2) स्तम्भ आव्यूह (Column Matrix) :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

③ शून्य आव्यूह (Zero Matrix) :-

→ (Null / Void Matrix) इसके सभी अवयव शून्य होते हैं तथा इसे "O" से निरूपित किया जाता है।

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

④ क्षैतिज आव्यूह (Horizontal Matrix) :-

* $\boxed{(\text{No. of Column}) > (\text{No. of rows})}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

⑤ ऊर्ध्वाधर आव्यूह :- (Vertical Matrix) :-

* $\boxed{(\text{No. of column}) < (\text{No. of rows})}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

⑥ वर्ग आव्यूह (Square Matrix) :-

* $\boxed{\text{No. of rows} = \text{No. of columns}}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

a_{11}, a_{22}, a_{33} को विकर्ण अवयव (diagonal element) कहा जाता है। $\rightarrow (i=j)$

विकर्ण अवयवो के योग को अनुरेख (trace) कहा जाता है।

$$trace(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad \{\because i=j\}$$

अवयवो a_{ij} तथा a_{ji} को संयुग्मी अवयव (Conjugate elements) कहा जाता है।

ex:- a_{21} & a_{12}

प्रत्येक वर्ग आव्यूह के संगत एक सारणिक परिभाषित किया जा सकता है।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2$$

ex:- $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = 8 - 8 = 0$$

कुछ विशेष प्रकार के वर्ग आव्यूह :-
(Some special types of matrices)

① विकर्ण आव्यूह (diagonal matrix) :-

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad a_{ij} = 0 \quad \{i \neq j\}$$

② अदिश आव्यूह (Scalar matrix) :-

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{ij} = 0 & (i \neq j) \\ a_{ij} = d & (i = j) \end{matrix}$$

③ तत्समक आव्यूह (Identity matrix) (इकाई आव्यूह)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{ij} = 0 & (i \neq j) \\ a_{ij} = 1 & (i = j) \end{matrix}$$

→ इसे I_n से निरूपित करते हैं तथा $\boxed{I_n = 1}$

④ त्रिभुजाकार आव्यूह :- (Triangular matrix) :-

ऊपरी त्रिभुजाकार (upper triangular)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & - & - \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 0 \; (i > j)$

निम्न त्रिभुजाकार (lower triangular)

$$A = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 0 \; (i < j)$

ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

ex.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Q. एक n क्रम के वर्ग आव्यूह में शून्यों की संख्या कितनी होगी।

Ar. $A = \begin{bmatrix} & \frac{n^2-n}{2} \\ \frac{n^2-n}{2} & (n) \end{bmatrix}_{n\times n}$ शून्य $= \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2-n}{2}$

$= n^2 - n$

total अवयव $= n \times n = n^2$

Q. एक n क्रम के ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह में शून्यों की न्यूनतम संख्या क्या होगी?

Ans. $A = \begin{bmatrix} & \frac{n^2-n}{2} \\ \frac{n^2-n}{2} & (n) \end{bmatrix}_{n\times n}$ शून्य $= \frac{n^2-n}{2}$

आव्यूहों का बीजगणित :- (Algebra of matrices)

(1) दो आव्यूहों की समानता :- दो आव्यूह समान होने के लिए उनके क्रम तथा संगत अवयव समान होने चाहिए।

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$a_{ij} = b_{ij}$ $\left(\begin{matrix}\text{for all} \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n\end{matrix}\right)$

ex:- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b-3 & c-2 \\ 4 & d+1 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a = 1$ $b - 3 = 2$ $c - 2 = 3$

$\Rightarrow b = 5$ $\Rightarrow c = 5$

$\Rightarrow 4 = 4$ $d + 1 = 5$ $\Rightarrow 6 = 6$

आव्यूहों का योगफल :-

दो आव्यूहों का योग तभी सम्भव है जब उनका क्रम बराबर हो। योगफल में उनके संगत अवयव जुड़ जाते हैं।

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

then $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$

ex:- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Properties :-

(1) $A + B = B + A$ क्रम विनिमय (Commu

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$, साहचर्य (Assoc

(3) $A + O = A$ आव्यूह योज्य तत्समक
$A - O = A$ (Additive identites)

(4) $A + B = O$ 'A' तथा 'B' एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम (Additive inverse)

(5) $|A + B| \ne |A| + |B|$, (In general)

ex:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right|$

$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \right| = -2 + 4$

$10 \ne 2$

$$AI_n = I_nA = A$$

(3) एक आव्यूह को अदिश राशि से गुणा करना :-
(Multiplication of a matrix by scalar)

$2A = A + A$
$3A = A + A + A$

if $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n}$
$= [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $3A = A + A + A$
$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$3A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

(iii) $5A = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$ (iv) $-A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

★ Properties -

(1) $mA + nA = (m+n)A$
Ex:- (i) $2A + 3A = 5A$

(2) $m(A+B) = mA + mB$
Ex:- $3(A+B) = 3A + 3B$

(3) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
Ex:- $tr(3A) = 3tr(A)$

★ (4) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, $n \Rightarrow$ आव्यूह का क्रम है।

Q.1 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तो निम्न ज्ञात करो?
(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $2A + 3B - 5I$

Ans
(i) $A + B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$

Q.2. $2A - B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ —(1) $A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ —(2)
A तथा B के मान ज्ञात करो?

Ans. $4A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
$A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$5A = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 5 \\ -10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

समी. (1) मे A का मान रखने पर
$B = 2\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ Ans

4.★ दो आव्यूहों का गुणनफल (Matrix multiplication) :-

⇒ आव्यूह गुणनफल R×C तरीके से ही किया जाता है।

→ यदि आव्यूहों A तथा B का गुणनफल AB परिभाषित है तो A में स्तम्भों की तथा B में पंक्तियों की संख्या समान होनी चाहिए।

⇒ $A_{m\times n}$; $B_{n\times p}$

$(AB)_{m\times p}$ = defined

(BA) = Not defined

Ex:- $A_{3\times 2}$ $B_{2\times 3}$

$(AB)_{3\times 3}$ = defined

$(BA)_{2\times 2}$ = defined

Ex:- (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$AB = \begin{bmatrix} 3\times 2+2\times 5 & 3\times 4+2\times 3 \\ 4+5 & 8+3 \\ 10+20 & 20+12 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 9 & 11 \\ 30 & 32 \end{bmatrix}$

★★ Properties :-

(1) $AB \neq BA$ (In general)

(2) $A(B+C) = AB + AC$

(3) यदि A तथा B समान क्रम के वर्ग आव्यूह हैं तो

$|AB| = |A||B|$

$|ABC| = |A||B||C|$

⇒ $|A^n| = |A|^n$

$= |A.A.A.A \ldots A|$

$= |A||A||A||A| \ldots |A|$

$= |A|^n$

Proof

L.H.S $|AB| = \left|\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right|$

$= \left|\begin{bmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{bmatrix}\right|$

$= \begin{vmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{vmatrix}$

R.H.S $= |A||B|$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{vmatrix}$

L.H.S = R.H.S

(4) A^2 परिभाषित होने के लिए A वर्ग आव्यूह होना चाहिए।

(5) $AI = IA = A$ Post-multiply, Pre- ,,

(6) यदि $AB = BA$ क्रम विनिमय

यदि $AB = -BA$ प्रति क्रम विनिमय (Anti-commutative)

(7) $A.O = O.A = O$

Page 248

Q. Mark True / false :-

1. यदि $A = B \Rightarrow |A| = |B|$ ✓
2. यदि $|A| = |B| \Rightarrow A = B$ ✗
3. यदि $A = B \Rightarrow A + C = B + C$ ✓
4. यदि $A + C = B + C \Rightarrow A = B$ ✓
5. यदि $A = B \Rightarrow AC = BC$ ✓
6. यदि $A = B \Rightarrow AC = CB$ ✗
7. यदि $AC = BC \Rightarrow A = B$ ✗

$AC - BC = 0$

$(A - B)C = 0$

8. यदि $|A| = 0 \Rightarrow A = 0$ ✗
9. यदि $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ or $B = 0$ F ✗
10. यदि $\Rightarrow |A| = 0$ ✓

$AB = 0$ or $|B| = 0$

$|AB| = 0$

$|A||B| = 0$

Q. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) AB (ii) AC

Ans.

(i) $AB = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Page 249

Q 2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

तो a) $A^2 + AB$ = ~~$\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$~~ =

b) $AB + BA$

a) $A^2 + AB = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 17 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

b) $AB + BA = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$

★ $\Rightarrow (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + AB + BA$

$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 + B^2 - AB - BA$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA$

यदि $AB = BA$ (given)

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$

$(A+B)^n = {}^nC_0 A^n B^0 + {}^nC_1 A^{n-1} B^1 + \dots + {}^nC_n A^0 B^n$

Q 1. सिद्ध कीजिए विकर्ण आव्यूह गुणनफल में हमेशा क्रमविनिमेय होते हैं।

$\boxed{AB = BA}$

Ans. $A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} d_3 & 0 \\ 0 & d_4 \end{bmatrix}$

$AB = BA$

$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 & 0 \\ 0 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 & 0 \\ 0 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} d_1 d_3 & 0 \\ 0 & d_2 d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 d_1 & 0 \\ 0 & d_4 d_2 \end{bmatrix}$

LHS

** अभिलाक्षणिक समीकरण :- (Not in Bord exam)
(Characteristic equation)

⇒ अभिलाक्षणिक समी. ज्ञात करना :- (वर्ग आव्यूह के लिए)

Step 1 :- आव्यूह $A - \lambda I$ ज्ञात करें।

Step 2 :- इसका सारणिक मान $|A - \lambda I| = 0$ करें।

Step 3 :- इस प्रकार λ में प्राप्त समी. अभिलाक्षणिक समी. कहलाता है।

Step 4 :- प्रत्येक अभिलाक्षणिक समी. स्वयं के Matrix A के द्वारा संतुष्ट होता है।

Ex:- (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0}$$

$$A^2 - 6A + 2I = 0$$

⇒ Sum of root $= 6 = tr(A)$

Product of root $= 2 = |A| =$ determinant (A)

Ex: $A^2 - 4A + 7I = 0$

$A^2 = 4A - 7I$

× A

$A^3 = 4A^2 - 7A$

$A^3 = 4(4A - 7I) - 7A$

$A^3 = 16A - 28I - 7A$

$A^3 = 9A - 28I$

× A

$A^4 = 9A^2 - 28A$

$A^4 = 9(4A - 7I) - 28A$

$A^4 = 36A - 63I - 28A$

$A^4 = 8A - 63I$

× A

$A^5 = 8A^2 - 63A$

$A^5 = 8(4A - 7I) - 63A$

$= 32A - 56I - 63A$

$= -31A - 56I$

☆☆ आव्यूह बहुपद (matrix Polynomial) :-

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

$f(A) = A^3 - 4A^2 + 3A + 2I$ को आव्यूह बहुपद कहते हैं।

⇒ यदि $f(A) = 0$ हो तो आव्यूह 'A' को बहुपद का मूल कहा जाता है।

⇒ Some Important Defention :-

① वर्गसम आव्यूह (Indempotent matrix) :-

⇒ एक वर्ग आव्यूह A को वर्गसम आव्यूह कहा जाता है, यदि $\boxed{A^2 = A}$

→ यदि A वर्गसम है

$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$

$A^5 = A$

⋮

$A^n = A \quad [n \geq 2]$

Ex:- यदि A वर्गसम है तथा $(A+I)^n = I + 63A$ है तो $n = ?$

Ans. ${}^nC_0 A^n + {}^nC_1 A^{n-1} I + \dots + {}^nC_{n-1} A I^{n-1} + {}^nC_n A^0 I^n$

$(A+I)^n = {}^nC_0 A^n + {}^nC_1 A^{n-1} + {}^nC_2 A^{n-2} + \dots + {}^nC_n A^0 = \cancel{I} + 63A$

$\underbrace{{}^nC_0 A^n + {}^nC_1 A^{n-1} + {}^nC_2 A^{n-2} + \dots + {}^nC_{n-1} A}_{n \text{ पद}} = 63A$

$A({}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_{n-1}) = (63)A$

$\cancel{\boxed{n = 63}}$ Ans. $({}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n - {}^nC_n) = 63$

$2^n - 1 = 63 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow 2^n = (2)^6$

$\boxed{n = 6}$

② शून्यभावी आव्यूह (Nilpotent matrix) :-

⇒ एक वर्ग आव्यूह A को 'P' शून्यभाविता (Nilpotenty) का आव्यूह कहा जाता है। यदि

$A^P = 0$ but $A^{P-1} \neq 0$

यदि P = शुन्य भाविता

$A^n = 0 \quad (n \geq P)$

$P = 3$

$A^3 = 0 \quad A^2 \neq 0$

$A^4 = 0$

$(I + A)^{10} = {}^nC_0 I + {}^nC_1 A + {}^nC_2 A^2 + 0 + 0 + \dots$

☆☆ आवृति आव्यूह (Periodic Matrix) :-

एक वर्ग आव्यूह A को 'K' आवर्तकाल (Period) का आवृति आव्यूह कहा जाता है यदि यह सम्बन्ध को संतुष्ट करता है। $\boxed{A^{K+1} = A}$

Ex: K = 2

$A^3 = A$
$A^4 = A^2$
$A^5 = A$ $\quad [A^3 = A,\ A^5 = A^2 A^3 = A A^3 = A^3 = A]$
$A^6 = A^2$ $\quad [A^6 = A^3 A^3,\ A^3 \cdot A^3,\ A^3 A^3 = A^2,\ A^2 = A^2]$
$A^7 = A$

$A^{odd} = A$
$A^{even} = A^2$

(5) अन्तर्वलनीय आव्यूह (Involutory matrix) -

⇒ एक वर्ग आव्यूह A अन्तर्वलनीय कहलाता है यदि

$\boxed{A^2 = I}$

⇒ यदि A अन्तर्वलनीय है तो

$A^3 = A$	$A^2 = I$
$A^5 = A$	$A^4 = I$ $\quad A^{odd} = A$
$A^7 = A$	$A^6 = I$ $\quad A^{even} = I$

Note :- अन्तर्वलनीय आव्यूह का सारणिक मान (±1) होता है।

$A^2 = I$
$|A^2| = |I|$
$|A^2| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

★ Note :- यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो

(I) सारणिक $|A| \neq 0$ हो तो इसे व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहा जाता है।

(II) यदि $|A| = 0$ हो तो इसे अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहा जाता है।

★ Transpose of a Matrix (परिवृत्त आव्यूह)

⇒ यदि पंक्तियों तथा स्तम्भो को आपस मे परिवर्तित कर दिया जाये तो यह A^T या A' से निरूपित किया जाता है।

A^T / A'

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$
$A^T / A' = [a_{ji}]_{n \times m}$

Ex: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times3}$

$A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}_{3\times2}$

Ex:- यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
$A^T = ?$

$A^T / A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

★ Properties

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $|A^T| = |A|$

Ex:- $\left|\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|$

$ad - bc = ad - bc$

(3) $(A+B)^T = A^T + B^T$

Ex:- $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T$
$= A^T + A$
$= A + A^T$

$(KA)^T = K(A^T)$

$tr(A^T) = tr(A)$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

$(A^n)^T = (A^T)^n$

<u>L.H.S</u> $(A^n)^T$

$= (A.AA.\cdots.A)^T$

$= A^T.A^T.\cdots.A^T$

$= (A^T)^n$

★★ समित तथा विषम समित आव्यूह :-
(Symmetric and Skew Symmetric matrix)

समित :-

★ $A = A^T$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$

EX :- $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \end{vmatrix}$

विषमसममित आव्यूह :-

$A = -A^T$

अर्थात $a_{ij} = -a_{ji}$

विकर्ण अवयवो के लिए

$i = j$	$i \neq j$
$a_{ii} = -a_{ii}$	$a_{ij} = -a_{ji}$

$2a_{11} = 0$

$a_{ii} = 0$

विकर्ण आव्यूह शून्य होगें।

EX :- $A = \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix}$

$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$

Q. सिद्ध कीजिए AA^T एक सममित आव्यूह होगा

Ans $(AA^T)^T = (A^T)^T (A)^T$

$= AA^T$

hence sym.

$(-1)^{odd}\ A^{odd}$

$= -A^{odd}$

Q (iii) $A^{सम}$ सममित आव्यूह होगा।

Ans $(A^E)^T = (A \cdot A \cdot \ldots \text{Even time})^T$

$= A^T \cdot A^T \ldots A^T$

$= (-A)(-A) \ldots (-A)$

$= (-1)^E A^E$

$= A^E$

$(A^E)^T = (A^T)^E = (-A)^E = A$

Q 10 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & x \\ y & z & -3 \\ 4 & t & -7 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह हो x, y, z व t का मान ज्ञात कीजिए,

Ans $\begin{bmatrix} 5 & 2 & x \\ y & z & -3 \\ 4 & t & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & y & 4 \\ 2 & z & t \\ x & -3 & -7 \end{bmatrix}$

$y = 2 \quad z = z \quad t = -3$

$z \in R$

$x = 4$

★★ लंबकोणीय आव्यूह :- (orthogonal matrix)

⇒ एक वर्ग आव्यूह A को लंबकोणीय आव्यूह कहा जाता है यदि $\boxed{AA^T = I = A^TA}$

⇒ किसी भी लम्बकोणीय आव्यूह का सारणिक मान ±1 होता है।

$AA^T = I$

$|AA^T| = |I|$

$|A||A^T| = 1$

$|A||A| = 1$

$|A|^2 = 1$

$\boxed{|A| = \pm 1}$

★★ लंबकोणीय आव्यूह की तीन पंक्तियाँ परस्पर लम्बवत इकाई सदिशों के घटकों को निरूपित करती है।

→ A लंबकोणीय है

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

$\vec{V_1} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{V_2} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\vec{V_3} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

To Prove

$|\vec{V_1}| = |\vec{V_2}| = |\vec{V_3}| = 1$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_2} \cdot \vec{V_3} = \vec{V_3} \cdot \vec{V_1} = 0$

⇒ $AA^T = I$

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Compare

$a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$; $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0$

$b_1^2+b_2^2+b_3^2 = 1$; $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 = 0$

$c_1^2+c_2^2+c_3^2 = 1$; $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 = 0$

$|\vec{v_1}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = 1$ ✓

$|\vec{v_2}| = 1$ ✓

$|\vec{v_3}| = 1$ ✓

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0$ $\{\because a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0\}$

$\vec{v_2}\cdot\vec{v_3} = 0$ $\{\because b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0\}$

$\vec{v_3}\cdot\vec{v_1} = 0$ $\{\because c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0\}$

★ सहखण्डज आव्यूह :–

(Adjoint of a Matrix)

$\Rightarrow$ यदि किसी वर्ग आव्यूह के सभी अवयवों को उसके सहखण्डों से प्रतिस्थापित करके परिवृत्त लिया जाये तो इस प्रकार प्राप्त आव्यूह के लिये गये आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह कहलाता है।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

★ $\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$

Ex:- ① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$

(2×2) वाला

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}^T$

$\begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

*⇒ अदिश आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह भी अदिश आव्यूह होता है।

⇒ इकाई आव्यूह का सहखण्डज भी इकाई आव्यूह होग

⇒ त्रिभुजाकार आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह भी त्रिभुजाकार होता है।

★ Result :-

$$\boxed{A \cdot adj(A) = |A| I = adj(A) \cdot A}$$

Proof :-

$$A \cdot adj A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I$$

★★ Properties :-

① $|adj A| = |A|^{n-1}$

② $adj(adj A) = |A|^{n-2} A$

③ $|adj(adj A)| = |A|^{(n-1)^2}$

④ $adj(AB) = adj B \cdot adj A$

$adj(ABC) = (adj C)(adj B)(adj A)$

⑤ $adj(KA) = K^{n-1} adj(A)$, $K \in R$

⑥ $adj(A^T) = (adj A)^T$

* Proof :-

① $A \cdot adj(A) = |A| I$

$|A \cdot adj(A)| = ||A| I|$

$|A||adj A| = |A|^n |I|$

$|A||adj A| = |A|^n$

$|adj A| = |A|^{n-1}$

② $A(adj A) = |A| I$

Replacing A by $(adj A)$

$(adj A)(adj(adj A)) = |adj A| I$

$\times A$

$(A\, adj A)(adj(adj A)) = |adj A|(IA)$

$|A| I\, adj(adj A) = |A|^{n-1} A$ $\{AI = IA = A\}$

$adj(adj A) = |A|^{n-2} A$

③ $|adj(adj A)| = ||A|^{n-2} A|$

$= (|A|^{n-2})^n |A|$

$= |A|^{n^2-2n} |A|$

$= |A|^{n^2-2n+1}$

$\boxed{|adj(adj A)| = |A|^{(n-1)^2}}$

④ $adj(AB) = adj B \cdot adj A$

$\times AB$

$AB\, adj(AB) = AB\, adj B\, adj A$

$|AB| I = A(|B| I) adj A$

$|A||B| I = |B| (A\, adj A)$

$|A||B| I = |B||A| I$

Ex :- $\boxed{adj(A^n) = (adj A)^n}$

L.H.S

$= adj(AAA \cdots A)$

$= adj A \cdot adj A \cdots adj A$

$= (adj(A))^n$

⑤ $adj(KA) = K^{n-1}(adj A)$

$\times KA$

$K \cdot A \cdot adj(KA) = K \cdot K^{n-1} A \cdot (adj A)$

$|KA| I = K^n |A| I$

$K^n |A| I = K^n |A| I$

⑥ $adj(A^T) = (adj(A))^T$

$\times A^T$

$A^T \cdot adj(A^T) = A^T \cdot (adj A)^T$

$|A^T| I = (adj A\, A)^T$

$|A| I = (|A| I)^T$

$|A| I = |A| (I)^T$

$|A| I = |A| I$

Q ① $|A| = 3$ $|B| = 2$ यदि A तथा B की कोटि 3 है।
$|adj(A^2B)| = ?$

Ans $|adj B| \, |adj (A^2)|$

$= |B|^{n-1} \, |A^2|^{n-1}$

$= |B|^2 \, |A|^4$ $\{\because |A^n| = |A|^n\}$

$= (2)^2 (3)^4$

$= 4 \times 81$

$= 324$

As $A^T = A$ (given)

to Prove

$(adj A)^T = (adj A)$

$\times A^T$ $A^T . (adj A)^T = A^T . adj A$

$(adj A . A)^T = A (adj A)$

$|A| I \Leftarrow (|A| I)^T = |A| I$

or $(adj A)^T$
$= (adj A^T)$
$= \underline{adj A}$
$\underline{A.P.}$

★ आव्यूह का प्रतिलोम (Inverse of a Matrix) :-

⇒ दो वर्ग आव्यूह A तथा B एक दूसरे के प्रतिलोम आव्यूह कहलाते है यदि $\boxed{AB = I = BA}$

⇒ A के प्रतिलोम को A^{-1} से भी निरूपित किया जा

$\boxed{AA^{-1} = I = A^{-1}A}$

Q $AB = 5I$ तो निम्न ज्ञात करो
(i) A^{-1}
(ii) $(3A)^{-1}$

As (i) $A\left(\frac{B}{5}\right) = I$

$= \frac{AB}{5}$

$= \frac{5I}{5}$

$= I$ RHS hence $A^{-1} = B/5$

(ii) $3A\left(\frac{B}{15}\right) = I$

$= \frac{3 \times 5I}{15}$

$= I$

$(3A)^{-1} = \frac{B}{15}$

★★ किसी आव्यूह का प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करना :-

$A (adj A) = |A| I$

$A\left(\frac{adj A}{|A|}\right) = I$

$\boxed{A^{-1} = \frac{adj A}{|A|}}$

★ ① $|A| \neq 0$, व्युत्क्रमणीय /प्रतिलोमीय
② $|A| = 0$, अव्युत्क्रमणीय

Page 282

$\Rightarrow \quad AX = B$

$\otimes A^{-1}$

$X = A^{-1}B$ ★

$$\boxed{X = \frac{(\text{adj}A).B}{|A|}}$$

$\Rightarrow$ $|A|$

$|A| \neq 0$ — अद्वितीय हल (संगत निकाय)

$|A| = 0$

- $(\text{adj}A)B = 0$ — '∞' हल (संगत निकाय)
- $(\text{adj}A)B \neq 0$ — कोई हल नहीं (असंगत निकाय)

$\Rightarrow$ Pbm ① यदि $|A| = 0$, $(\text{adj}A)(B) \neq 0$ तो कोई हल नहीं है,

② $|A| = 0$, $(\text{adj}A)B = 0$ तो हल होगा। (अनन्त)

Q1. $2x + 3y = 5$

$x + y = 2$

Ans $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

for A^{-1}

$|A| = -1$

$AX = B$

$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\otimes A^{-1}$

$X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Page 283

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = 1$ & $y = 1$

★★ Rank of Matrix :-

$\Rightarrow$ यह अधिकतम क्रम को उपआव्यूह का क्रम है जिसका सारणिक मान अशून्य है। (only in BITSAT)

$\Rightarrow$ Ex:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$|A| \neq 0$

$R(A) = 3$

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R(A) \neq 3$

$R(A) \neq 2$

$R(A) = 1$

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|A|_{3\times3} = 0$, $R(A) \neq 3$

$|A|_{2\times2} = \left|\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right| \neq 0$

$R(A) = 2$

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R(A) = 0$

(only for Board)

★★ प्रारम्भिक रूपान्तरण से प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करना (finding Inverse by Elementary transformation)

प्र 1. प्रारम्भिक रूपान्तरण से A^{-1} ज्ञात कीजिए

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ans. $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 - R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 - R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

$$I = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

$$IA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ans :- $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$C_2 \to C_2 - C_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$C_1 \to C_1 - C_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A$$

$C_2 \to C_2 - C_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$