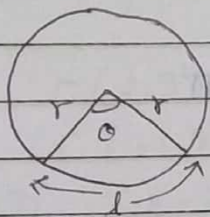


# ★ CIRCLE ★

## ★ Basic Geometry :-

1

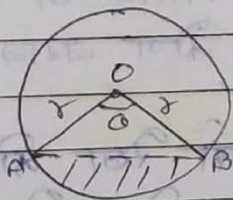


$$A = \pi r^2$$

$$P = 2\pi r$$

$$l = R\theta \quad (\theta = \text{Radian})$$

2



①  $\Delta OAB = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

② त्रिज्या खंड  $OABO = \frac{1}{2} r^2 \theta$  ( $\theta \rightarrow \text{radian}$ )

③ छायांकित भाग का क्षेत्र =  $\frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

3

अधिक लम्बाई की जीवा केन्द्र नजदीक होती है।

4

सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।

5

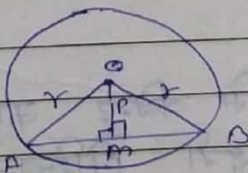
व्यास को वृत्त का अभिलम्ब भी कहा जाता है।

6

रूपरिती रेखा की केन्द्र से दुरी त्रिज्या के बराबर होती है।

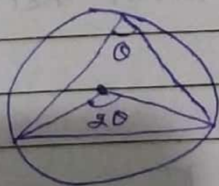
7

किसी भी जीवा पर केन्द्र से डाला गया अभिलम्ब इसे समद्विभाजित करता है।



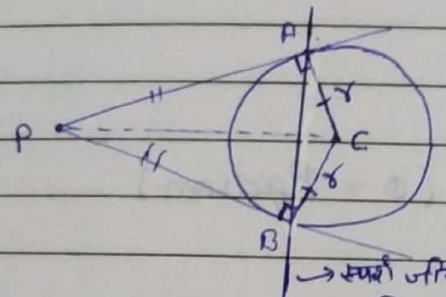
$$l_{AB} = 2\sqrt{r^2 - p^2}$$

8



कोई भी जीवा केन्द्र पर परिधि से दो गुना कोण आन्तरित करती है।

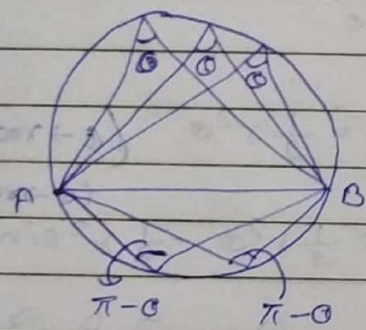
किसी बाहरी बिन्दु से अधिकतम दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं जिनकी लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।



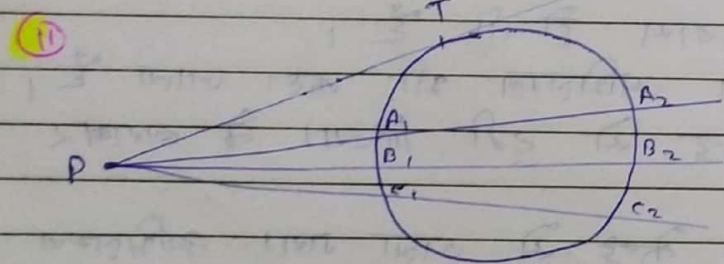
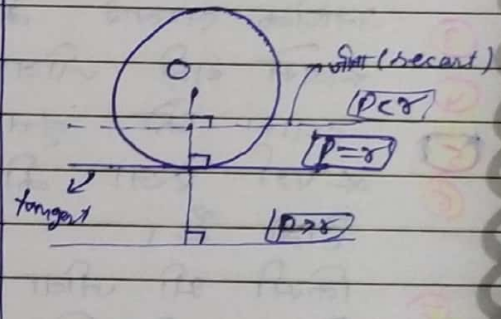
AB = स्पर्श जीवा

→ स्पर्श जीवा

जीवा के द्वारा वृत्त की परिधि के एक ही भाग में बनाये गये कोण बराबर होते हैं।



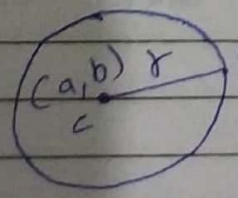
19) 2-स्पर्श रेखा की केन्द्र से दूरी लिज्या के समान होती है।



→  $PT^2 = PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2 = PC_1 \cdot PC_2$  -----

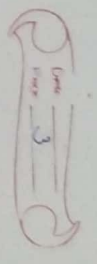
★ ★ वृत्त की परिभाषा :-

राष्ट्र एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जिसकी एक नियत बिन्दु से दूरी निश्चित रहती है। इस बिन्दु को केन्द्र तथा दूरी को लिज्या कहा जाता है।



$CP = r$   
 $\Rightarrow \sqrt{(h-a)^2 + (k-b)^2} = r$   
 $\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Note - 3rd term का सभी निरंतर के-ए (0,0) है तथा निरंतर '0' है  $\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$



$\Rightarrow$  स्तर का केन्द्रीय अक्ष  $C(a,b)$

निरंतर =  $r$

Q. 1.  $C(2,3)$   $r=4$   
 2.  $C(-1,3)$   $r=3$

Ans. (1)  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (4)^2$   
 (2)  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (3)^2$

★ ★ स्तर का व्यास सभी :-

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$   
 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow$  Comparison

$2g = -2a$	$2f = 2b$	$C = a^2 + b^2 - r$
$a = -g$	$b = -f$	$r^2 = a^2 + b^2 - c$
		$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Center  $\equiv (a,b)$   
 $\equiv (-g, -f)$

$\left( \begin{array}{l} \frac{-1}{2}x \text{ का स्तरिक, } \frac{-1}{2}y \text{ का स्तरिक} \end{array} \right)$

$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$g^2 + f^2 - c > 0$

Real Circle

$g^2 + f^2 - c = 0$

Point Circle

$g^2 + f^2 - c < 0$

Imaginary Circle

eg.  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$   
 $(3,2)$

Q 1.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$   
C(2, -3)

Ans.  $r = \sqrt{4+9+1}$   
 $= \sqrt{14}$

2.  $2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$

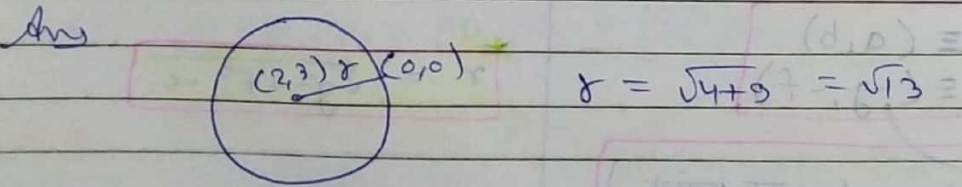
Ans.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$   
C(1, 1)

$r = \sqrt{1+1+7}$   
 $r = \sqrt{9} = 3$

★★ व्यापक द्विघात समी.  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  एक वृत्त को निरूपित करेगी यदि  
(i)  $x^2$  का गुणांक =  $y^2$  का गुणांक  
(ii)  $xy$  का गुणांक = 0

निम्न में वृत्त के समी. ज्ञात कीजिए -

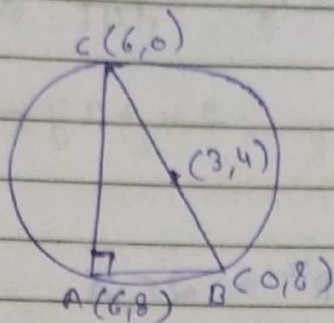
① केन्द्र (2, 3) तथा वृत्त (0, 0) से गुजरता है,



$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$

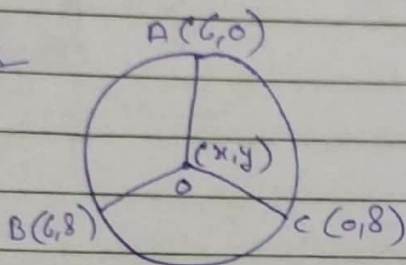
② वह वृत्त जो (6, 0), (0, 8) व (6, 8) से गुजरता है।

Ans m-1



$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (5)^2$$

m-2



$$OA^2 = OB^2 = OC^2$$

$$OA^2 = OB^2$$

$$(x-6)^2 + (y-0)^2 = (x-6)^2 + (y-8)^2$$

$$y^2 = y^2 + 64 - 16y$$

$$\boxed{y = 4}$$

$$OB^2 = OC^2$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = (x-0)^2 + (y-8)^2$$

$$x^2 + 36 - 12x = x^2$$

$$12x = 36$$

$$\boxed{x = 3}$$

$$(x, y) \Rightarrow (3, 4)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (5)^2$$

$$r = \sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= 5$$

Q.3 वृत्त का केन्द्र (1,1) है तथा ये रेखा  $3x + 4y + 18 = 0$  को स्पर्श करता है।

Ans



$$3x + 4y + 18 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (5)^2$$

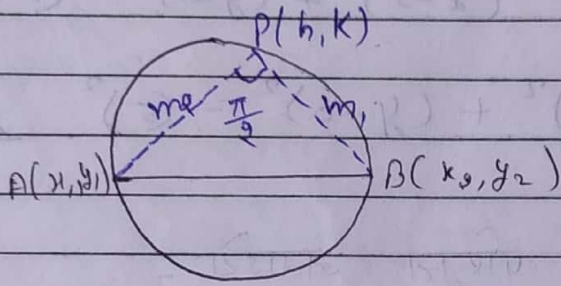
$$r = \frac{|3+4+18|}{5}$$

$$r = 5$$

★★ व्यास रूप में वृत्त का समी. :- (S-1)  
(Equation of circle in diametric form)

उस वृत्त का समी. ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के सिरे

$A(x_1, y_1)$  व  $B(x_2, y_2)$



$m_1 \cdot m_2 = -1$

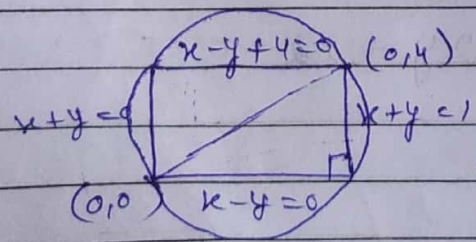
$\left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right) \times \left(\frac{k-y_2}{h-x_2}\right) = -1$

$(h-x_1)(h-x_2) + (k-y_1)(k-y_2) = 0$

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

निम्न चतु. का परिवृत्त बताइये।

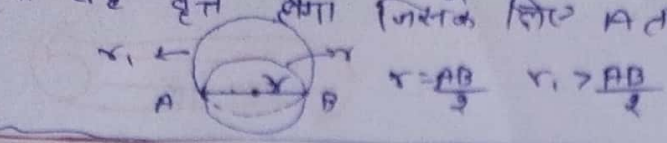
$x-y+4=0$      $x+y=0$      $x+y=1$      $x-y=0$



$(x-0)(x-0) + (y-0)(y-4) = 0$

★  $\Rightarrow$  व्यास रूप में वृत्त का समी. x तथा y में दो द्विघात में योग होता है। x-वर्ती द्विघात के मूल व्यास के सिरे के x-निर्देशांक होते हैं तथा

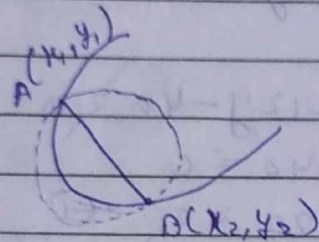
Ex: - दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरने वाली वृत्तों में से लघुतम वृत्त वह वृत्त होगा जिसके लिए A तथा B व्यास के सिरे हों।



y-वाली दिशात के मूल व्यास के सिरे के y निर्देशांक होते हैं, ए.ग.  $A(x_1, y_1)$   $B(x_2, y_2)$

यदि रेखा  $y = mx + c$ , वक्र  $y^2 = 4ax$  को A तथा B पर काटती है तो A, B को व्यास मानकर बनाये गये वृत्त का समीकरण लिखिए।

Ans



$$y^2 = 4ax \quad y = mx + c$$

$$\Rightarrow (mx + c)^2 = 4ax$$

$$m^2x^2 + x(2cm - 4a) + c^2 = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4a - 2cm}{m^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{c^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4a \left( \frac{y - c}{m} \right)$$

$$y^2 m - 4ay + 4ac = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right.$$

$$y_1 + y_2 = \frac{4a}{m} \quad y_1 y_2 = \frac{4ac}{m}$$

$\Rightarrow$  Circle

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 + y^2 - y(y_1 + y_2) + y_1 y_2 = 0$$

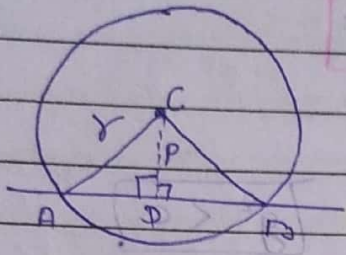
$$x^2 - x \left( \frac{4a - 2cm}{m^2} \right) + \left( \frac{c^2}{m^2} \right) + y^2 - y \left( \frac{4a}{m} \right) + 4 \left( \frac{ac}{m} \right) = 0$$

$$\frac{m-2}{m-2} \quad x^2 + x \left( \frac{2cm - 4a}{m^2} \right) + \frac{c^2}{m^2} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$y^2 + \frac{4ay}{m} + \frac{4ac}{m} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{(1) + (2)}$$

★★ वृत्त पर रेखा द्वारा काटे गये अन्तखण्ड की लम्बाई :-



$$l_{AB} = 2\sqrt{r^2 - p^2}$$

Q.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  (वृत्त)  
 $3x - 4y + 6 = 0$  (जीवा रेखा की समीकरण बताओ)

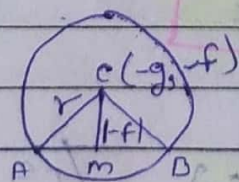
Ans.  $r = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4}$   $c(1,1)$   
 $r = 2$

$l_{AB} = 2\sqrt{r^2 - p^2}$   
 $= 2\sqrt{4 - 1}$   $p = 1$   
 $= 2\sqrt{3}$  Ans

★★ वृत्त के द्वारा x-अक्ष पर काटे गये अन्तखण्ड की लम्बाई (Length of X-Intercept)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$   
 X-Intercept

m=1

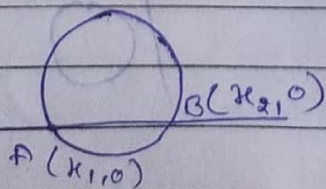


$$l_{AB} = 2\sqrt{r^2 - (cm)^2}$$

$$= 2\sqrt{g^2 + f^2 - c - f^2} \quad (\because r^2 = g^2 + f^2 - c)$$

$$X.I. = 2\sqrt{g^2 - c}$$

m=0



जब वृत्त x-अक्ष को काटता है तो  
 $y = 0$   
 $x^2 + 2gx + c = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right.$



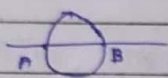
$$l_{AB} = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$l_{AB} = \frac{\sqrt{4g^2 - 4c}}{1} = 2\sqrt{g^2 - c}$$

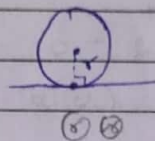
⇒ Y-Intercept ⇒

Case-1

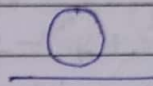
$$g^2 > c$$



$$g^2 = c$$

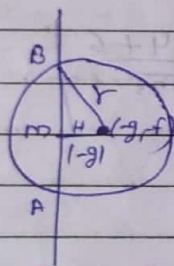


$$g^2 < c$$



⇒ Y-Intercept:

m=1



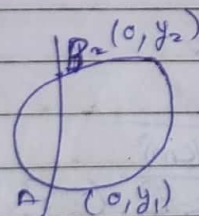
$$l_{AB} = 2\sqrt{r^2 - (cm)^2} = 2\sqrt{g^2 + f^2 - c - g^2}$$

$$Y.I. \quad l_{AB} = 2\sqrt{f^2 - c}$$

m=2

जब वृत्त y-अक्ष को छूता है तो  $x=0$

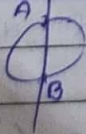
$$y^2 + 2fy + c = 0$$



$$l_{AB} = |y_2 - y_1| = \frac{\sqrt{D}}{a} = \frac{\sqrt{4f^2 - 4c}}{1}$$

$$l_{AB} = 2\sqrt{f^2 - c}$$

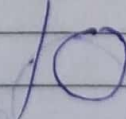
$$f^2 > c$$



$$f^2 = c$$

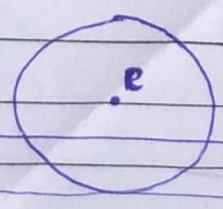


$$f^2 < c$$



~~★★~~ एक रेखा एक वृत्त

m=1



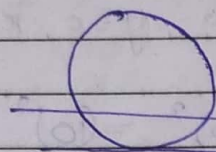
$P < r$

$P = r$

$P > r$

(Co.T)  $\uparrow$   
 (Condition of tangency / स्पर्श करने का प्रतिबन्ध)

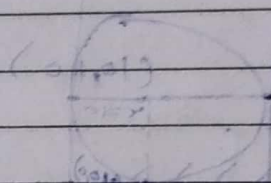
m-2 वृत्त व रेखा से बिघाट कर  $D$  ज्ञात करेंगे,



$D > 0$  (Secant)

$D = 0$  (C.O.T)

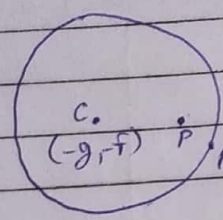
$D < 0$



★ बिन्दु की वृत्त के सापेक्ष स्थिति :-

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$



CP > r  
<  
=

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2} > \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$$

- ★  $S_1 > 0$  Outside
- $S_1 = 0$  On
- $S_1 < 0$  Inside

Note:  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  के बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  पर उपरोक्त रेखा का समीकरण:

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow x \cdot x, \\ y^2 &\rightarrow y \cdot y, \\ 2xy &\rightarrow xy + yx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &\rightarrow x + x, \\ 2y &\rightarrow y + y, \\ c &\rightarrow c \end{aligned}$$

Q1  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

$$S = x^2 + y^2 - 4x + 3$$

$$S_1 = x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 + 3$$

$$T = xx_1 + yy_1 - 2(x+x_1) + 3$$

Q2  $y^2 = 7x + 3$

$$S = y^2 - 7x - 3$$

$$S_1 = y_1^2 - 7x_1 - 3$$

$$T = y \cdot y_1 - 7\left(\frac{x+x_1}{2}\right) - 3$$

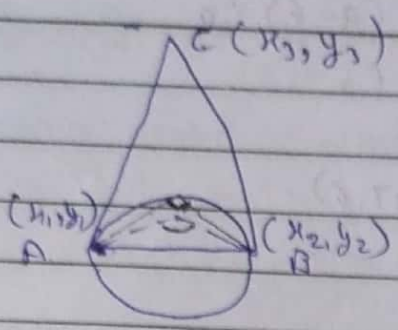
Q3  $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$S = 9x^2 + 16y^2 - 144$$

$$S_1 = 9x_1^2 + 16y_1^2 - 144$$

$$T = 9(x \cdot x_1) + 16(y \cdot y_1) - 144$$

Ans

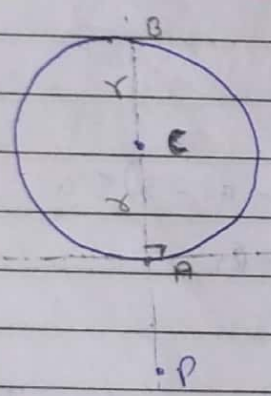


$$S = (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$$S_1 > 0$$

$$(x_3-x_1)(x_3-x_2) + (y_3-y_1)(y_3-y_2) > 0$$

★ ★ Maximum & Minimum distance of a Point from a circle (एक बिन्दु की दूर से अधिकतम व न्यूनतम दुरी) :-

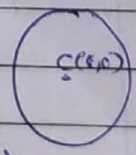


Maximum distance =  $|CP + r|$

Minimum distance =  $|CP - r|$

Q.  $x^2 + y^2 = 100$

$P(2, 3)$



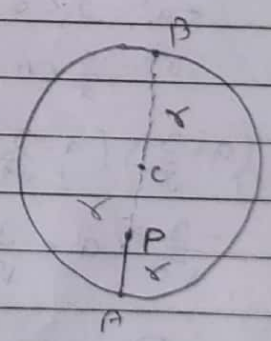
$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{0 + 0 - (-100)}$$

$$r = 10$$

$$CP = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Maximum distance =  $|\sqrt{13} + 10|$

Minimum distance =  $|\sqrt{13} - 10|$

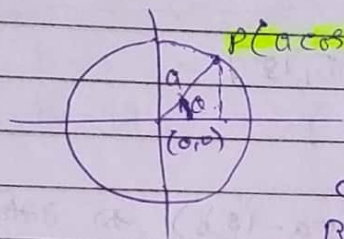


Minimum distance =  $|CP - r|$

Maximum distance =  $|CP + r|$

\*A वृत्त का प्राचलिक नियंत्रांक तथा समीकरण :-

①  $x^2 + y^2 = a^2$

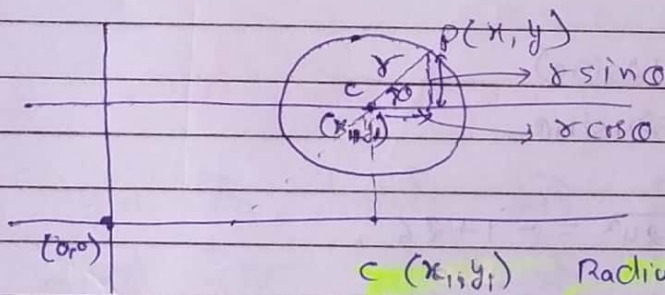


$x = a \cos \theta$   
 $y = a \sin \theta$

$P(a \cos \theta, a \sin \theta)$

$C(0,0)$   
Radius =  $a$

\*②  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



$x = x_1 + r \cos \theta$

$y = y_1 + r \sin \theta$

$\therefore P(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta)$

Ex:-  $x^2 + y^2 = 16$

$C(0,0)$   
 $x = 4 \cos \theta$   
 $y = 4 \sin \theta$

Ex:-  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  (1)

$x = x_1 + r \cos \theta = 1 + 2 \cos \theta$   
 $y = y_1 + r \sin \theta = 1 + 2 \sin \theta$

Ex:-  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$x = -g + \sqrt{g^2 + f^2 - c} \cos \theta$

$y = -f + \sqrt{g^2 + f^2 - c} \sin \theta$



eg.  $x^2 + y^2 = a^2$   
 $S = x^2 + y^2 - a^2$   
 $S_1 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$   
 $T = xx_1 + yy_1 - a^2$

$h = 5 + 13 \cos \theta - 13 \sin \theta$  - (1)

$k = 12 + 13 \sin \theta + 13 \cos \theta$  - (2)

(b) ~~वृत्त~~

$h - 5 = 13(\cos \theta - \sin \theta)$  - (1)

$k - 12 = 13(\sin \theta + \cos \theta)$  - (2)

$(1)^2 + (2)^2$

$(h-5)^2 + (k-12)^2 = 13^2(1+1-0)$

$P = 0 \sin \theta + 0 \cos \theta$

☆☆ स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब :-

① → वृत्त के किसी भी बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  पर स्पर्श रेखा का समी.  $T=0$  होता है।  
 (बिन्दु रूप)

EX:- ①  $x^2 + y^2 = a^2$

Ans  $T = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = a^2$

$P(x_1, y_1)$

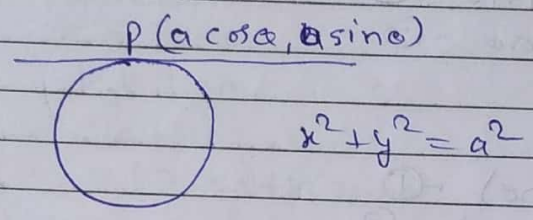
②  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$T = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$

③  $x^2 + y^2 - x - 2y + 3 = 0$

$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - \left(\frac{x+x_1}{2}\right) - (y+y_1) + 3 = 0$  (T.O.)

2. प्राचलिक रूप में स्पर्श रेखा  $\Rightarrow$



$x_1 x + y_1 y = a^2$

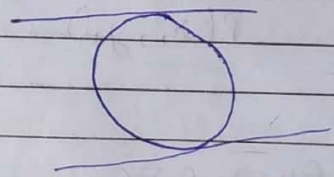
$x(a \cos \alpha) + y(a \sin \alpha) = a^2$

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$

3. प्रवर्तित रूप :-

$x^2 + y^2 = a^2$

प्रवर्तित = m



माना स्पर्श रेखा

$y = mx + c$

$x^2 + y^2 = a^2$   
 $y = mx + c$   
 $x^2 + m^2 x^2 + c^2 + 2mxc = a^2$   
 $x^2(1+m^2) + (2mc)x + c^2 - a^2 = 0$

C.O.T.  $\Rightarrow P=r \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = a$   
 $c^2 = a^2(1+m^2)$   
 $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Delta = 0$   
 $4m^2 c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) = 0$   
 $4m^2 c^2 - 4c^2 + 4a^2 - 4m^2 c^2 + 4m^2 a^2 = 0$   
 $c^2 = a^2 + m^2 a^2$   
 $c^2 = a^2(1+m^2)$   
 $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

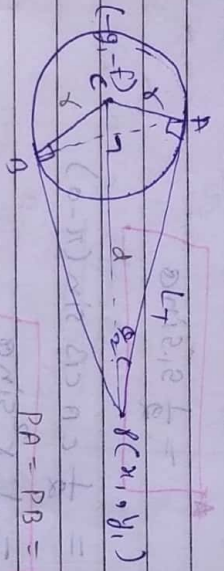
$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$



**AA**  $x^2 + y^2 = r^2$  (New Book)

(Length of tangent)

$P(x_1, y_1)$



$\Delta PAC$   $\Rightarrow$

$PA^2 + AC^2 = CP^2$

$AC = r$   $CP = d$

$(L_T)^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$

$(L_T)^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

$L_T = \sqrt{S_1}$

$\tan \theta = \frac{r}{\sqrt{S_1}}$

$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$

$\Delta PAC = \Delta PBC = \frac{1}{2} (CA)(CB)$

4. चतुर्भुज (PACB) का क्षेत्र.  $= r \cdot \sqrt{s_1}$

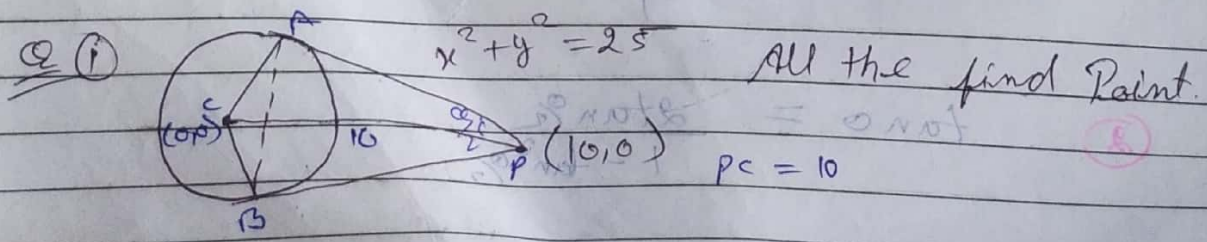
5.  $\Delta PAB$  का क्षेत्र.  $= \frac{1}{2} (PA \cdot PB) \sin \theta$   
 $= \frac{1}{2} (\sqrt{s_1}) (\sqrt{s_1}) \sin \theta$   
 $= \frac{1}{2} s_1 \sin \theta$

6.  $\Delta CAB = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin(\pi - \theta)$   
 $= \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

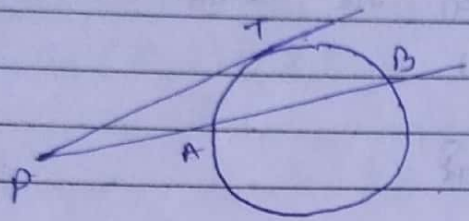
7.  $AB = 2\sqrt{s_1} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$  |  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{AB/2}{\sqrt{s_1}}$   
 $AB = 2\sqrt{s_1} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$

8.  $\Delta PAC$ ,  $\Delta PBC$  तथा चतु. PACB का परिवृत्त एक ही होता है तथा यह CP को व्यास मानकर खींचा जाता है।

$(x+g)(x-x_1) + (y+f)(y-y_1) = 0$

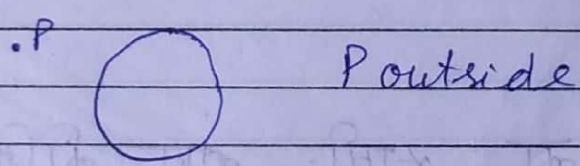


# ★★ बिन्दु शक्ति (Power of a Point) :-

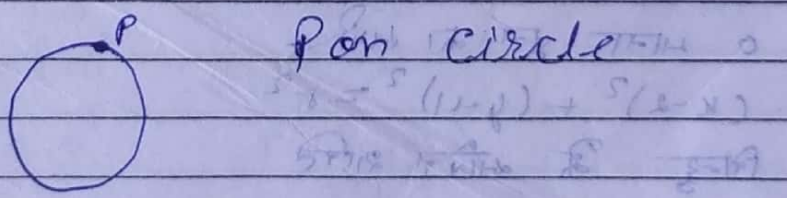


बिन्दु P की शक्ति =  $PA \cdot PB$   
 $= PT^2$   
 $= (\sqrt{s_1})^2 = s_1$

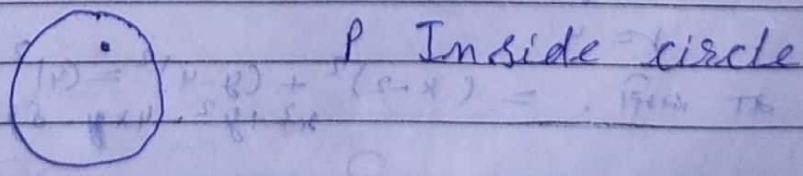
Case 1:-  $s_1 > 0$



Case 2:-  $s_1 = 0$



Case 3:-  $s_1 < 0$



Ans  $P(2,5)$

$\Rightarrow g_1 < 0$

$4 + 25 - 16 - 60 + c < 0$

$c < 47$  (i)

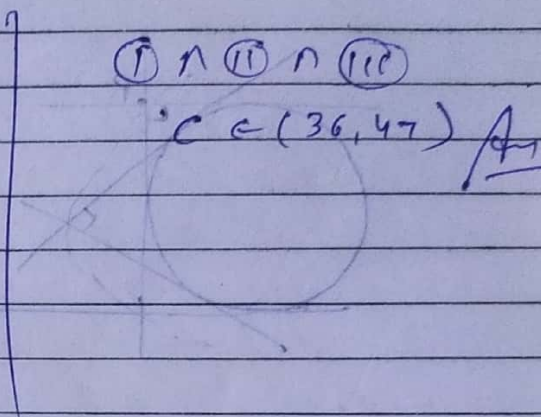
$\Rightarrow g^2 < c \Rightarrow f^2 < c$

$16 < c$

$36 < c$

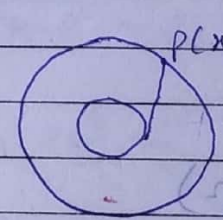
$c > 16$  (ii)

$c > 36$  (iii)



Q. वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + z = 0$  के किसी भी बिन्दु से वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + z = 0$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं। तो सिद्ध कीजिए इनकी लम्बाई  $\sqrt{z - r}$  होगी। (New Book)

Ans m-I



$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + z}$

यहाँ जहाँ बिन्दु वृत्त पर भी स्थित है।

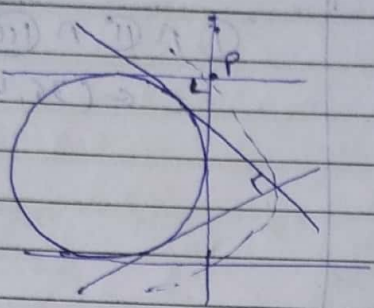
$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + z}$

लंब (OQ) के  $= \sqrt{-z + r}$   
 $= \sqrt{z - r}$

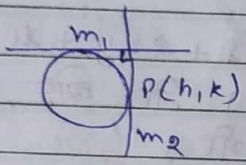
★★ नियामक वृत्त :-  
(Director - circle)

$\rightarrow$  यह वृत्त पर खींची गयी लम्बवत स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिन्दुओं का बिन्दुपथ है।

$(OR) = r + x$



m-I  $x^2 + y^2 = a^2$



$$y = mx + a\sqrt{1+m^2}$$

$P(h, k)$

$$k = mh + a\sqrt{1+m^2}$$

$$(k - mh)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$m^2(h^2 - a^2) - 2mkh + k^2 - a^2 = 0 \quad \left\langle \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right.$$

for D.C.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\frac{k^2 - a^2}{h^2 - a^2} = -1$$

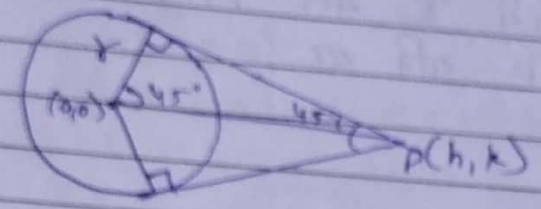
∴ हिसाब से  
(Chord of Contact)

$$k^2 - a^2 = -h^2 + a^2$$

$$x^2 + y^2 = 2a^2$$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2}a)^2$$

m=2  
 $x^2 + y^2 = r^2$



$\cos 45^\circ = \frac{r}{CP}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r}{CP}$

$CP = \sqrt{2}r$

$x^2 + y^2 = (\sqrt{2}r)^2$

$\sqrt{(h-0)^2 + (k-0)^2} = \sqrt{2}r$

$x^2 + y^2 = 2r^2$

- 1. वृत्त का नियामक वृत्त एक वृत्त ही होता है,
- 2. यह द्वितीय वृत्त के संकेन्द्रिय होता है।
- 3. इसकी त्रिज्या वृत्त की त्रिज्या की  $\sqrt{2}$  गुना होती है।

EX: -  $x^2 + y^2 = 10$   $r = \sqrt{10}$   
 $x^2 + y^2 = (\sqrt{10} \times \sqrt{2})^2$

EX: -  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$   
 c(1,-1)  $r=2$   
 $OC = (x-1)^2 + (y+1)^2 = (2\sqrt{2})^2$

★ जीवा की लम्बाई :-  
 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$L_{AB} = 2\sqrt{r^2 - p^2}$$

$$L_{AB} = 2\sqrt{(g^2 + f^2 - c) - (x_1 + g)^2 - (y_1 + f)^2}$$

$$L_{AB} = 2\sqrt{-(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)}$$

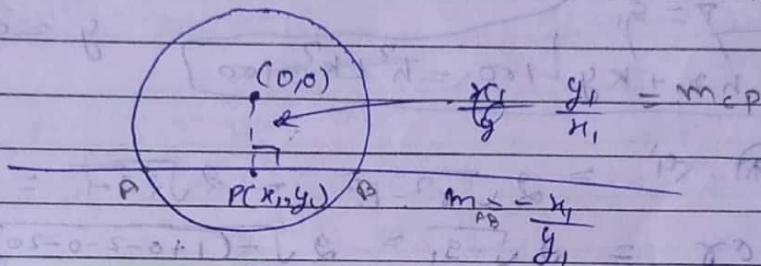
$$L_{AB} = 2\sqrt{-S_1}$$

विन्दु P वृत्त के अन्दर है :-  
 $S_1$  भी -ve आया। अतः  $\sqrt{+ve}$

★ जीवा का समी. जिसका मध्य बिन्दु दिया गया है :-

$$x^2 + y^2 = a^2$$

P(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) ⇒ जीवा का मध्य बिन्दु



⇒ जीवा का समी. =

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - a^2 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$$

$$T = S_1$$

⇒ जीवा की लम्बाई =  $2\sqrt{r^2 - p^2}$

वृत्त  $x^2 + y^2 = 100$ , जिसका मध्य बिन्दु

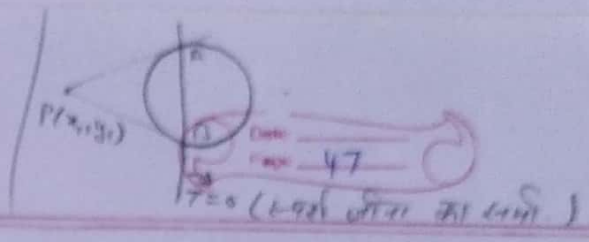
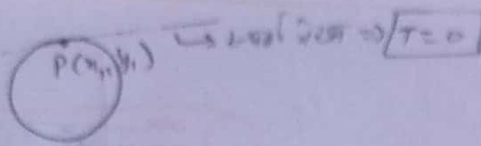
(2, 1) है।

$$\text{Ans } T = S_1 \Rightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - 100 = x_1^2 + y_1^2 - 100$$

$$\Rightarrow 2x + y = 5$$

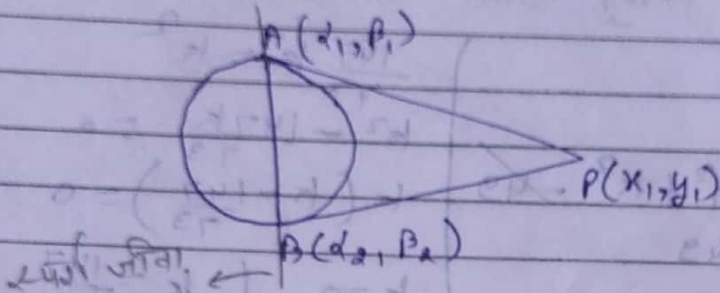
$$\text{जिहवा की लम्बाई} = 2\sqrt{r^2 - p^2} = 2\sqrt{100 - 5^2}$$

$$\text{Ans-2 जीवा की लं.} = 2\sqrt{-S_1} = 2\sqrt{-(4+1-100)} = 2\sqrt{100-51} = 2\sqrt{49}$$



★★ स्पर्श जीवा का समीकरण :-

$$x^2 + y^2 = a^2$$



A (x1, y1) पर स्पर्श रेखा

B (x2, y2) पर स्पर्श रेखा

$$T=0$$

$$x_1 x + y_1 y = a^2$$

$$x_2 x + y_2 y = a^2$$

P (x1, y1) से गुजरती है।

$$x_1 x_1 + y_1 y_1 = a^2 \quad \text{--- (1)}$$

P (x1, y1) से गुजरती है।

$$x_2 x_1 + y_2 y_1 = a^2 \quad \text{--- (2)}$$

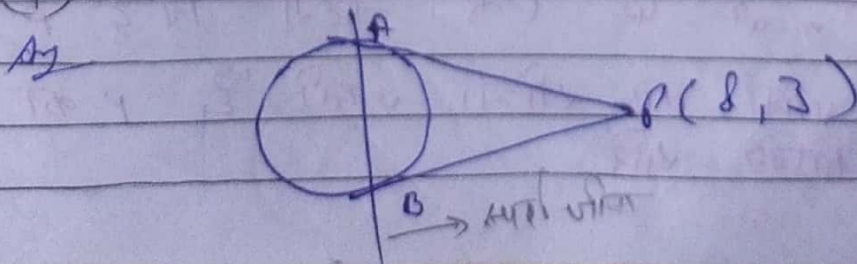
अतः AB का समीकरण :-

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = a^2$$

⇒ स्पर्श जीवा का समीकरण :-  $T=0$  बिन्दु (x, y) के सापेक्ष

बिन्दु P (8, 3) से दाल  $x^2 + y^2 = 49$  से स्पर्श रेखाएँ खींची गई जो इसे A व B पर मिलती हैं। (Newspaper)

(i) AB का समीकरण लिखो।





p के कोषित स्पर्श जवा

$$T=0$$

$$2x + (10 - 2y)y = 1$$

$$2x - 2dy + 10y - 1 = 0$$

$$L_1 + \lambda L_2 = 0 \quad (10y - 1) + \lambda(x - 2y) = 0 \rightarrow \text{रेखा निकाय (family of lines)}$$

$$10y - 1 = 0$$

$$x - 2y = 0$$

$$y = \frac{1}{10}$$

$$x = 2y$$

$$x = \frac{1}{5}$$

(1/5, 1/10) Ans.

# family of circle :-

(वृत्त निकाय)

Type 1:- दो वृत्तों  $S_1 = 0$  तथा  $S_2 = 0$  के प्रतिच्छेदी बिन्दुओं से गुजरने वाला वृत्त निकाय  $S_1 + \lambda S_2 = 0$  द्वारा दिया जाता है।

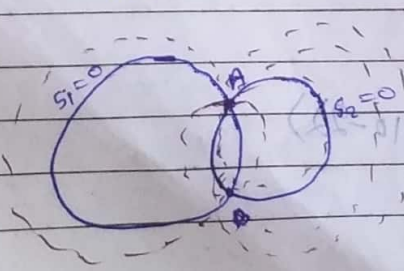
जहाँ  $\lambda$  दी गई अन्य जानकारी से प्राप्त हो जायगा।

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

$$S_1 + \lambda S_2 = 0$$

$$\lambda \neq -1$$



→ इस वृत्त निकाय के प्रत्येक वृत्त किसी बिन्दु A व B संतुष्ट करेंगे।

(जहाँ A व B,  $S_1$  व  $S_2$  के प्रतिच्छेदी बिन्दु हैं)

(x) यह x-अक्ष को स्पर्श करता है,  $g^2 = c$

Ans  $g^2 = c \Rightarrow \frac{4(1-2)^2}{(1+2)^2} = \frac{-(3+12\lambda)}{(1+2)}$

$4+4\lambda^2-8\lambda = -3-3\lambda-12\lambda-12\lambda^2$

$16\lambda^2 + 12\lambda + 7 = 0$

$D < 0$

$\therefore \lambda \in \emptyset$

(xi) यह y-अक्ष को स्पर्श करता है,  $f^2 = c$

Ans  $f^2 = c \Rightarrow \frac{9(2-1)^2}{(1+2)^2} = \frac{-(3+12\lambda)}{(1+2)}$

$9\lambda^2 + 9 - 18\lambda = -3 - 3\lambda - 12\lambda - 12\lambda^2$

$21\lambda^2 - 3\lambda + 12 = 0$

$D < 0$

$\therefore \lambda \in \emptyset$

Type 2:-

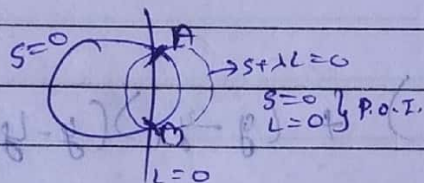
एक वृत्त  $S=0$  व एक रेखा  $L=0$  के परिच्छेदी बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त निकाय का समीकरण  $S + \lambda L = 0$  होता है।

जहाँ  $\lambda$  अज्ञात है जिसे ज्ञात करने के लिए अतिरिक्त जानकारी दी जाती है।

★ Type 2 का विलोम :-  
(Convex of type-2)

→ यदि  $S + \lambda L = 0$  एक चर वृत्त है तो यह हमेशा दो निश्चित बिन्दुओं से गुजरता है या वे बिन्दु वृत्त  $S=0$  व रेखा  $L=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दु होंगे।

$S + \lambda L = 0 \quad S = 0 \quad L = 0$



Q 1.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - (22 + 16) = 0$

एक बिन्दु कोजित चर वृत्त से गुजरता है।  
निश्चित बिन्दुओं से गुजरता है।  
ज्ञात कोजित।

Ans.  $(x^2 + y^2 - 16) + \lambda(x + y - 2) = 0$   
 $S + \lambda L = 0$

S:  $x^2 + y^2 - 16 = 0$

L:  $x + y - 2 = 0$

$x^2 + (2-x)^2 - 16 = 0$

$2x^2 - 4x + 12 = 0$

$x^2 - 2x - 6 = 0$

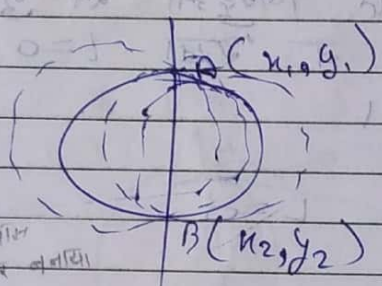
$x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{7}$

A(1+√7, ...) B(1-√7, ...)

★ Type 3 (Special case of Thm 2) :- ★

→ उस वृत्त निकाल का समी. जो दो स्थिर बिंदुओं  $A(x_1, y_1)$  व  $B(x_2, y_2)$  से गुजरता है।



A व B को ध्यान में रखते हुए मानकर बनाया गया वृत्त

$$S: (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$$L: y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} (x-x_1)$$

$$S + \lambda L = 0$$

$$\left. \begin{aligned} S &= 0 \\ L &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S + \lambda L = 0$$

Ex // उस वृत्त निकाल का समी. लिखो जो दो बिंदुओं  $A(1,1)$  तथा  $B(2,2)$  से गुजरता है। वृत्त=? रेखा=?

$$Ans: S: (x-1)(x-2) + (y-1)(y-2) = 0$$

$$L: y-1 = \frac{2-1}{2-1} (x-1) \Rightarrow y-1 = x-1 \Rightarrow y=x$$

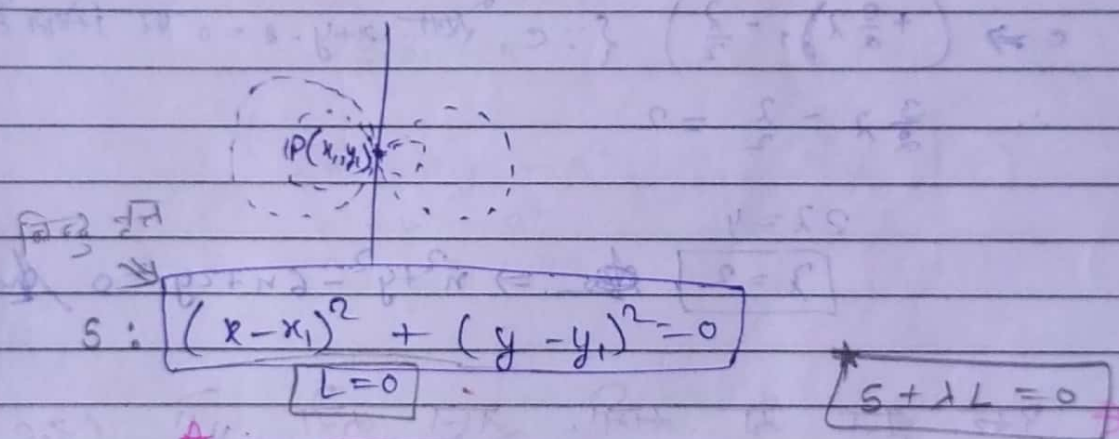
(वृत्त) (रेखा)  $y=x$

$$S + \lambda L = 0$$

$$(x+1)(x-2) + (y+1)(y-2) + \lambda(x-y) = 0$$

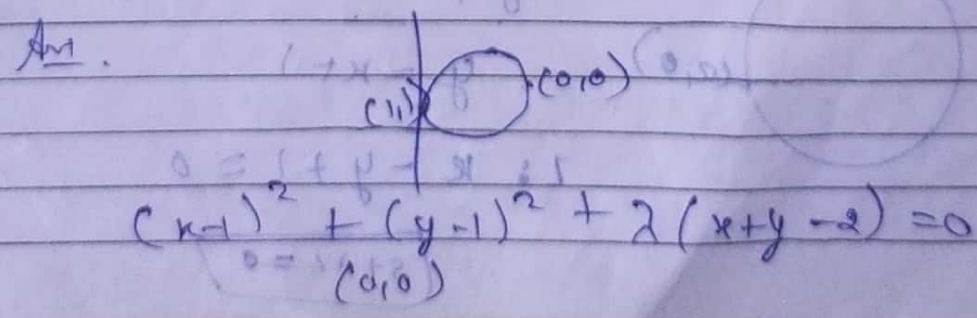
★★ Type 4 :-

→ उस वृत्त निकाल का समी. जो रेखा  $L=0$  को बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  पर स्पर्श करता है।



$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + \lambda L = 0$$

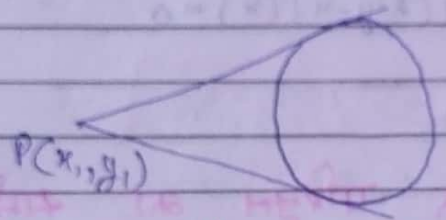
→ उस वृत्त का समी. ज्ञात करो जो रेखा  $x+y=2$  को  $(1,1)$  पर स्पर्श करता है तथा  $(1,1)$  मूल बिन्दु से गुजरता है।



$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x-y+1) = 0$$

$(2,0) \Rightarrow 1+4 + \lambda(2+1) = 0 \Rightarrow \lambda = -5/3 \Rightarrow \therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 + (-5/3)(x-y+1) = 0$

★★ बाहरी बिन्दु से खींचे गये स्पर्श रेखा का समीकरण :-



$$S \cdot S_1 = T^2$$

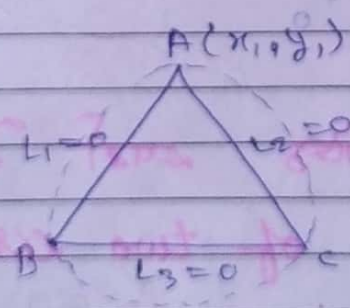
$$T : xx_1 + yy_1 - a^2$$

$$S : x^2 + y^2 - a^2$$

$$S_1 = x_1^2 + y_1^2 - a^2$$

Note :-

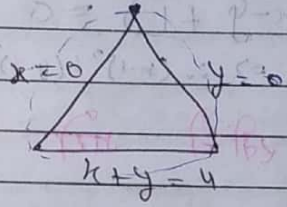
① त्रिभुज का परिवृत्त खाल करना :-



$$L_1 L_2 + \lambda L_2 L_3 + \mu L_3 L_1 = 0$$

- (a)  $x^2$  का गुणांक =  $y^2$  का गुणांक
- (b)  $ky$  का गुणांक = 0

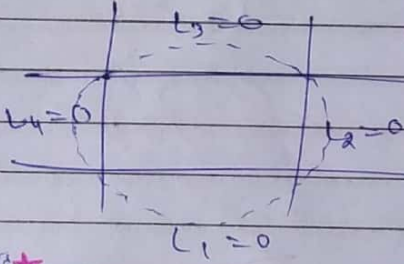
EX:-



ब परिवृत का समीकरण क्या है ?

Ans.  $(x)(y) + 2(y)(x+y-4) + 4(x+y-4)(x) = 0$

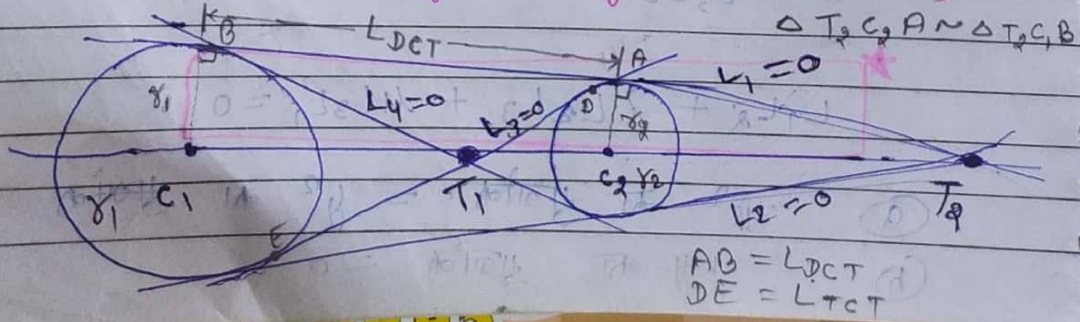
क) चक्रीय चतुर्भुज के परिवृत का समीकरण :-



$L_1 L_3 + 2 L_2 L_4 = 0$

- (a)  $x^2$  का गुणांक =  $y^2$  का गुणांक
- (b)  $xy$  का गुणांक = 0

★ दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा :-  
(Common tangent of two circle)



$AB = L_{DCT}$   
 $DE = L_{TCT}$

(क) सीधी स्पर्श रेखाएँ (Direct Common tangent)  
(or बाह्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा)

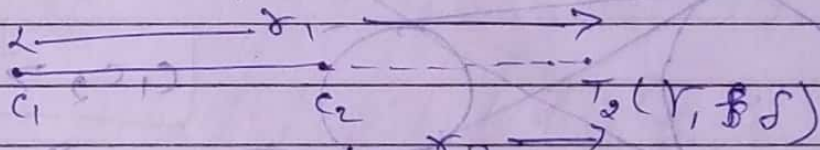
(1) राधा  $L_1 = 0$  तथा  $L_2 = 0$  सीधी उभयनिष्ठ

स्पर्श रेखाएँ हैं। (DCT)

\*  $\Rightarrow$  दोनों केन्द्र DCT के सापेक्ष एक तरफ स्थित होते हैं।

(2) इनका प्रतिच्छेदी बिन्दु  $T_2$  है।

\* (3)  $T_2$ ,  $C_1$  तथा  $C_2$  को मिलाने वाले रेखाखण्ड को  $r_1 : r_2$  में बाह्य रूप में विभाजित करता है।



$\Rightarrow$  (यदि  $r_1 = r_2$  होता है तो DCT केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा के समानर होती)

(4) लम्बाई (Length of DCT) :-

$$L_{DCT} = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} \quad | \quad d = C_1 C_2$$

दोनों केन्द्रों के बीच की दूरी

(5) अनुप्रस्थ या अनुक्रम उभयनिष्ठ स्पर्श

रेखाएँ (Transverse Common tangent)  
(TCT) :- (or अन्तः उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा)

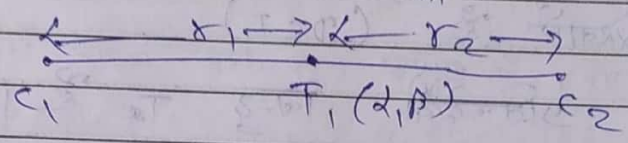
(1)  $L_3 = 0$  तथा  $L_4 = 0$  TCT है।

(2) इनका प्रतिच्छेदी बिन्दु  $T_1$  है।

\*  $\Rightarrow$  दोनों केन्द्र TCT के विपरीत तरफ होते हैं।

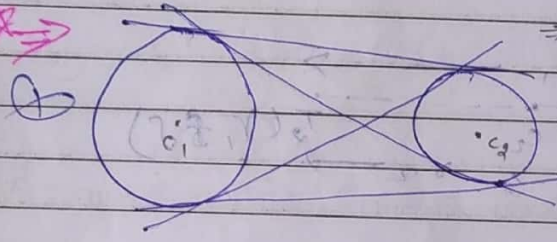


1)  $T_1, C_1$  तथा  $C_2$  को मिलाने वाले रेखाखंड को  $r_1 = r_2$  में बाँटा है।  
अन्तःक्षेप



2)  $L_{TCT} = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$

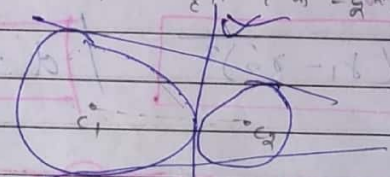
3) यदि दोनो वृत्त अलग-अलग है :-



$C_1 C_2 > r_1 + r_2$

$DCT = 2$   
 $TCT = 0$

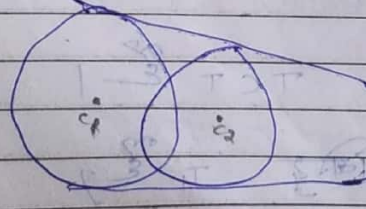
4) यदि दोनो वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।



$C_1 C_2 = r_1 + r_2$

$DCT = 2$   
 $TCT = 1$

5) यदि दोनो वृत्त एक-दूसरे को दो भिन्न बिन्दुओं पर काटते हैं।

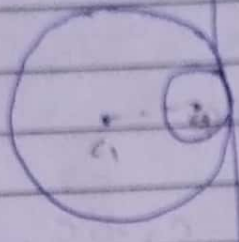


$|r_1 - r_2| < C_1 C_2 < r_1 + r_2$

$DCT = 2$   
 $TCT = 0$

एक वृत्त दूसरे वृत्त को स्पर्श करता है :-

(4)



$$|r_1 - r_2| = C_1 C_2$$

$$DCT = 1$$

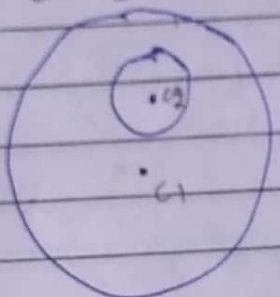
$$TCT = 0$$

\* जब दो वृत्तों के केन्द्र एक ही तर्क हो जो कि स्पर्श रेखा एक होती है और विपरित होंगे कि TCT होती है।

(5)

एक वृत्त दूसरे वृत्त

के अन्दर समाहित है :-



$$|r_1 - r_2| > C_1 C_2 \Rightarrow d < |r_1 - r_2|$$

$$DCT = 0$$

$$TCT = 0$$

Q 1.  $x^2 + y^2 + 4x + 4y = 0$   
 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

निम्न वृत्तों की जितनी अभ्यास रेखाएँ होंगी, उनकी लम्बाइयाँ भी ज्ञात कीजिए।

Ans  $C_1 (-2, -2) \quad r_1 = 2\sqrt{2}$   
 $C_2 (1, 1) \quad r_2 = \sqrt{2}$

$$(\sqrt{1-3})^2 + (1-3)^2 = \sqrt{8} = d = 3\sqrt{2} = C_1 C_2$$

$$C_1 C_2 = r_1 + r_2$$



$$DCT = 2 \quad (L = 4)$$

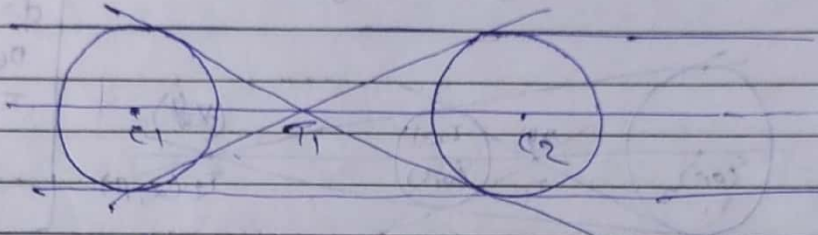
$$TCT = 1 \quad (L = 0)$$

$$L = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{18 - (\sqrt{2})^2} = 4$$

$$L = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{18 - 18} = 0$$

Note :-

(1) यदि  $r_1 = r_2$  हो जाये :-



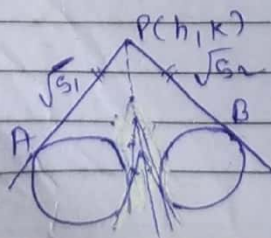
~~यहाँ~~ यहाँ  $T$  अन्नत पर प्राप्त होगा।  
अतः यहाँ  $DC$  सात करने को लविका।

Step:-

- (1)  $m_{DC} = m$  सात करेंगे।
- (2) यहाँ  $DC$   $C_1$  की मिलान वाली रेखा के समान्तर ही होगी। अतः उनका समी  $y = mx + c$
- (3)  $c$  सात करने के लिए  $\cos$  इकाई किसी भी वृत्त के साथ  $COA$  लगाए।

★★ मूलका (Radical axis) :- (R.A)

→ यह एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जिससे दो वृत्तों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होंगी।



00 दो वृत्तों की मूलका एक ऐसे बिन्दु P का बिन्दुपथ है जिसकी दोनों वृत्तों के सापेक्ष शक्ति समान है।

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

$$\begin{cases} PA = PB \\ \sqrt{S_1} = \sqrt{S_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_1} = \sqrt{S_2} \quad (\text{Power of } P)_{S_1} = \text{Power of } P)_{S_2}$$

$$\star S_1 - S_2 = 0$$

$$(h^2 + k^2 + 2g_1h + 2f_1k + c_1) - (h^2 + k^2 + 2g_2h + 2f_2k + c_2) = 0$$

$$\Rightarrow 2h(g_1 - g_2) + 2k(f_1 - f_2) + (c_1 - c_2) = 0$$

$$\Rightarrow \therefore 2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + c_1 - c_2 = 0$$

$\therefore$  मूलान्न का समी.  $\Rightarrow \star S_1 - S_2 = 0$

Ex:-

$$S_1 = x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$$

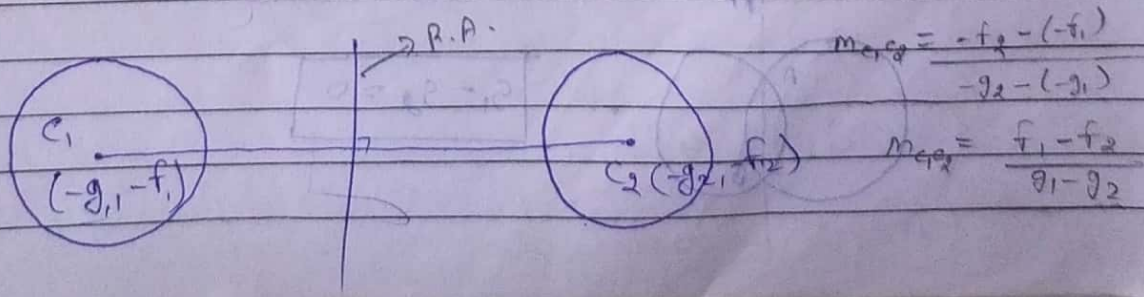
$$S_2 = x^2 + y^2 - 9 = 0$$

Ans मूलान्न  $S_1 - S_2 = 0$

$$4x + 6y + 6 = 0$$

### ★★ Properties of R.A :-

① R.A. केंद्रों को मिलाने वाले रेखाखंडों के समबन्ध होता है।



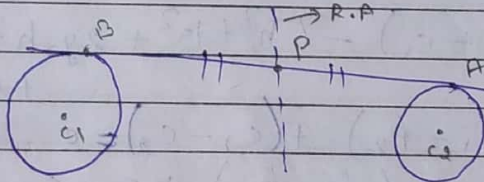
$$R.A. \Rightarrow 2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$$

$$m_{R.A} = -\frac{(g_1 - g_2)}{(f_1 - f_2)}$$

$$m_{c_1 c_2} \times m_{R.A} = -1$$

$$\left( \frac{-f_2 + f_1}{-g_2 + g_1} \right) \times \left( \frac{-(g_1 - g_2)}{(f_1 - f_2)} \right) = -1$$

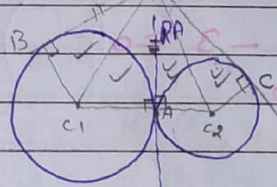
3) RA, DCI को समझाजित करता है।



$$(PA)^2 = (PB)^2 \quad (\text{Power समान})$$

$$\therefore PA = PB$$

4) अगर दो वृत्त स्पर्श करते हैं तो उनके उभयनिष्ठ बिन्दु या स्पर्श रेखा ही RA होगी।



समी.  $S_1 - S_2 = 0$  RA

$$PA = PB$$

$$PA = PC$$

$$\therefore PB = PC$$

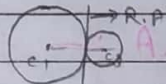
$$(PB)^2 = (PC)^2$$

Power of W.r.t  $S_1$  = Power of W.r.t  $S_2$

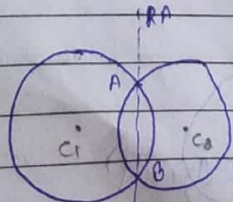
समी.  $S_1 - S_2 = 0$  → उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा

∴ Common tangent R.A. →  $S_1 - S_2 = 0$

5) RA हमेशा केन्द्रों के मध्य से गुजरे यह जरूरी नहीं है।



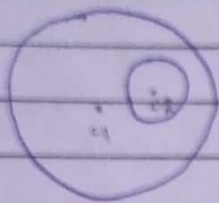
6) यदि दो वृत्त एक-दूसरे को काटते हैं तो उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा ही RA होती है।



समी.  $S_1 - S_2 = 0$

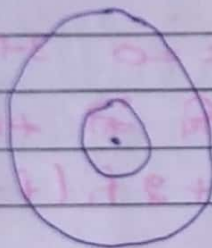
$S_1 - S_2 = 0$  → उभयनिष्ठ रेखा

6) अगर एक वृत्त दूसरे के अन्दर है (परन्तु संकेन्द्रीय नहीं) तो उनका RA दोनों वृत्तों के बाहर होगा।



RA

7) यदि दो वृत्त संकेन्द्रीय हैं तो उनका RA विद्यमान नहीं होता है।



$$C_1: x^2 + y^2 = 9$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 8$$

Example (1.3)

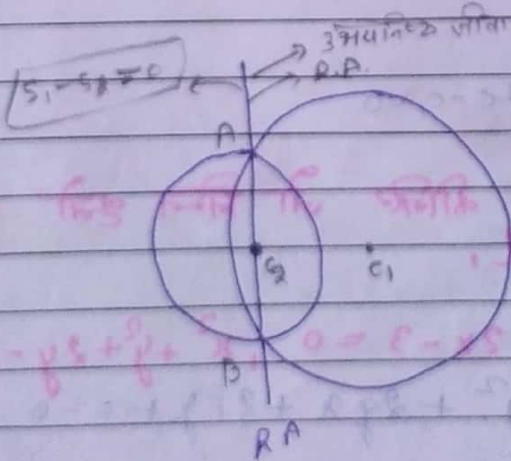
$$C_1 = C_2 \implies x^2 + y^2 = 9$$

$$C_2 = C_1 \implies x^2 + y^2 = 8$$

$$C_1 - C_2 = 0 \implies x^2 + y^2 - x^2 - y^2 = 9 - 8 = 1$$

$$0 = 1$$

★★ 8) यदि एक बड़ा वृत्त, एक छोटे वृत्त को परिधि को समद्विभाजित करता है तो छोटे वृत्त का केन्द्र उन दोनों वृत्तों के RA (उभयनिष्ठ जीवा) पर होता है।



$AB \rightarrow C_1$  का समद्विभाजक  
 $AB \rightarrow R.A$  का अर्ध

$$C_1: x^2 + y^2 = 10$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 5$$

$$C_1 - C_2 = 0 \implies x^2 + y^2 - x^2 - y^2 = 10 - 5 = 5$$

$$0 = 5$$

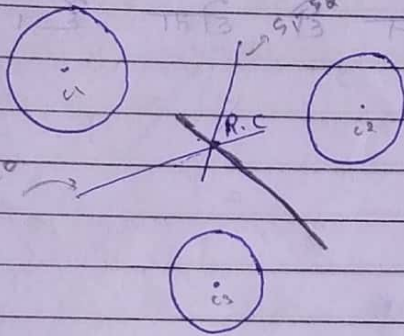
★  $\Rightarrow$  यदि कोई भी दो R.A. प्रतिच्छेद करती हैं तो तीसरी R.A. उन दोनों के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती।

$$a^2b^2 = c^2(a^2+b^2) \quad \boxed{m_2 \cdot m_3 = m_1 + m_2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

★ मूलबिन्दु केन्द्र (Radical Center) :- (तीन वृत्तों के लिए)

$\Rightarrow$  तीन वृत्तों में से दो-दो को एक साथ लेकर उनके R.A. ज्ञात किये जायें तो उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ही मूलबिन्दु केन्द्र कहलाता है।



Q. 2 निम्न वृत्तों का R.C. ज्ञात कीजिए -

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{--- (1)} \quad x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0 \quad \text{--- (2)} \quad x^2 + y^2 - 12y + 35 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

Ans (1) व (2) का R.A. का समी.  $\Rightarrow 8x + 16 = 0$   
 $x = -2 \Rightarrow x + 2 = 0$  (A)  
 (2) व (3) से  $\Rightarrow 20y - 25 = 0$   ~~$4y - 5 = 0$~~   $8x + 12y - 20 = 0$   
 (3) व (1) से  $\Rightarrow -12y + 36 = 0$   $y = 3$   $y - 3 = 0$  (B)  
 समी. (A) व (B) से R.C. =  $(-2, 3)$  कि.

★ Note :- R.C. से तीनों वृत्तों पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

★  $\Rightarrow$  यदि कोई भी दो R.A. प्रतिच्छेद करती हैं तो इस प्रतिच्छेद बिन्दु से तीसरी R.A. गुजरती।

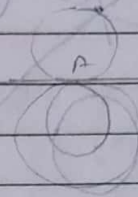
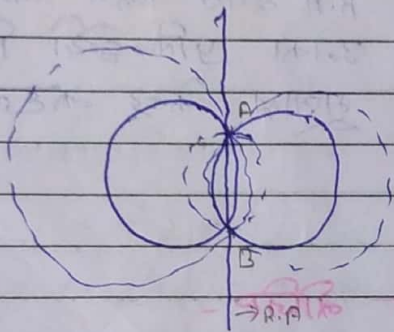
★  $\rightarrow$  यदि कोई भी दो R.A. समांतर हैं तो तीसरी R.A. भी उन दोनों R.A. के समांतर होगी।

⇒ वृत्तों का समाक्षीय निकाय :-

(Co-axial system of circle)

(Another type of family of circles)

→ एक वृत्त निकाय समाक्षीय वृत्त निकाय कहलाता है यदि इसके किसी भी दो सदस्य लिये जैसे तो उनका मूलबिंदु समान ही होता है।



Q1 उस वृत्त का समीक्षात करो जो मूल बिंदु से गुजरता है तथा निम्न वृत्तों के साथ समाक्षीय है (0,0)

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 - 6x + 3 = 0$$

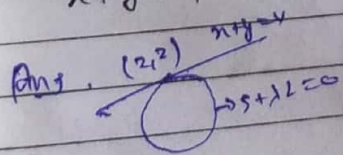
Ans B.A.  $(x^2 + y^2 - 9) + \lambda(x^2 + y^2 - 6x + 3) = 0$   
(0,0)

$$\lambda = 3$$

$$\therefore 4x^2 + 4y^2 - 18x = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{9}{2}x = 0$$

Q2 बिंदु (1,1) से गुजरने वाले वृत्त का समीक्षात कीजिये जो एक निम्न समाक्षीय वृत्तों के निकाय से संबंध रखता है जो की रेखा

$x + y = 4$  की बिंदु (2,2) पर स्पर्श करता है?



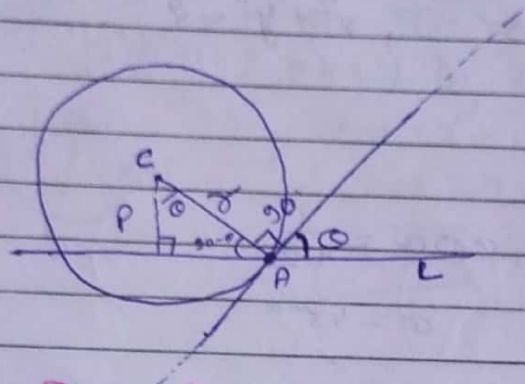
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x+y-4) = 0$$

$$1 + \lambda(-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + x + y - 4 = 0$$

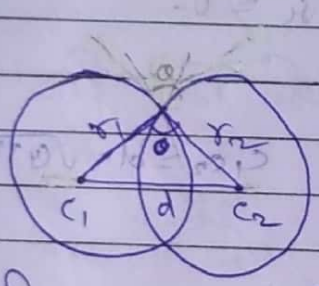


★★ रेखा तथा वृत्त के मध्य कोण :-



$$\cos \theta = \frac{P}{R}$$

★★ दो वृत्तों के मध्य कोण :-



$$\cos \theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$$

⇒ यदि  $\theta = 90^\circ$  हो तो वृत्त समन्वकीय कहलाते हैं

$$r_1^2 + r_2^2 - d^2 = 0$$

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2$$

$$S_1: x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 \Rightarrow (-g_1, -f_1), r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$$

$$S_2: x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 \Rightarrow (-g_2, -f_2), r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2$$

$$(g_1^2 + f_1^2 - c_1) + (g_2^2 + f_2^2 - c_2) = \left( \sqrt{(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2} \right)^2$$

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2 \Rightarrow \text{समन्वकीयता का प्रतिबन्ध}$$

Q. 8. उक्त वृत्त का समी. द्वारा काजित निम्नका  
 केन्द्र मूल बिन्दु है तथा वह निम्न वृत्त  
 को लम्बकोणिय करता है

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 16 = 0$$

Sol

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$$

$$0 + 0 = +16 - r^2$$

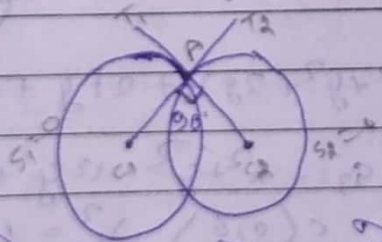
$$r = 4$$

C(0,0)

$$\therefore x^2 + y^2 = 16$$

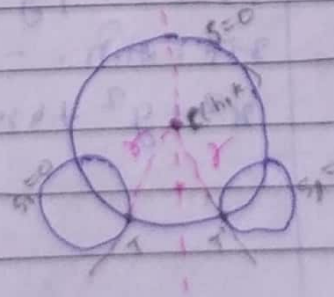
Note :-

यदि दो वृत्त एक-दूसरे को लम्बकोणिय करते  
 हैं तो अभ्यान्तिक बिन्दु पर एक का आधिक्य  
 दूसरे की रूपरेखा होती है।



$T_1 \rightarrow S_1$  के लिए tangent है तथा  $S_2$  के लिए Normal है  
 $T_2 \rightarrow S_2$  के लिए tangent है तथा  $S_1$  के लिए Normal है।

दो वृत्त अन्य दो वृत्तों को लम्बकोणिय करता है  
 तो उसके केन्द्र का बिन्दुपथ विये गये दो वृत्तों का  
 R.A. होता है।



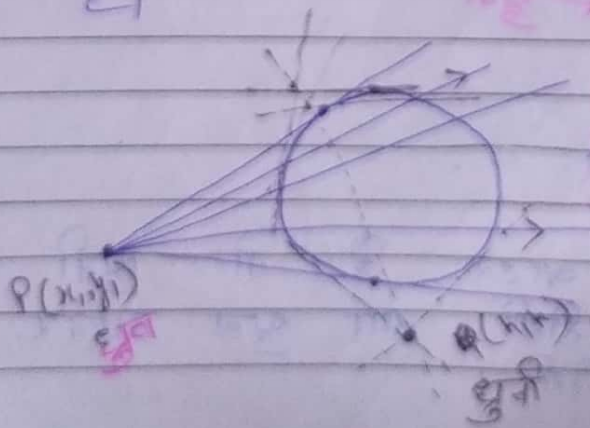
$$PT = PT' = r$$

$$(PT)^2 = (PT')^2$$

Power of S. = Power of S'

## ★★ ध्रुव तथा ध्रुवी (Pole and Polar)

यदि किसी बिन्दु  $P$  से वृत्त पर लियेक छेदी रेखाएँ खींची जायें तथा वृत्त के साथ इनके कटान बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ खींची जायें तो इन स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिन्दु  $Q$  के बिन्दुपथ को ध्रुवी कहा जाता है तथा बिन्दु को ध्रुव कहा जाता है।



$P(x_1, y_1)$  के सापेक्ष बिंदु

$$T=0$$

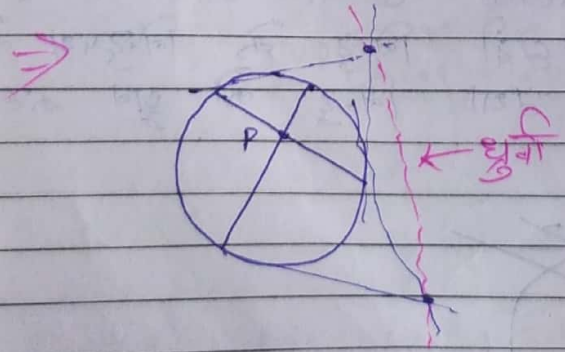
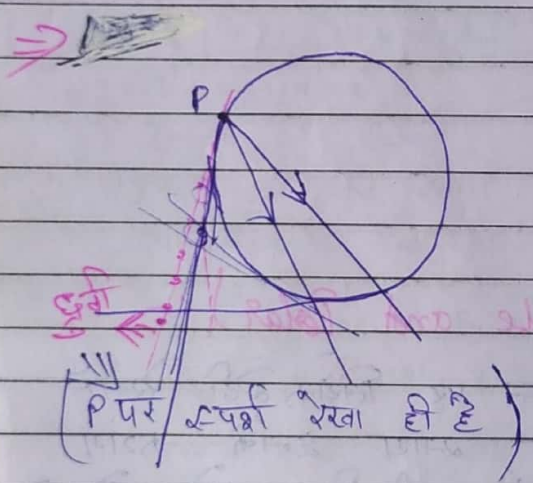
$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = a^2$$

परन्तु यदि  $(h, k)$  से गुजरती है,

$$(h)x_1 + (k)y_1 = a^2$$

$$xx_1 + yy_1 = a^2$$

$$T=0$$



⇒ ① यदि ध्रुव बाहर है तो ध्रुवी तिर्यक  
द्वेषी रेखा होगी, तथा ध्रुव अन्दर है तो  
ध्रुवी बाहर बनेगी।

- 1) यदि बिन्दु वृत्त के ऊपर हो तो इस बिन्दु पर एक रेखा हो चुकी होती है।
- 2) दो बिन्दु संयुग्मी बिन्दु कहलाते हैं यदि पहला बिन्दु दूसरे की छुती पर हो तथा दूसरा बिन्दु पहली की छुती पर हो।
- 3) दो रेखाएँ एक-दूसरे की संयुग्मी रेखाएँ कहलाती हैं यदि पहली रेखा दूसरी छुती के संगत छुव को रखती है तथा दूसरी रेखा पहली छुती के संगत छुव को रखती है।

Q.1. वृत्त  $x^2 + y^2 = 25$  के बिन्दु लिए किसी बिन्दु  $(2, 3)$  के सापेक्ष छुती का

समी. लिखिए।

Ans  $T=0$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 25$$

$$2x + 3y = 25$$

Q.2. रेखा  $lx + my + n = 0$  के सापेक्ष वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  का छुव लिखिए।

Ans  $T=0$   $P(x_1, y_1)$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = a^2 = 0$$

$$lx + my + n = 0$$

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{-a^2}{n}$$

$$x_1 = \frac{-a^2 l}{n} \quad y_1 = \frac{-ma^2}{n} \Rightarrow P\left(\frac{-a^2 l}{n}, \frac{-ma^2}{n}\right)$$