NCERT EXEMPLAR SELECTED PROBLEMS : PROBLEM 8 ON ITF

46. If $y = 2\tan^{-1}x + \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ for all x, then __________ $< y <$ __________.

Sol. We have, $y = 2\tan^{-1}x + \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$

Consider $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

Let $x = \tan\theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\Rightarrow$ $\theta = \tan^{-1}x$

Now $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= \sin^{-1}(\sin\alpha), \text{ where } \alpha \in (-\pi, \pi)$$

$$= \begin{cases} \sin^{-1}(\sin\alpha), & -\pi < \alpha < -\pi/2 \\ \sin^{-1}(\sin\alpha), & -\pi/2 \le \alpha \le \pi/2 \\ \sin^{-1}(\sin\alpha), & \pi/2 < \alpha < \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\alpha - \pi, & -\pi < \alpha < -\pi/2 \\ \alpha, & -\pi/2 \le \alpha \le \pi/2 \\ -\alpha + \pi, & \pi/2 < \alpha < \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\tan^{-1} x - \pi, & -\pi < 2\tan^{-1} x < -\pi/2 \\ 2\tan^{-1} x, & -\pi/2 \le 2\tan^{-1} x \le \pi/2 \\ -2\tan^{-1} x + \pi, & \pi/2 < 2\tan^{-1} x < \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\tan^{-1} x - \pi, & -\pi < 2\tan^{-1} x < -\pi/2 \\ 2\tan^{-1} x, & -\pi/2 \le 2\tan^{-1} x \le \pi/2 \\ -2\tan^{-1} x + \pi, & \pi/2 < 2\tan^{-1} x < \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\tan^{-1} x - \pi, & -\pi/2 < \tan^{-1} x < -\pi/4 \\ 2\tan^{-1} x, & -\pi/4 \le \tan^{-1} x \le \pi/4 \\ -2\tan^{-1} x + \pi, & \pi/4 < \tan^{-1} x < \pi/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\tan^{-1} x - \pi, & x < -1 \\ 2\tan^{-1} x, & -1 \le x \le 1 \\ -2\tan^{-1} x + \pi, & x > 1 \end{cases}$$

$\therefore \qquad y = 2\tan^{-1} x + \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$= \begin{cases} -\pi, & x < -1 \\ 4\tan^{-1} x, & -1 \le x \le 1 \\ \pi, & x > 1 \end{cases}$$

For $\qquad -1 \le x \le 1$

$\qquad -\pi/4 \le \tan^{-1} x \le \pi/4$

$\therefore \qquad -\pi \le 4\tan^{-1} x \le \pi$

Thus range of y is $[-\pi, \pi]$