* Circle *

⇒ यह उस गतिमान बिन्दु P का बिन्दु पथ है। जो इस प्रकार गति करता है कि जिसकी एक निश्चित बिन्दु C से दूरी सदैव नियत (r) रहे।

वृत्त के समी० का केन्द्रीय रूप :—

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, वृत्त के समी० का केन्द्रीय रूप कहलाता है। तथा इसका केन्द्र (h,k) व त्रिज्या $= r$

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

Proof

Note वृत्त की समी० में सदैव निम्न दो बाते अवश्य होगी।

(1) x^2 का गुणांक $= y^2$ का गुणांक

तथा

(2) xy का गुणांक $= 0$

वृत्त की समी० में केन्द्र, त्रिज्या इत्यादि ज्ञात करने के लिये हम सर्वप्रथम x^2 व y^2 के गुणांको को 1 बनाते है।

Que निम्न वृत्तो के केन्द्र व त्रिज्या = ?

(1) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

$= (-1, 2)$, $r = 2\sqrt{2}$

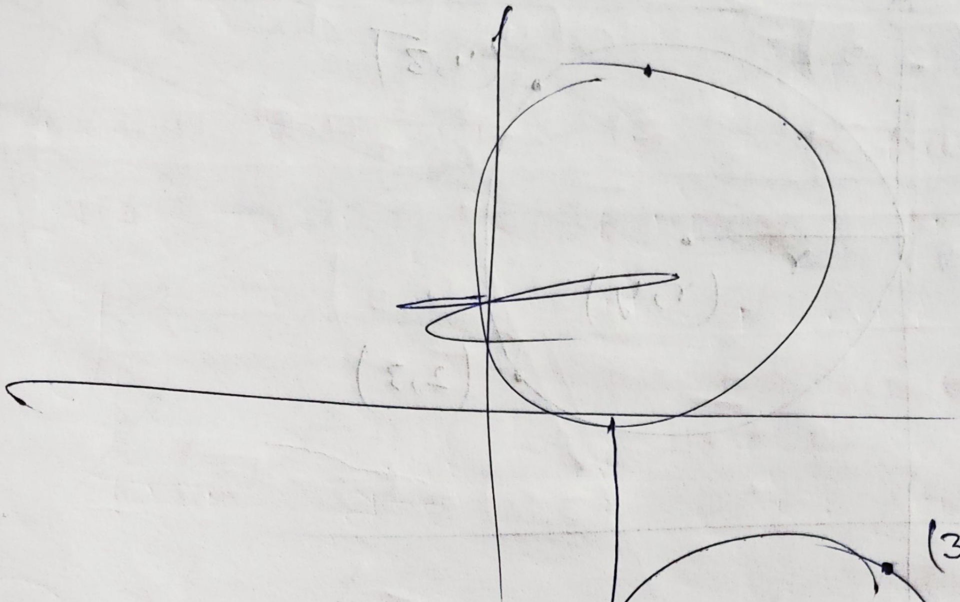
(2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$

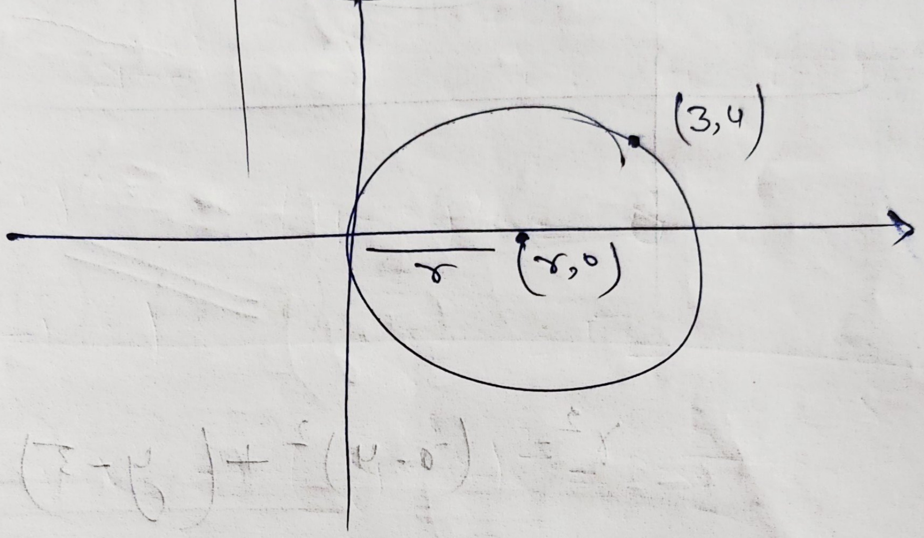
$= (-2, -3)$, $r = 5$

(3) $(2x-1)^2 + (2y+1)^2 = 100$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 25$

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ $r = 5$





$$r^2 = (r-3)^2 + 16$$

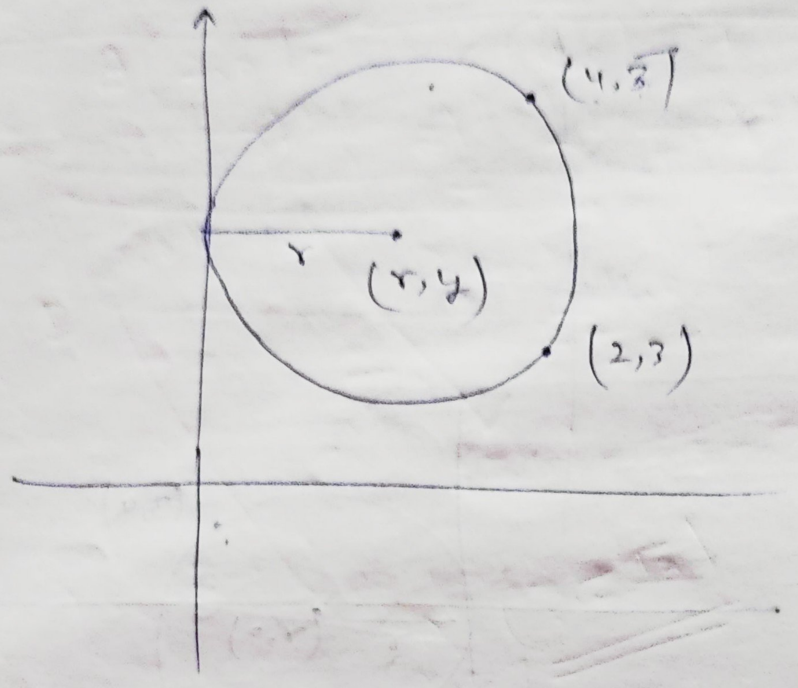
$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 9 - 6r + 16$$

$$6r = 25$$

$$r = \frac{25}{6}$$

$$\boxed{\left(x - \frac{25}{6}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{25}{6}\right)^2}$$

Que उस वृत्त का समी जो बिन्दुओ A (2,3) व B (4,5) से गुजरता है तथा y अक्षो को स्पर्शकरता है।



$$r^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2$$

$$r^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

$$\cancel{(x-4)^2 = (x-2)^2}$$

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2$$

$$\cancel{x^2} + 16 - 8x + \cancel{y^2} + 25 - 10y = \cancel{x^2} + 4 - 4x + \cancel{y^2} + 9 - 6y$$

$$4x + 4y = 28$$

$$\boxed{x + y = 7}$$

$x + y = 7$

$\cancel{xy = x - 7}$ $\quad y = 7 - x$

$$r^2 = (r-4)^2 + \left(\frac{2-r}{\cancel{r-12}}\right)^2$$

$$\cancel{r^2 = r^2 + 16 - 8r + r^2 + 144 - 24r}$$

$$\cancel{r^2 - 32r + 150 = 0}$$

$$\cancel{r^2 =}$$

$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 16 - 8r + 4 + r^2 - 4r$$

$$r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$(r-10)(r-2) = 0$$

$$r = 2, 10$$

$r = 2 \quad y = 5$

$\cancel{r = 10 \quad y = -3}$

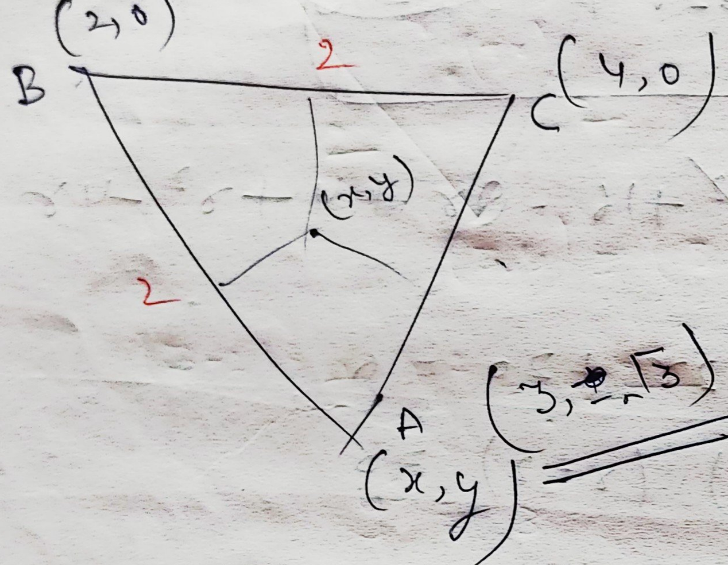
$$\boxed{(x-2)^2 + (y-5)^2 = 2^2}$$

when $\boxed{r = 10,\ y = -3}$

$$\boxed{(x-10)^2 + (y+3)^2 = (10)^2}$$

A

Que. यदि किसी समबाहु Δ ABC मे B(2,0), C(4,0) व शीर्ष A चतुर्थ पाद मे हो तो उसके अन्त: वृत्त का समी



$(3, -\sqrt{3})$

$$(x-2)^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$$

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 + 16 - 8x$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

$$(3-2)^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

$\cancel{x=4}$)

$$y = \frac{+\sqrt{3}}{+1}(x-4)$$

$$y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$$

$$y - \sqrt{3}x + 4\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{y - \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = y$$

$$\boxed{y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - y = 2y$$

$$\cancel{y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 2y}$$

$$3y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

$$\cancel{y = 2\sqrt{3}}$$

$$y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$1 = -2x + 8$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

। वृत्त के समी० का मानक रूप ।

$\boxed{x^2+y^2=a^2}$, वृत्त के समी० का मानक रूप है।

Qu. वृत्त $2x^2+2y^2=9$ का केन्द्र व त्रिज्या = ?

केन्द्र = $(0,0)$

त्रिज्या = $\frac{3}{\sqrt{2}}$

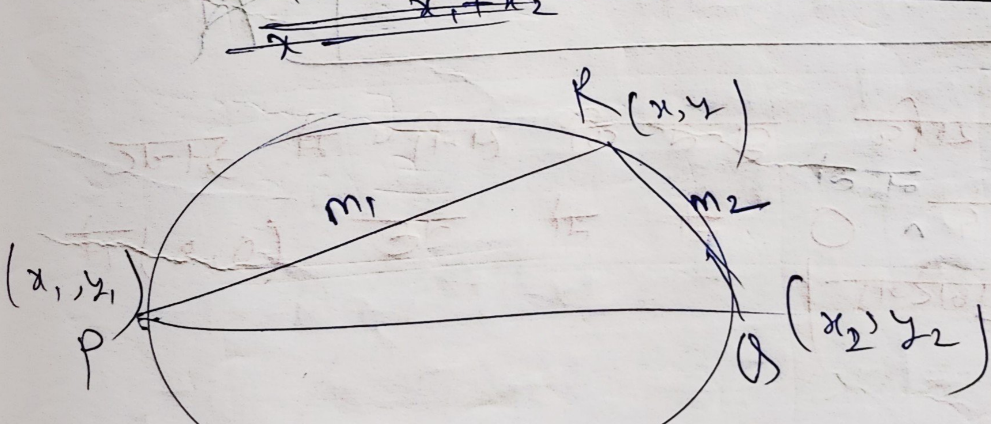
☆ यदि वृत्त की समी० में एक घातीय पद अनुपस्थित हो तो वृत्त का केन्द्र $(0,0)$ होता है।

व्यास रूप में वृत्त का समी०

यदि किसी वृत्त के व्यास के सिरे $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ हो तो उस वृत्त का समी

☆ $\boxed{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0}$

$\cancel{x_1+x_2}$



$m_1 = \frac{(x-x_1)}{(y-y_1)}$, $m_2 = \frac{(x-x_2)}{(y-y_2)}$

अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है

अतः

$$m_1 m_2 = -1$$

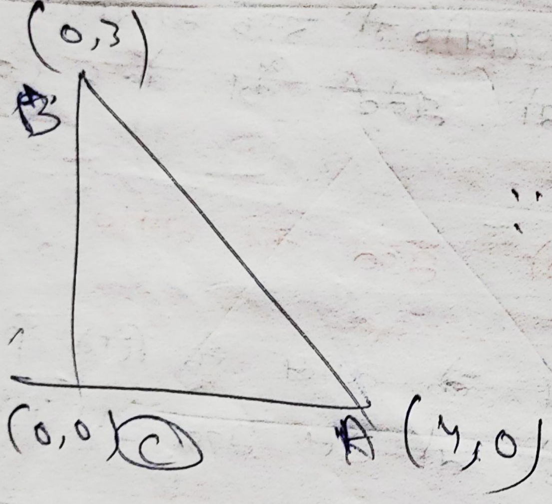
$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(y-y_1)(y-y_2)} = -1$$

$$(x-x_1)(x-x_2) = -(y-y_1)(y-y_2)$$

$$\boxed{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0}$$

Proved

Que यदि किसी त्रिभुज ABC में A(4,0), B(0,3) व C(0,0) हो तो इसके परिवृत्त का समी०



∵ ABC एक समको० △ है

अतः वृत्त का समी०

$$\boxed{x(x-4)+y(y-3)=0}$$

A

यदि वृत्त की समी० मे अचर पद न हो 0 हो तो वह (0,0) से गुजरेगा।

दो दिये गये बिन्दुओं P व Q से अनन्त वृत्त गुजर सकते हैं। तथा इन अनन्त वृत्तों से सबसे छोटा वृत्त वह होगा जो PQ को व्यास मानकर खींचा गया है।

Que. बिन्दुओं (0,0) व (3,4) से गुजरने वाले उस ~~बिन्दु~~ वृत्त ~~से~~ का समी० जो आकार में न्यूनतम है।

$$\boxed{x(x-3)+y(y-4)=0}$$

वृत्त के समी० का व्यापक रूप

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \text{—— (1)}$$

वृत्त के समी० का व्यापक रूप है। तथा इसका केन्द्र $(-g,-f)$ व त्रिज्या $=\sqrt{g^2+f^2-c}$ जहाँ

$$g=\frac{x \text{ का गुणांक}}{2}$$

$$f=\frac{y \text{ के गुणांक}}{2}$$

c = अचर पद

★ if (i) $g^2+f^2-c>0$ तो समी० (1) एक वास्तविक वृत्त को निरुपित करेगी।

(ii) $g^2+f^2-c=0$ तो समी० (1) एक बिन्दु वृत्त को निरुपित करेगी।

(iii) $g^2+f^2-c<0$ तो समी०(1) एक काल्पनिक वृत्त को निरुपित करेगी।

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot g+g^2-g^2+y^2+2\cdot y\cdot f+f^2-f^2+c=0$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

$$(x+g)^2+(y+f)^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$$

अतः केन्द्र $(-g,-f)$

radius $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

Que. निम्न वृत्तों के केन्द्र व त्रिज्या बताओ

(i) $x^2+y^2-2x+4y-5=0$

केन्द्र $(-g,-f) = (1,-2)$

radius $= \sqrt{1+4+5} = \sqrt{10}$

(ii) $x^2+y^2-x=0$

केन्द्र $\rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right)$

त्रिज्या $= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ इकाई

(iii)

$4x^2+4y^2-8x+16y-1=0$

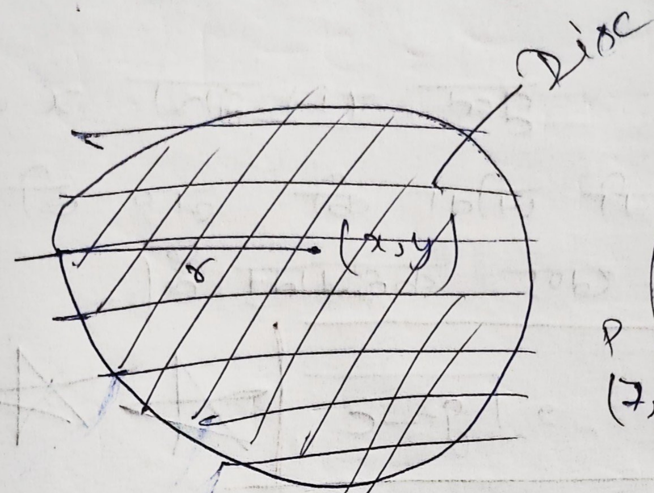
$x^2+y^2-2x+4y-\frac{1}{4}=0$

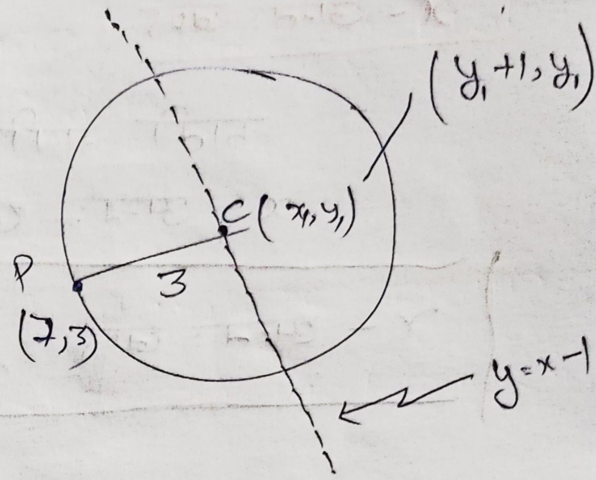
केन्द्र $= (1,-2)$

radius $= \sqrt{1+4+\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{21}{4}}$ इकाई

Que. उस वृत्त का समी० ज्ञात करो जिसकी त्रिज्या 3 इकाई है तथा केन्द्र सरल रेखा $y = x - 1$ पर स्थित है तथा जो $(7,3)$ से गुजरता है।





$$y = x - 1$$

$$x = y + 1$$

$$(CP)^2 = 9$$

$$(y_1 + 1 - 7)^2 + (y_1 - 3)^2 = 3^2$$

$$y_1^2 + 36 - 12y_1 + y_1^2 + \cancel{9} - 6y = \cancel{9}$$

$$2y_1^2 - 18y_1 + 36 = 0$$

$$y_1^2 - 9y_1 + 18 = 0$$

$$y_1 = 6, 3$$

$$x_1 = 7, 4$$

Centre = (7,6)

$$\boxed{(x-7)^2 + (y-6)^2 = 3^2}$$

$$\boxed{(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2}$$ — cent (4,3)

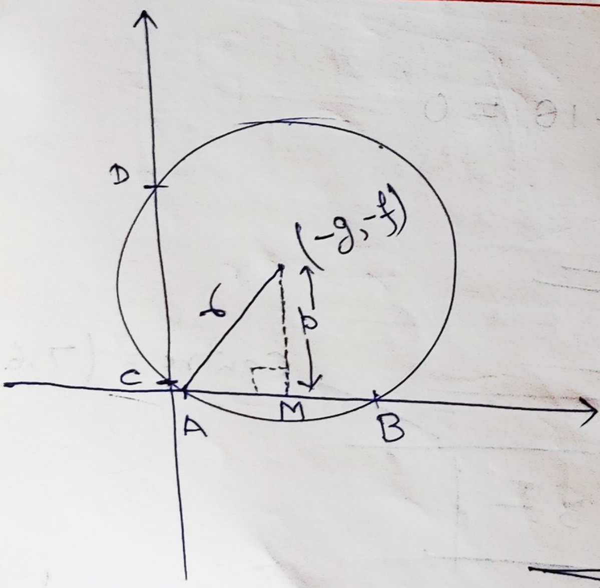
वृत्त, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ —— (1)
द्वारा निर्देशी अक्षो पर काटे गये अन्तः खण्ड।

x- अन्तः खण्ड ! - वृत्त ~~(1)~~ द्वारा x अक्ष पर काटी गयी जीवा की ल० ही उसका x- अन्तः खण्ड कहलाता है।

$$\boxed{x\text{- अन्तः खण्ड} = 2\sqrt{g^2-c}}$$

y- अन्तः खण्ड ! - वृत्त द्वारा y-अक्ष पर काटी गयी जीवा की ल० ही उसका y-अन्तः खण्ड है।

$$\boxed{y\text{- अन्तः खण्ड} = 2\sqrt{f^2-c}}$$



x अन्तः खण्ड $= AB$

$= 2AM$

$= 2\sqrt{r^2-p^2}$

$= 2\sqrt{g^2+f^2-c-f^2}$

$$\boxed{AB = 2\sqrt{g^2-c}}$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{—— (i)}$$

$$y = 0 \quad \text{—— (ii)}$$

$$x^2 + 2gx + c = 0 \quad \begin{cases} \rightarrow x_1 \\ \rightarrow x_2 \end{cases}$$

$$|x_1 - x_2| = ?$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= 4g^2 - 4c$$

$$|x_1 - x_2| = 2\sqrt{g^2 - c}$$ Proved

Note :— $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ —— (i)

(i) if $g^2 > c$ हो तो वृत्त x - अक्ष को दो वास्तविक व भिन्न -2 बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करेगा।

(ii) if $g^2 = c$ हो तो वृत्त x - अक्ष को स्पर्श करेगा।

(iii) if $g^2 < c$ हो तो वृत्त x - अक्ष को न तो स्पर्श करेगा न ही प्रतिच्छेद करेगा।

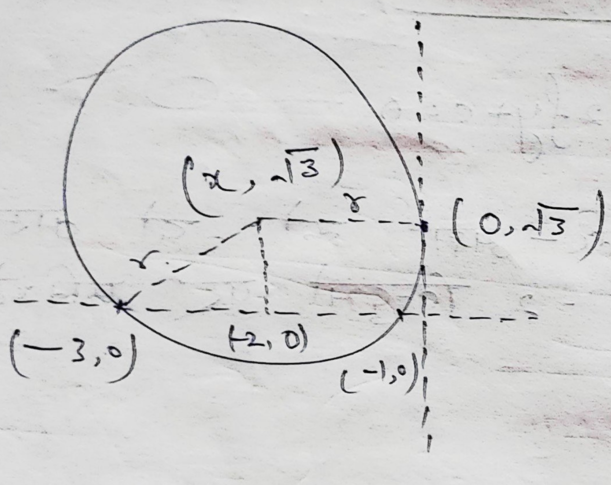
Que. उस वृत्त का समी० बताओ जो y अक्ष को $(0, \sqrt{3})$ पर स्पर्श करता है तथा x अक्ष को बिन्दुओ $(-1, 0)$ व $(-3, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

$$\cancel{\sqrt{g^2 - c} = \sqrt{(1+3)^2 + 0^2}}$$

$$\cancel{g^2 - c = 4}$$

$$\cancel{g^2 = \cancel{16+c}\ 4 + c}$$

$$\cancel{f^2 = c}$$



$$\cancel{x^2} + 9 + 6x + 3 = \cancel{x^2}$$

$$x = -2$$

$$r = 2 \text{ इकाई}$$

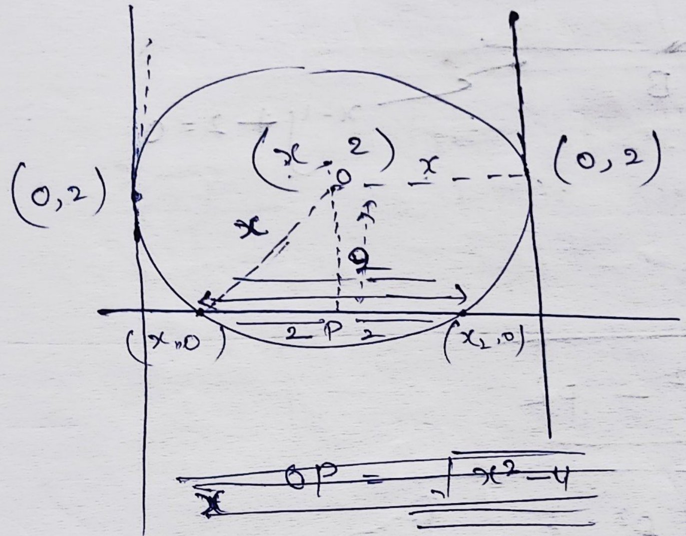
$$x^2 = r \quad \text{——— (i)}$$

$$(x+3)^2 + 3 = r^2 \quad \text{——— (ii)}$$

वृत्त का समी०

$$\boxed{(x+2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 2^2}$$ **A**

Que. उस वृत्त का समी० ज्ञात करो जो y-अक्ष को (0,-2) पर स्पर्श करता है तथा x-अक्ष पर काटी गयी जीवा की ल० 4 इकाई हो



$x = 2\sqrt{2}$

केन्द्र $(2\sqrt{2}, 2)$ & $(-2\sqrt{2}, 2)$

radius $= 2\sqrt{2}$

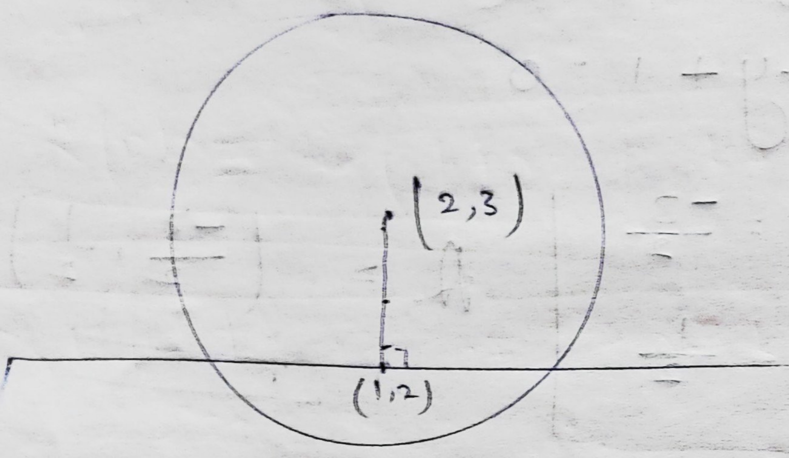
$$(x-2\sqrt{2})^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

केन्द्र $(-2\sqrt{2}, 2)$

$r = 2\sqrt{2}$

$$(x+2\sqrt{2})^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

Que. वृत्त $x^2+y^2-4x-6y+4=0$ की उस जीवा का समी० जिसका मध्य बिन्दु (1,2) हो



$$y-2 = x-1$$

$$y-x-1=0 \quad \text{——— (1)}$$

$$\boxed{x+y-3=0}$$

A

Que. वृत्त $x^2+y^2-4x-6y+4=0$ की उस जीवा का समी० जो बिन्दु P (1,2) से गुजरती है। तथा ———

(i) जो सर्वाधिक ल० की हो।

(ii) जो केन्द्र से सर्वाधिक दूरी पर हो

(iii) जो न्यूनतम ल० की हो

(i) $\boxed{y-x-1=0}$ Ans

(ii) $\boxed{x+y-3=0}$ Ans

(iii) $\boxed{x+y-3=0}$ Ans

जो रेखा केन्द्र से सर्वाधिक दूरी पर है

$= 2\sqrt{r^2-p^2}$

केन्द्र से सर्वाधिक दूरी पर स्थित जीवा की लं० ही न्यूनतम होगी। $p\uparrow$

वृत्त के समी० का प्राचलिक रूप

(i) वृत्त $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ —— (1)

कार्तीय समी०

का प्राचलिक समी० ——

$$\frac{x-h}{\cos\theta}=\frac{y-k}{\sin\theta}=r$$ जहां 'θ' प्राचाल है।

$\theta \in [0, 2\pi)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= h+r\cos\theta \\ y &= k+r\sin\theta \end{aligned}}$$

अतः वृत्त (1) की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु P के निर्देशांक। ——

$$P(h + r\cos\theta,\ k + r\sin\theta) \equiv P(\theta)$$

$$Q(\alpha) \equiv Q(h + r\cos\alpha,\ k + r\sin\alpha)$$

$$R(\beta) \equiv R(h + r\cos\beta,\ k + r\sin\beta)$$

$$T\left(\frac{\pi}{3}\right) = T\left(h + \cos\frac{\pi}{3},\ k + r\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

☆ ☆ ☆ ☆

☆ किसी प्राचलिक समी० से प्राचल को गायब करके कार्तीय समी० ज्ञात करते हैं।

☆ प्राचलिक समी० से कार्तीय समी० ज्ञात करने के लिये प्राचल को गायब करते हैं

$x = h + r\cos\theta$	$y = k + r\sin\theta$
$\cos\theta = \dfrac{x-h}{r}$	$\sin\theta = \dfrac{y-k}{r}$

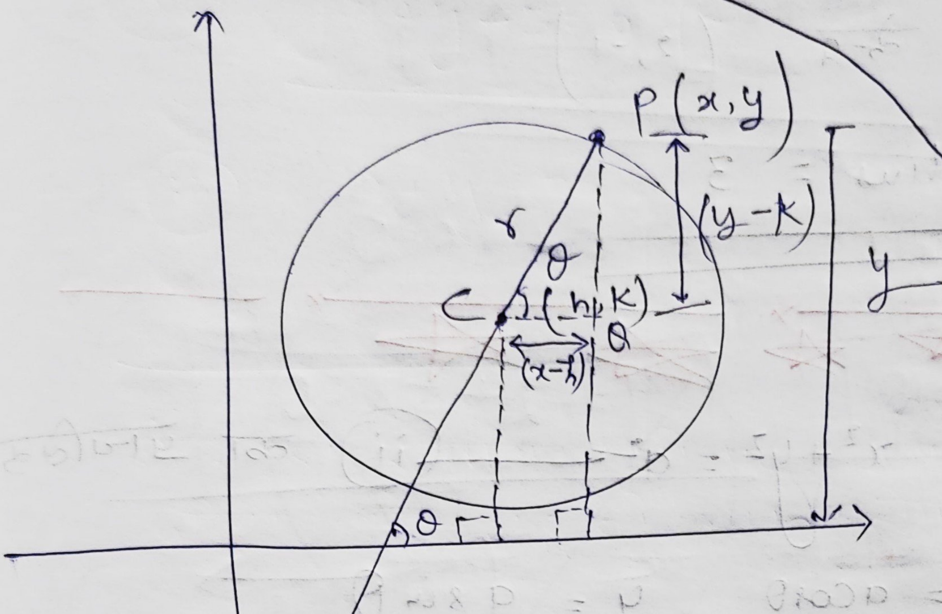
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{(x-h)^2}{r^2} + \frac{(y-k)^2}{r^2}$$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

$P(h + r\cos\theta,\ k + r\sin\theta)$

$\sin\theta$ की जगह $\cos\theta$ भी आ सकता है।

$\cos\theta \longrightarrow \sin\theta$ भी आ सकता है।



वृत्त का प्राचलिक समी॰

$$(x-h)\cancel{\cos\theta} = r\cos\theta$$

$$\boxed{x = h + r\cos\theta}$$

$$\frac{x-h}{\cos\theta} = r$$

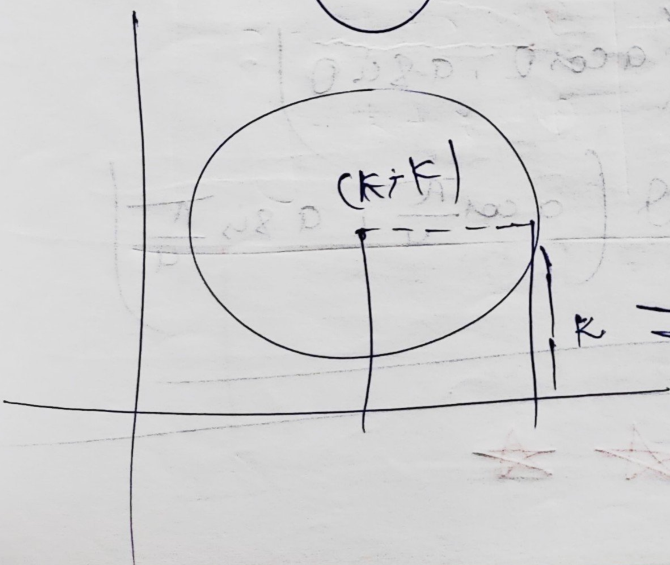
$$(y-k) = r\sin\theta$$

$$r = \frac{y-k}{\sin\theta}$$

$$\boxed{y = k + r\sin\theta}$$

Prooved

if $\theta = 0$



$\theta = 0$

$p(h+r,\ k)$

Ques

$p(2+3\cos\theta, -1+3\sin\theta)$ ⟶

बिन्दु एक वृत्त की परिधि पर है।
जिसका केन्द्र $(2,-1)$

radius = 3

☆ ☆ ☆ ☆

2 वृत्त $x^2+y^2=a^2$ —— ii का प्राचलिक समी

$x = a\cos\theta \quad y = a\sin\theta$

जहां 'θ' प्राचल है।

$\cos\theta = \frac{x}{a} \quad \sin\theta = \frac{y}{a}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

$\boxed{x^2+y^2=a^2}$ Proove

अत: वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक

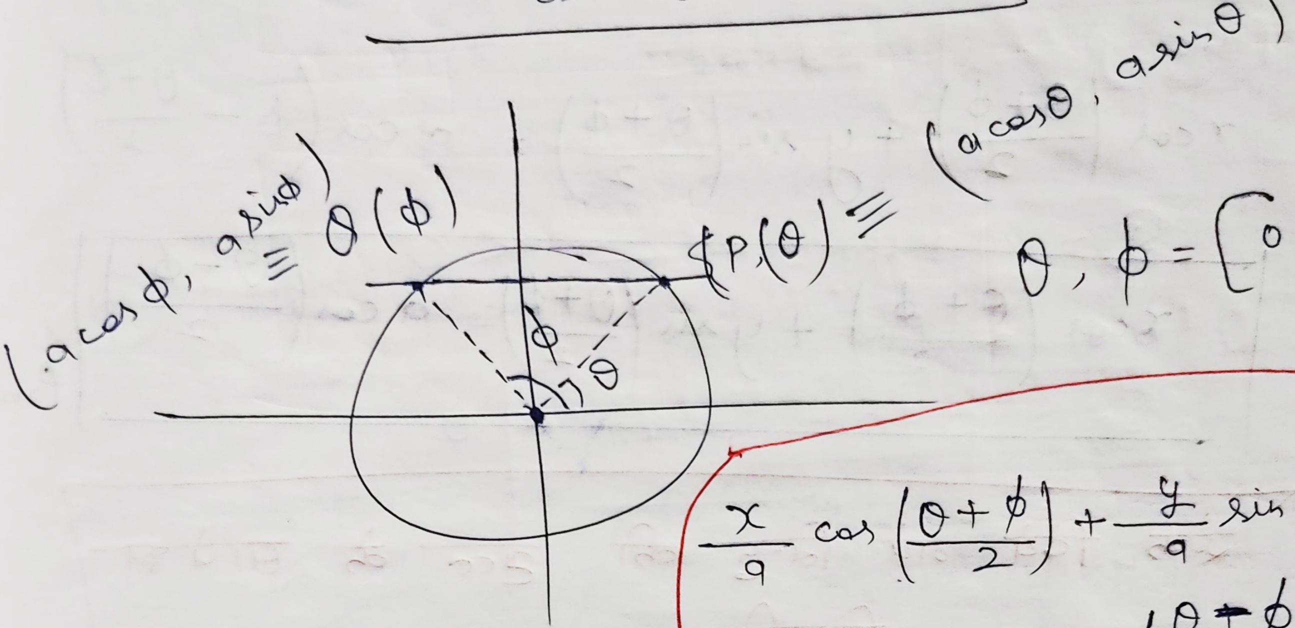
$P(\theta) \equiv P(a\cos\theta, a\sin\theta)$

$Q\left(\frac{\pi}{4}\right) \equiv Q\left(a\cos\frac{\pi}{4}, a\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Tarun

☆ ☆ ☆ ☆ ☆

$x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित बिन्दु $P(\theta)$ व $Q(\phi)$ को मिलाने वाली जीवा का समी० ⟶



$\theta, \phi = [0, 2\pi)$

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + \frac{y}{a}\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(P–Q) Proove

$$(y - a\sin\phi) = \frac{a\sin\theta - a\sin\phi}{a\cos\theta - a\cos\phi}(x - a\cos\phi)$$

$$(y - a\sin\phi) = \frac{\cancel{a}(\sin\theta - \sin\phi)}{\cancel{a}(\cos\theta - \cos\phi)}(x - a\cos\phi)$$

$$(y - a\sin\phi) = \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cancel{\sin}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}{\cancel{2}\sin\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)\cancel{\sin}\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)}(x - a\cos\phi)$$

$$y\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) - a\sin\phi\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) =$$

$$= -x\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + a\cos\phi\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

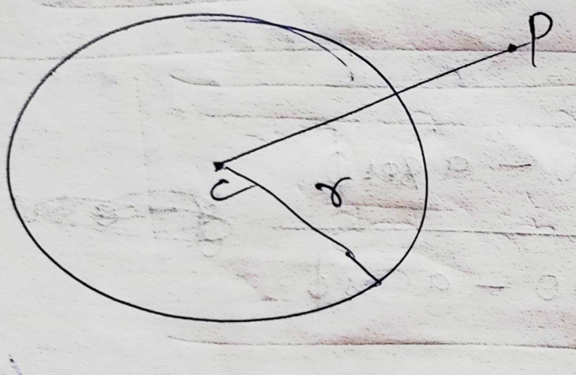
$$y\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + x\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = a\left(\cos\phi\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + \sin\phi\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right.$$

$$x\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = a\cos\left(\phi - \frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$\boxed{x\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = a\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}$$ Proved

एक दिये गये बिन्दु की वृत्त के सापेक्ष स्थिति

if $(CP < r)$ वृत्त के अन्दर



if $\boxed{CP > r}$

तो P वृत्त के बाहर होगा

$\boxed{\text{if } CP = r}$

तो बिन्दु परिधि पर

माना $P(x_1, y_1)$ एक दिया गया बिन्दु व

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ कोई एक

दिया गया वृत्त है। अब यदि!—

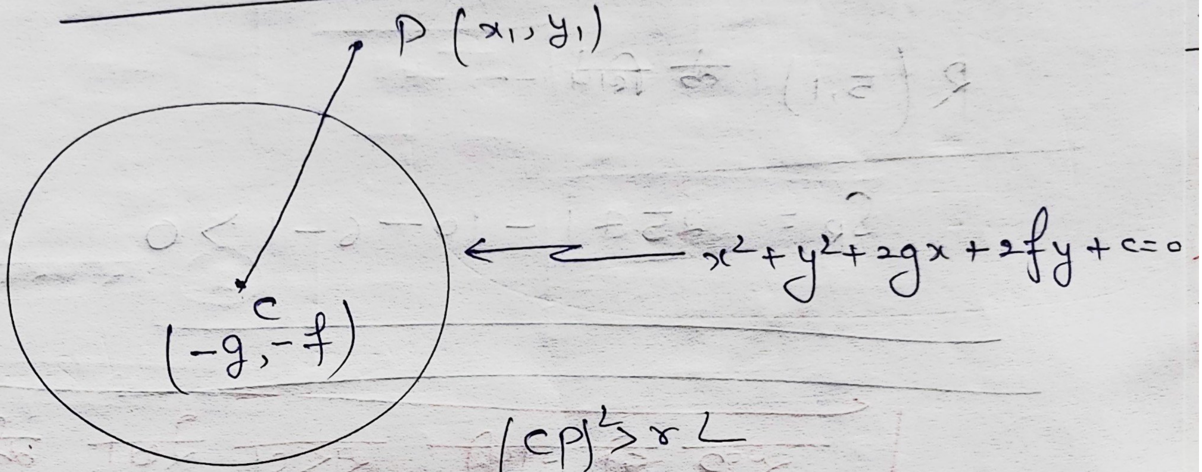
(i) $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c>0$ अर्थात $S_1>0$

तो बिन्दु P वृत्त के बाहर स्थित होगा

(ii) if $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ अर्थात $S_1=0$

तो बिन्दु P वृत्त की परिधि पर होगा

(iii) if $S_1<0$ तो बिन्दु P वृत्त के अन्दर स्थित होगा।



$$(CP)^2 > r^2$$

$$(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 > r^2$$

$$x_1^2+g^2+2gx_1+y_1^2+f^2+2fy_1 > f^2+g^2-c$$

$$\boxed{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c>0}$$

बिन्दु P वृत्त के बाहर है।

★ ★ ★ ★ ★

Ques बिन्दु (1,2) व (0,0) व (5,1) की वृत्त $x^2+y^2-2x+6y-1=0$ के सापेक्ष स्थिति = ?

बिन्दु P(1,2) रखने पर

$$S_P = 1+4-2-12-1 < 0$$

Q(0,0) के लिये

$$S_Q = 0+0-0-0-1 < 0$$

R(5,1) के लिये -

$$S_R = 25+1-10-6-1 > 0$$

एक दी गयी सरल रेखा की वृत्त के सापेक्ष स्थिति

माना कि $L=0$ कोई एक सरल रेखा व $S=0$ कोई एक वृत्त r इस वृत्त की त्रिज्या व p वृत्त के केन्द्र से रेखा पर डाले गये लम्ब की माप है।

अब यदि -

(i) $r > p$ तो रेखा वृत्त की छेदक रेखा होगी।

~~$p < r$~~

(ii) $r = p$ तो दी गई रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होगी

$r < p$ हो तो दी गयी रेखा न तो स्पर्श रेखा होगी न ही छेदक रेखा होगी।

$p = 0$ रेखा वृत्त के केन्द्र से गुजरेगी अर्थात वृत्त द्वारा उस रेखा पर काटी गयी जीवा इसका व्यास होगा।

जब हमे किसी ~~वृत्त~~ रेखा कि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा बनाना हो तो $p = r$

Que: c के उन सभी सम्भव मानो को बताओ जिसके लिये सरल रेखा $y = 2x + c$ वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ की ______

(1) छेदक रेखा हो

(2) स्पर्श रेखा हो

(3) व न छेदक रेखा और नही छेदक रेखा हो।

माना $x^2+y^2=a^2$ एक वृत्त तथा ①

$y=mx+c$ कोई एक सरल रेखा है ②

y का मान ② से ① में रखने पर समी० का -

$d>0$ ~~छ~~छेदक रेखा

$d=0$ स्पर्श रेखा

$d<0$ न छेदक रेखा न ही स्पर्शरेखा

$$x^2+m^2x^2+c^2+2mcx=a^2$$

$$(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0$$

$$\boxed{d=(2mc)^2-4(c^2-a^2)(1+m^2)}$$

~~if $d>0$ न t4~~

$$d=4\left(c^2m^2-c^2+a^2-c^2m^2+a^2m^2\right)$$

$$=4\left[(m^2+1)a^2-c^2\right]$$

$d > 0$ अर्थात

$c^2 < a^2(1+m^2)$ तो रेखा वृत्त की छेदक रेखा होगी

$d = 0$ अर्थात -

$c^2 = a^2(1+m^2)$

या $c = \pm a\sqrt{(1+m^2)}$ स्पर्श रेखा होगी।

if $d < 0$

$c^2 > a^2(1+m^2)$ तो रेखा न छेदक रेखा न ही स्पर्श रेखा होगी

अत: वृत्त (1) की m प्रवणता की किसी स्पर्श रेखा का समी० —

$$\boxed{y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}}$$

विभिन्न रूपों में स्पर्श रेखा का समी०

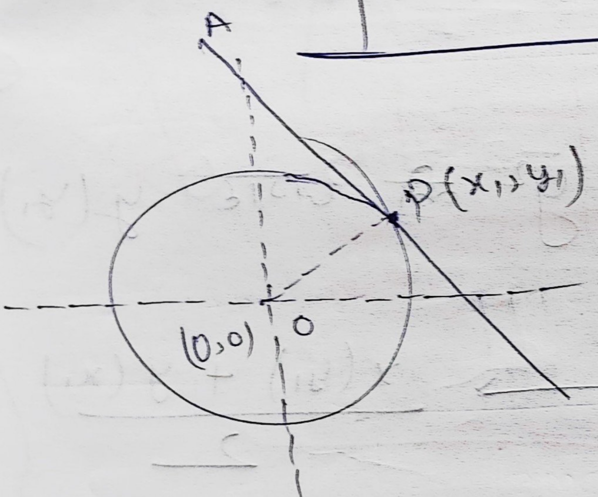
(1) बिन्दु रूप

(i) वृत्त $x^2+y^2-a^2=0$ पर स्थित किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समी०

$$\boxed{x(x_1)+y(y_1)-a^2=0}$$ होता है

$$\equiv T$$

$$\boxed{T \equiv x(x_1)+y(y_1)-a^2}$$



$$(m_{OP}) \times m_{AB} = -1$$

$$m_{AP} = \frac{-x_1}{y_1}$$

अतः बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समी०

$$(y-y_1) = \frac{-x_1}{y_1}(x-x_1)$$

$$x(x_1)+y(y_1) = x_1^2+y_1^2$$

$$\boxed{x(x_1)+y(y_1) = a^2}$$

$T \equiv \boxed{x(x_1) + y(y_1) - a^2 = 0}$ Proved

बिन्दु रूप मे समी० मे व्यंजक को T बोलते है।

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

द्विघातिय वक्र $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर स्थित किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समी० लिखने के लिये हम वक्र की की समी० मे निम्न परिवर्तन करते है।

1- वक्र की समी० जहा x^2 होगा वहा $x(x_1)$ रख देो

2 वक्र की समी० मे y^2 की जगह $y(y_1)$ रख देंगे।

3 $xy \longrightarrow \dfrac{x(y_1) + y(x_1)}{2}$

4 $x \longrightarrow \dfrac{x + x_1}{2}$

5 $y \longrightarrow \dfrac{y + y_1}{2}$

6 अचर पद $\longrightarrow$ No change

$x^2+y^2-a^2=0$ पर $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा

(ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ पर $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समी० —

$$x(x_1)+y(y_1)+\cancel{2}g\left(\frac{x+x_1}{\cancel{2}}\right)+\cancel{2}f\left(\frac{y+y_1}{\cancel{2}}\right)+c=0$$

$$\boxed{x(x_1)+y(y_1)+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0}$$

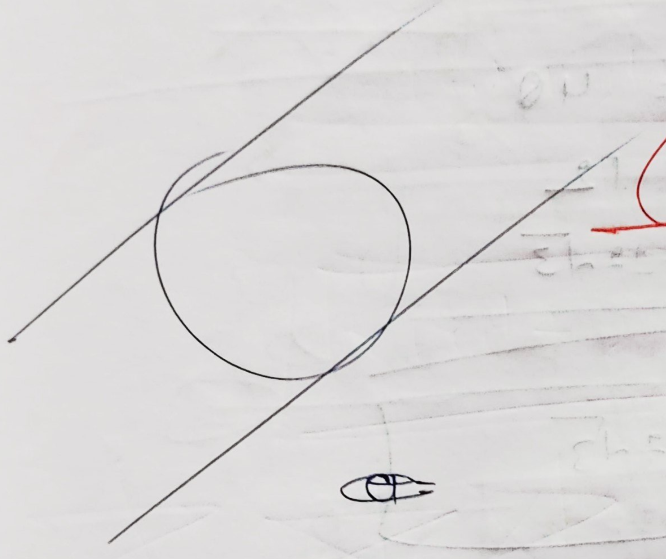
वक्र $2x^2-3y^2+4xy-x+2y=0$ पर ~~बिन्दु~~ $P(x_1, y_1)$ ~~का समी~~ पर स्पर्श रेखा का समी० —

$$2x(x_1)-3y(y_1)+\cancel{4}^{2}\left(\frac{xy_1+yx_1}{\cancel{2}}\right)-\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+\cancel{2}\left(\frac{y+y_1}{\cancel{2}}\right)=0$$

(2) प्रवणता रूप ! — ढाल रूप ! —

वृत्त $x^2+y^2=a^2$ की m प्रवणता वाली स्पर्श रेखा का समी०

$$\boxed{y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}}$$



Que : वृत्त $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ —(1) की उस स्पर्श रेखा समी० बताओ जिसका झुकाव $60°$ है

~~$y=\sqrt{3}x \pm \sqrt{1+4}$~~

अतः m प्रवणता वाली रेखा।

$$y = \sqrt{3}x + c$$

y का मान समी० —(1) में

$$x^2 + 3x^2 + c^2 + 2\sqrt{3}cx - 2x - 6x - 2\sqrt{3}c + 1 = 0$$

$$4x^2 + x(2\sqrt{3}c - 8) - 2\sqrt{3}c + c^2 + 1 = 0$$

(iii) प्राचलिक रूप !

वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर स्थित पर बिन्दु $P(\theta)$ पर स्पर्श रेखा का समी०

$$\boxed{x\cos\theta + y\sin\theta = a}$$

$$P(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta)$$

$$x \times (a\cos\theta) + y\, a\sin\theta = a^2$$

$$\boxed{x\cos\theta + y\sin\theta = a}$$

Proved

Q/ वृत्त $x^2+y^2=50$ पर स्थित बिन्दु $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समी०

$$\boxed{x+y=10}$$

A

$+23=0$

$b^2 - 4ac$

Note -

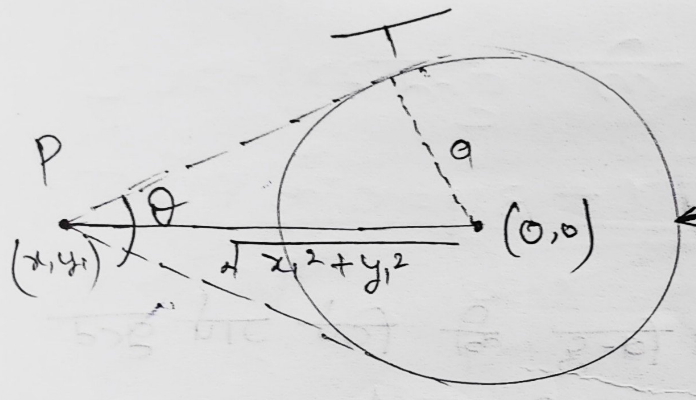
वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर स्थित बिन्दुओ $P(\theta)$ व $Q(\phi)$ पर खीची गई स्पर्श रेखाओ का प्रतिच्छेद बिन्दु :-

$$\boxed{\frac{a\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}, \frac{a\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}}$$

स्पर्श रेखा की ल०

किसी बाह्य बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से किसी दिये गये वृत्त $S=0$ पर खीची गई स्पर्श रेखा की ल० =

$$= \sqrt{S_1}$$



$S = x^2+y^2-a=0$

$$PT = \sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$$

$$= \sqrt{S_1}$$

Proved

$$\boxed{\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{S_1}}\right)}$$

☆ स्पर्श रेखा की ल० ज्ञात करने के लिये भी हम x^2 व y^2 के गुणांको को एकाई बनाते है।

Ques बिन्दु $(1, 8)$ से वृत्त $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 3 = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखा की ल०

$$= \sqrt{1 + 64 - 2 + 32 - \frac{3}{2}}$$

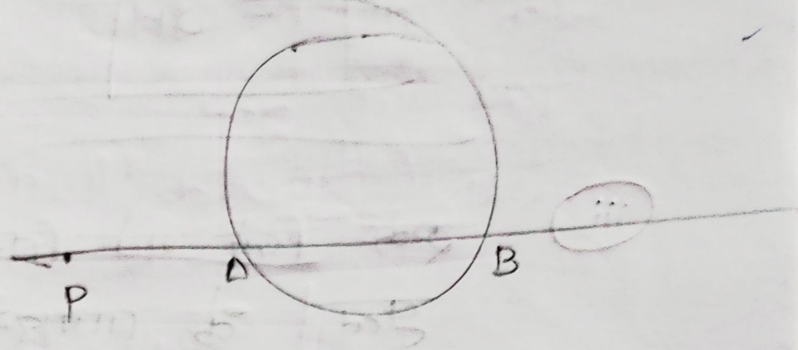
$$= \sqrt{95 - \frac{3}{2}}$$

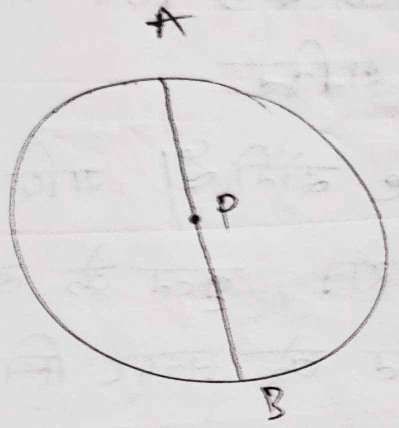
$$= \sqrt{\frac{187}{2}}$$

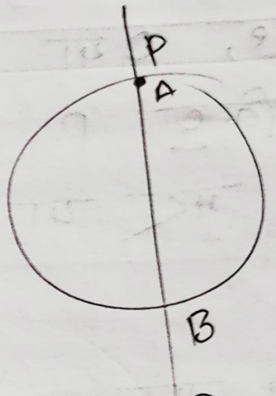
☆ एक दिये गये बिन्दु की दिये गये वृत्त के सापेक्ष शक्ति ☆

यदि एक दिये गये बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से एक दिये वृत्त $S = 0$ पर खींची गई छेदक रेखा उस वृत्त को बिन्दुओ A व B पर प्रतिच्छेद करे

करती हो तो $PA \times PB$ ही उस बिन्दु
की वृत्त के सापेक्ष ~~स्थिर~~ शक्ति होती है।







$\boxed{PA \times PB}$

Note – एक दिये गये बिन्दु P की एक दी गयी वृत्त के सापेक्ष सदैव नियत होती है।

$$\boxed{PA \times PB = PC \times PD}$$

(ii) एक दिये गये बिन्दु $P(x_1, y_1)$ की एक दिये वृत्त $S=0$ के सापेक्ष शक्ति :-

$$\boxed{= S_1}$$

(iii) एक दिये गये बिन्दु P की एक दिये गये वृत्त के सापेक्ष शक्ति

+ve, 0 या −ve होती है। यदि वह बिन्दु P क्रमशः वृत्त के बाहर, वृत्त पर या वृत्त के अन्दर स्थित हो।

☆ शक्ति ज्ञात करने के लिये भी हम x^2 व y^2 के गुणांको को इकाई बनायेंगे।

Ques. बिन्दु $(3,2)$ की वृत्त $2x^2+2y^2 - x + 3y = 0$ के सापेक्ष शक्ति है।

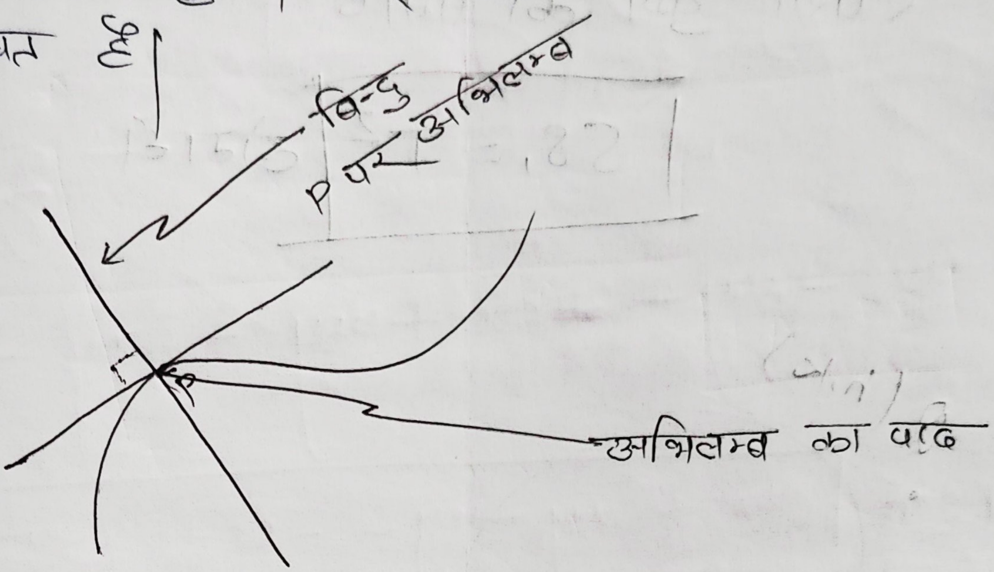
$$= 9+4-\frac{3}{2}+\frac{6}{2}$$

$$= 13+\frac{3}{2}$$

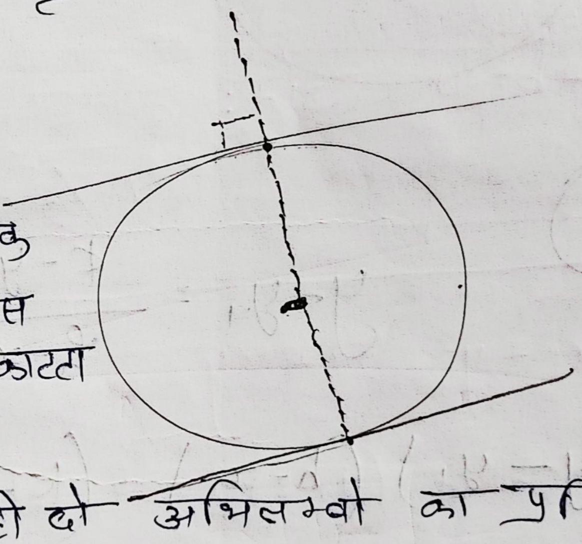
$$= \frac{29}{2} \text{ A}$$

वृत्त के अभिलम्ब का समी०

एक दिये गये वक्र पर स्थित बिन्दु P पर अभिलम्ब वह रेखा होती है जो बिन्दु P से गुजरती है। तथा बिन्दु P पर खींची गयी स्पर्श रेखा के लम्बवत है।



वृत्त के प्रत्येक अभिलम्ब उसके केन्द्र से गुजरता है।



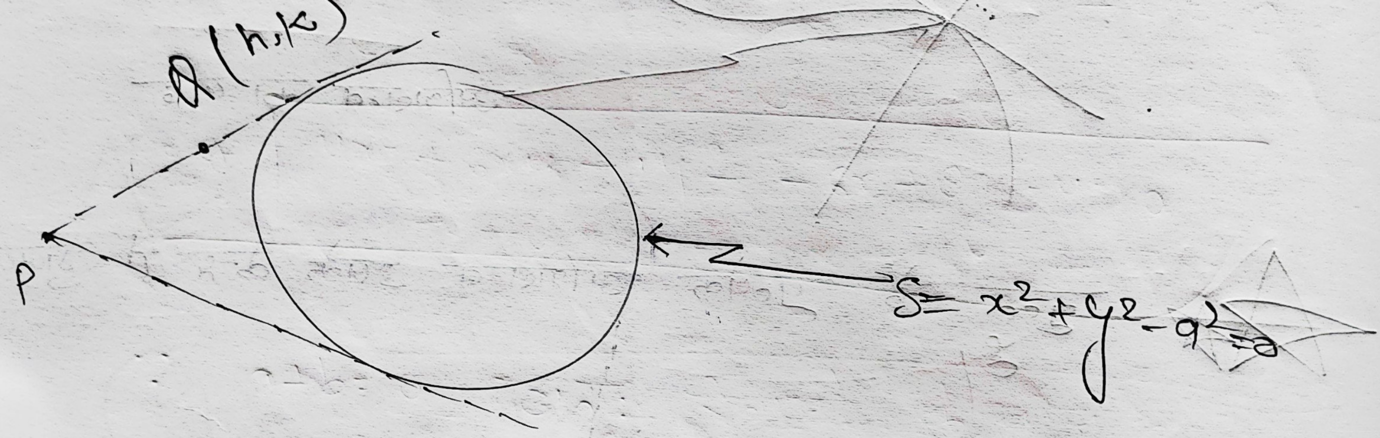
वृत्त का प्रत्येक अभिलम्ब उसे व्यास के सिरे पर काटता है।

वृत्त के किन्हीं दो अभिलम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु उसका केन्द्र ही होता है।

☆ स्पर्शी युग्म का समी० ☆

एक बाह्य बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से एक दिये गये वृत्त $S = 0$ पर खींची गयी स्पर्शी युग्म का समी०

$\boxed{SS_1 = T^2}$ होता है



PQ

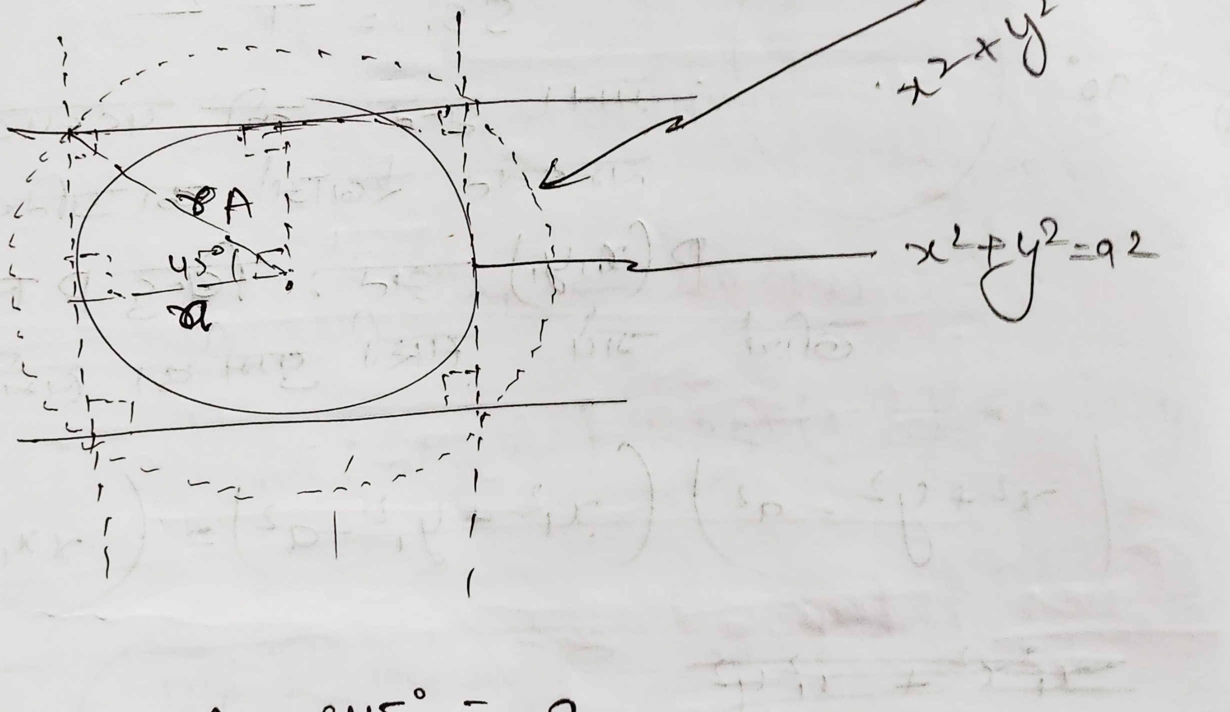
$$= y - y_1 = \frac{k - y_1}{h - x_1}(x - x_1)$$

$$(y - y_1)(h - x_1) = (k - y_1)(x - x_1)$$

नियामक वृत्त

⇒ किसी वक्र की परस्पर लम्बवत स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ही उस वक्र का नियामक वृत्त कहलाता है।

एक दिये गये वृत्त का नियामक वृत्त वृत्त ही होता है। जो उस दिये गये वृत्त के सहकेन्द्रीय होगा है। तथा उसकी त्रिज्या दिये गये वृत्त की त्रिज्या का $\sqrt{2}$ गुना होती है।

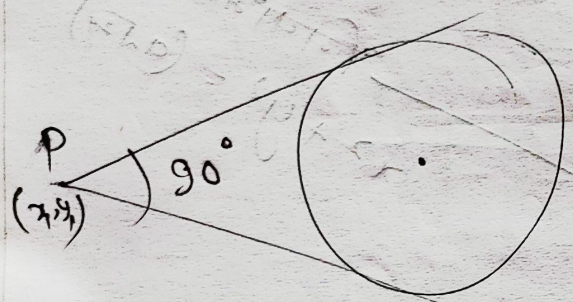


$$A\cos 45^\circ = a$$

$$A = a\sqrt{2}$$

अर्थात नियामक वृत्त पर स्थित किसी भी बिन्दु से वक्र (वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त या अतिपरवलय) पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $\pi/2$ होगा।

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{--- (1)}$$



$$SS_1 = T^2$$

माना वृत्त की परस्पर लम्बवत रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $P(x_1,y_1)$ अतः बिन्दु P से खींचे गये स्पर्श युग्म का समी०

$$(x^2+y^2-a^2)(x_1^2+y_1^2-a^2) = (xx_1+yy_1-a^2)^2$$

$$\cancel{x_1^2x^2 + x_1^2y^2}$$

$$(x_1^2+y_1^2-a^2)x^2 + (x_1^2+y_1^2-a^2)y^2 \text{ --- --}$$

$$= xx_1^2 + yy_1^2 \text{ --- --}$$

~~वृत्त~~ x^2 का गुणांक $+ y_1^2$ का गुणांक $= 0$

$y_1^2 - a^2 + x_1^2 - a^2 = 0$

$x_1^2 + y_1^2 = 2a^2$

$\boxed{x_1^2 + y_1^2 = (\sqrt{2}a)^2}$ Proved

$\because$ वृत्त (1) की ~~एक~~ स्पर्श रेखा का समी०

$y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ —(1)

(x_1, y_1) से गुजरने पर

$y_1 = mx_1 + a\sqrt{1+m^2}$

$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 = a^2 + a^2m^2$

$m^2(a^2 - x_1^2) + 2m(x_1y_1) + a^2 - y_1^2 = 0$

$m_1 \perp m_2$

$m_1 m_2 = -1$

$\frac{a^2 - y_1^2}{a^2 - x_1^2} = -1$

$a^2 - y_1^2 = -a^2 + x_1^2$

$x_1^2 + y_1^2 = 2a^2$

$x_1^2 + y_1^2 = (\sqrt{2}a)^2$ Prooved

radius $= \sqrt{2}a$

Centre $- (0,0)$

Que. वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 3 = 0$
के नियामक वृत्त का समी०

Centre $- (2,4)$

radius $= \sqrt{4+16+3}$

$= \sqrt{23}$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{46})^2}$$ A

नियामक वृत्त की त्रिज्या

$= \sqrt{2}r$

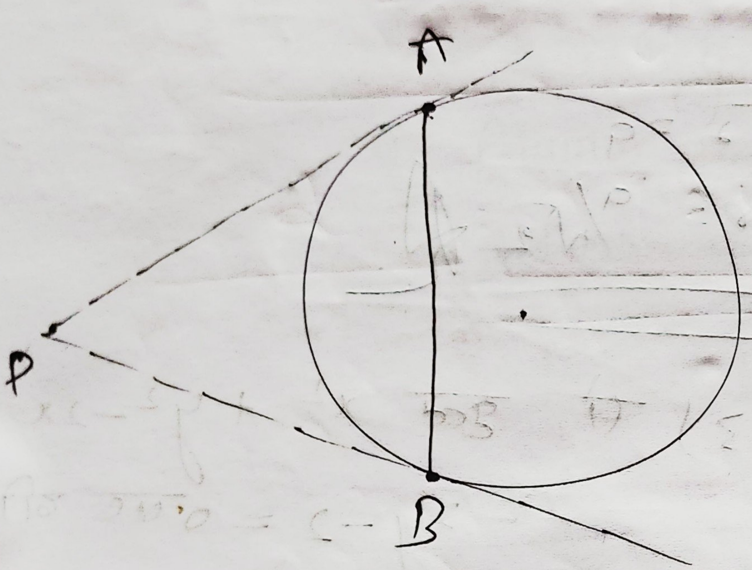
$= \sqrt{46}$

Centre $= (2,4)$

स्पर्श जीवा

⇒ किसी बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा ही उसे स्पर्श जीवा कहलाती है।

बिन्दु P की दिये गये वृत्त के सापेक्ष



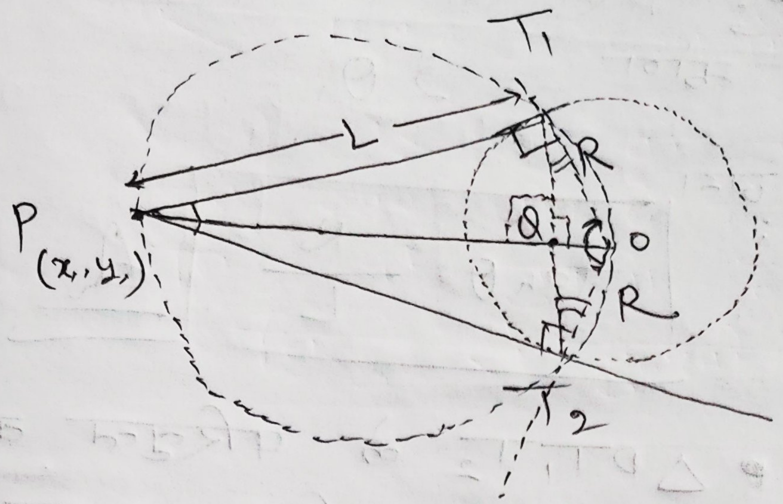
स्पर्श जीवा का समी० —

किसी बाह्य बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से किसी दिये गये वृत्त $S=0$ पर स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समी० —

$$\boxed{T = 0}$$

Ques. बिन्दु (0,1) से वृत्त $x^2+y^2-2x+4y=0$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श ~~रेखाओं~~ जीवा का समी० = ?

$$\boxed{3y+2-x=0}$$



(1) स्पर्श जीवा $T_1 T_2$ की लम्बाई

$$= \frac{2RL}{\sqrt{R^2+L^2}}$$

(2) ΔPT_1T_2 का क्षे० $= \dfrac{RL^3}{R^2+L^2}$

↓

बिन्दु P से खींची गयी स्पर्श रेखाओं व उनकी स्पर्श जीवा ~~के~~ से निर्मित त्रिभुज

(3) चक्रीय चतुर्भुज PT_1OT_2 का क्षे०

↓

बाह्य बिन्दु से खींची स्पर्श रेखाओं व वृत्त की त्रिज्याओं से निर्मित □ का क्षे०

$$= \boxed{L \times R}$$

(4) बिन्दु P से खींची गयी स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण $= 2\theta$,

जहां $\boxed{\tan\theta = \frac{R}{L}}$ **A**

(5) OP, $\triangle PT_1T_2$ के परिवृत्त का व्यास होता अर्थात OP का मध्य बिन्दु $\triangle PT_1T_2$ का परिकेन्द्र होता है।

स्पर्श ~~रेखा~~ जीवा T_1T_2 की ल० —

$= 2(T_1Q)$ — (i)

$T_1Q = ??$

$T_1Q = R\cos\theta$

~~cosθ~~ समकोण $\triangle PT_1O$ से :-

$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$

$\therefore T_1T_2 = \frac{2RL}{\sqrt{R^2+L^2}}$

☆

ΔPT_1T_2 का क्षे० $= 2\times(\text{क्षे० } \Delta PT_1Q)$

$$\Delta PT_1Q = \frac{1}{2}\times(PQ)\times R$$

$$= \frac{1}{2}\times L\cos\theta \times R\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{RL^3}{R^2+L^2}$$

$$\boxed{\Delta PT_1T_2 \text{ का क्षे० } = \frac{RL^3}{R^2+L^2}}$$ Proved

Proved $= \dfrac{RL^3}{R^2+L^2}$ Ans

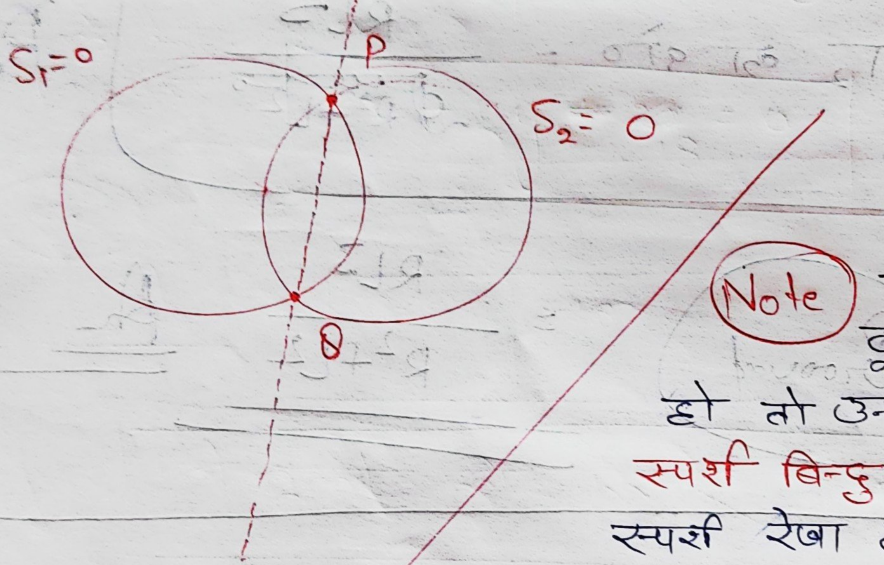
दो वृत्तो की उभयनिष्ठ जीवा

यदि $S_1 : x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ तथा

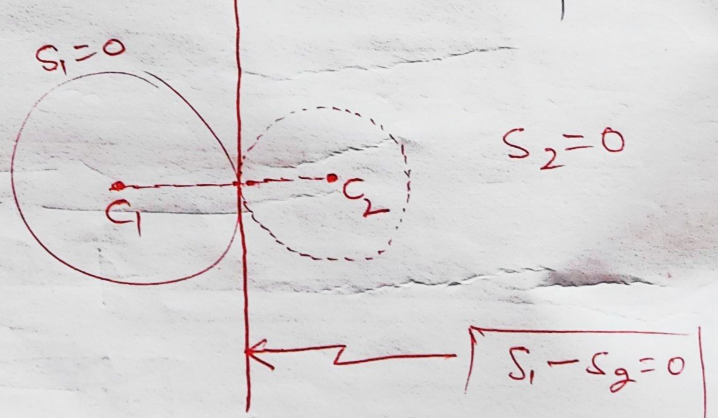
$S_2 : x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ दो

दिये गये वृत्त हो तो इनकी उभयनिष्ठ जीवा का समी० ——

$$\Rightarrow \boxed{S_1 - S_2 = 0}$$

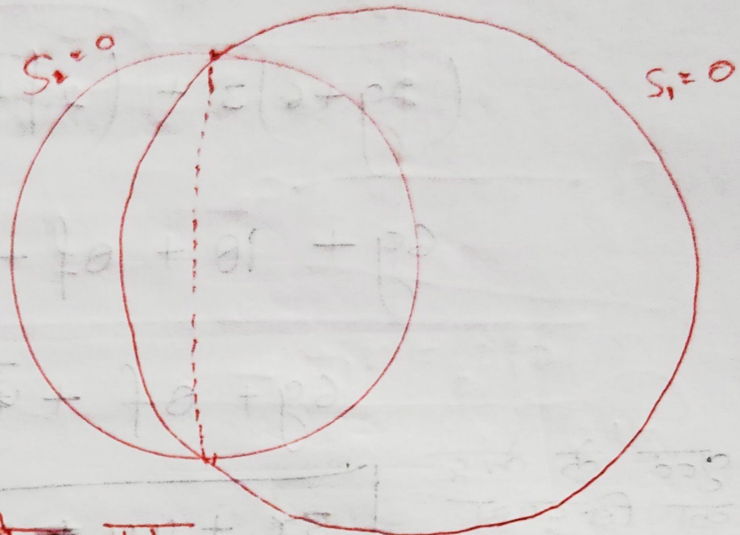


Note यदि दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हो तो उनकी उभयनिष्ठ उनके स्पर्श बिन्दु पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा होगी।



(ii) दो वृत्तो की उभयनिष्ठ जीवा सदैव उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत है।

(iii) यदि एक वृत्त $S_1 = 0$ दूसरे वृत्त $S_2 = 0$ की परिधि को समद्विभाजित करता हो तो इन वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा वृत्त $S_2 = 0$ का व्यास होती है।



Que उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात करो जो वृत्तों $x^2+y^2-4=0$ व $x^2+y^2-6x-8y+10=0$ की परिधि को समद्विभाजित करता हो।

माना वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ —— (3)

$x^2+y^2-4=0$ —— (1)

$x^2+y^2-6x-8y+10=0$ —— (2)

∵ वृत्त (3) वृत्त (1) को परिधि को समद्विभाजित करता है अत: इनकी उभयनिष्ठ जीवा वृत्त (1) का व्यास होगी।

$\boxed{(3) - (1)}$

$2gx + 2fy + c + 4 = 0$

रेखा बिन्दु (0,0) से गुजरेगी।

$\boxed{c = -4}$

3-2

$(2g+6)x + (2f+8)y + c - 10 = 0$

~~बिन्दु (3,4) से गुजरेगी।~~

$(2g+6)3 + (2f+8)4 - 6 = 0$

$6g + 18 + 8f + 32 - 14 = 0$

$6g + 8f + \cancel{44}\,36 = 0$

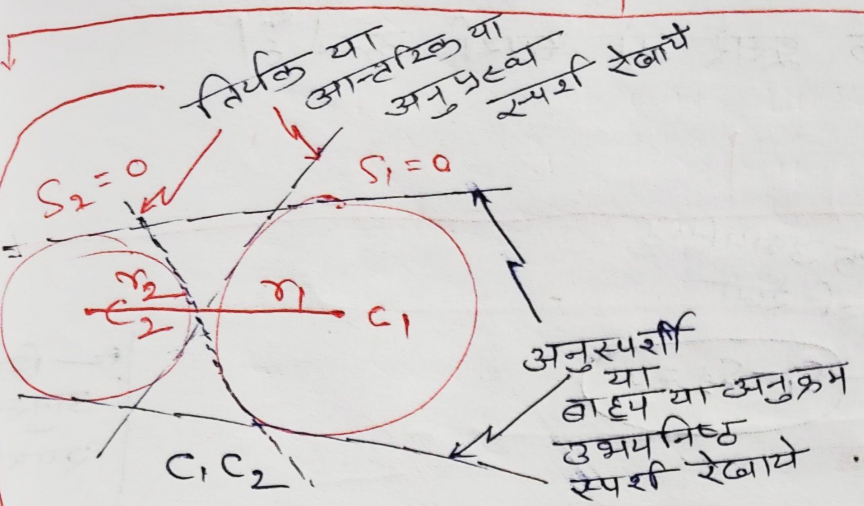
वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ $\boxed{3x + 4y + \cancel{22}\,18 = 0}$ Ans

Ans $\boxed{3x + 4y - 18 = 0}$

दो वृत्तों की परस्पर स्थिति

1. दो दिये गये वृत्त $S_1 = 0$ व $S_2 = 0$ एक दूसरे को निम्न प्रकार से न तो प्रतिच्छेद करें और न ही स्पर्श ____

|



C_1C_2

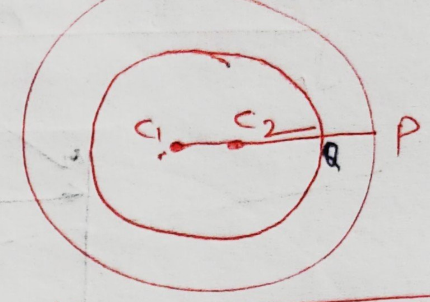
$r_1 + r_2$

$|r_1 - r_2|$

$\boxed{C_1C_2 > r_1 + r_2}$

→ इन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओ के सापेक्ष दोनो वृत्तो के केन्द्र एक ही ओर होते है।

→ इन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओ के सापेक्ष दोनो वृत्तो के केन्द्र विपरीत ओर स्थिति होते है।



$\boxed{C_1C_2 < |r_1 - r_2|}$

⟹ उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओ की दूरी

$\boxed{C_1C_2 = C_1P - C_2P}$

$\boxed{r_1 - r_2 = C_1P - C_2Q}$

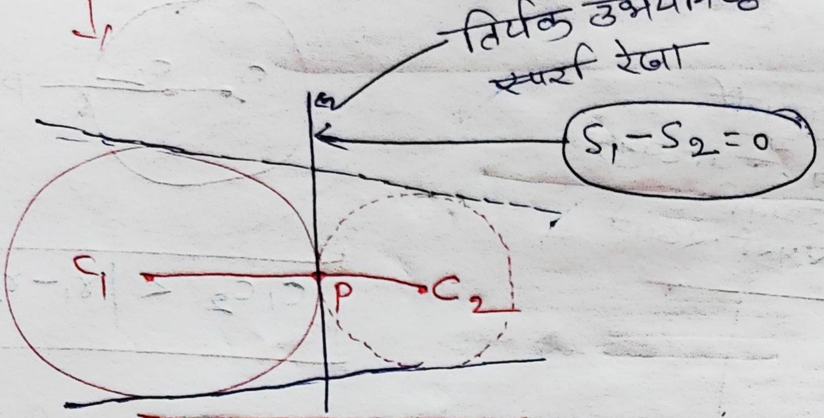
$$C_1C_2 = C_1P - C_2P$$

$$= r_1 - (C_2Q + PQ)$$

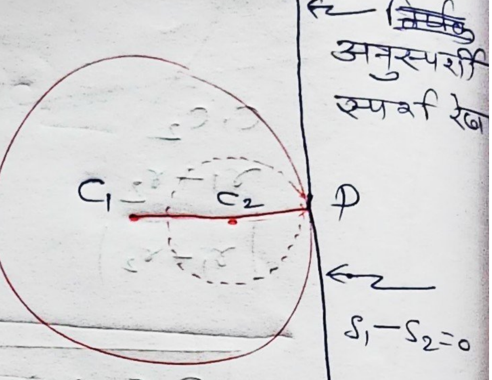
$$= r_1 - r_2 - PQ$$

$\therefore \boxed{C_1C_2 \leq |r_1 - r_2|}$

2. दो दिये गये वृत्त $S_1=0$ व $S_2=0$ निम्न दो प्रकार से एक दूसरे को स्पर्श करते है।

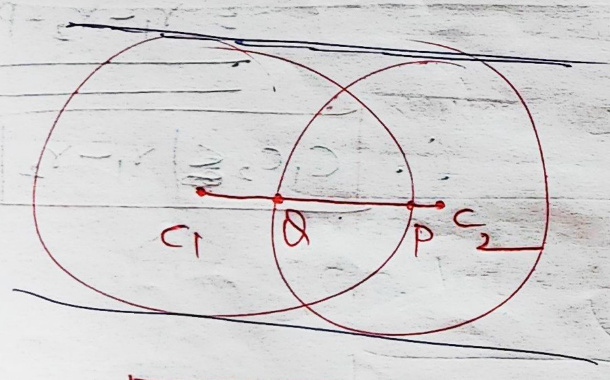


$$\boxed{C_1C_2 = r_1 + r_2}$$



$$\boxed{C_1C_2 = |r_1 - r_2|}$$

3. दो वृत्त $S_1=0$ व $S_2=0$ एक दूसरे को निम्न प्रकार से प्रतिच्छेद करते है।



$$\boxed{C_1C_2 < r_1 + r_2}$$

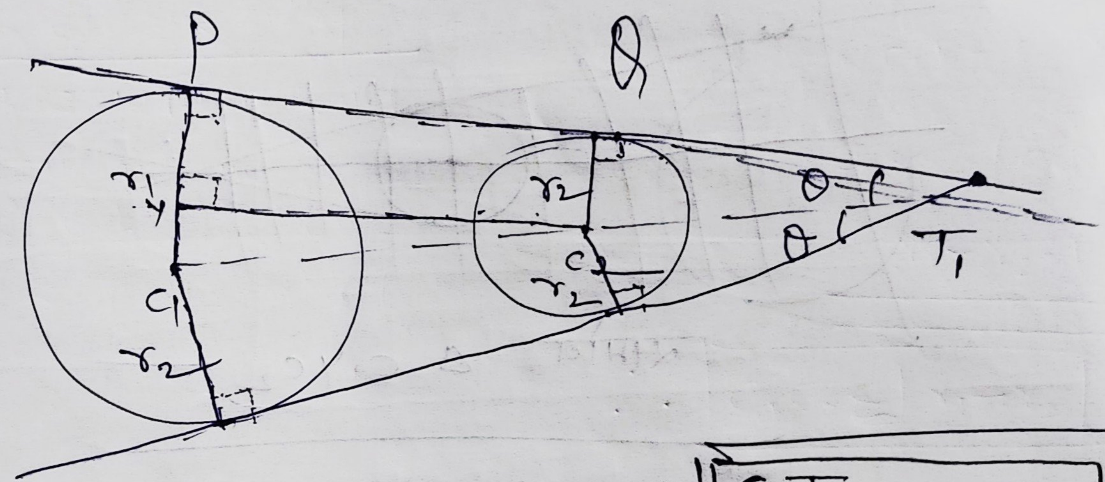
$$\boxed{C_1C_2 > |r_1 - r_2|}$$

$$C_1C_2 = C_1P + C_2P$$
$$= r_1 + (C_2Q - PQ)$$
$$= r_1 + r_2 - PQ$$

अनुस्पर्शी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं के गुणधर्म

(1) इन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु, दिये गये वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाले रेखाखण्ड को उनकी त्रिज्याओं के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है / बशर्ते कि $\boxed{r_1 \neq r_2}$

यदि $\boxed{r_1 = r_2}$ तो ये उभयनिष्ठ स्पर्श रेखायें वृत्तों ~~वृत्तों~~ के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के समान्तर होती है।



$$\frac{C_1T_1}{C_2T_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

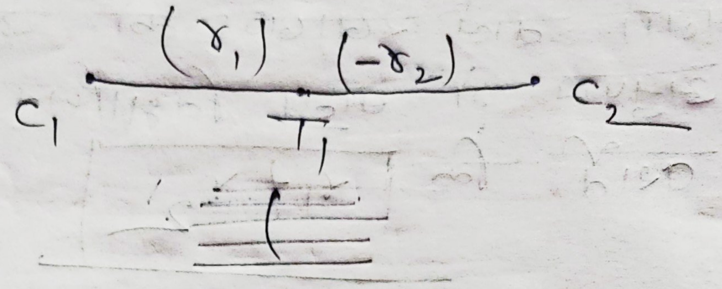
$$\boxed{\frac{C_1T_1}{C_2T_1} = \frac{r_1}{r_2}}$$

$$\Delta C_1PT_1 \cong \Delta C_2QT_1$$

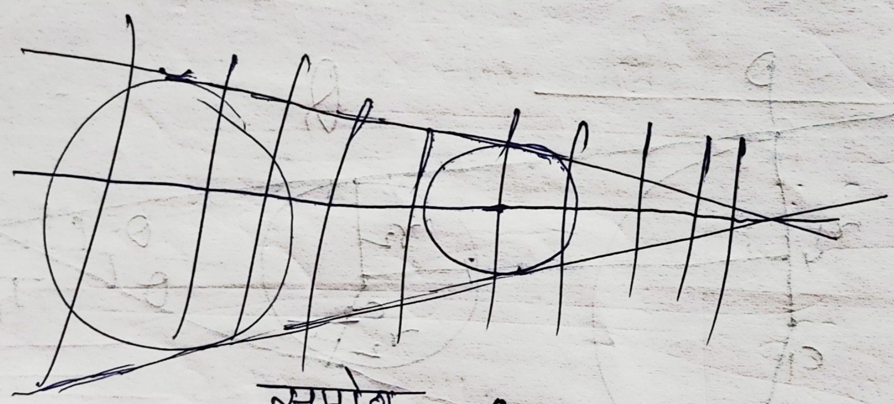
$$\frac{r_1}{C_1T_1} = \frac{r_2}{C_2T_1}$$

Proooo

$T_1 = ?$



(2) $\boxed{l_{\text{अनुस्पर्शी}} = \sqrt{(C_1C_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}}$



समोग $\Delta\, C_1YC_2$

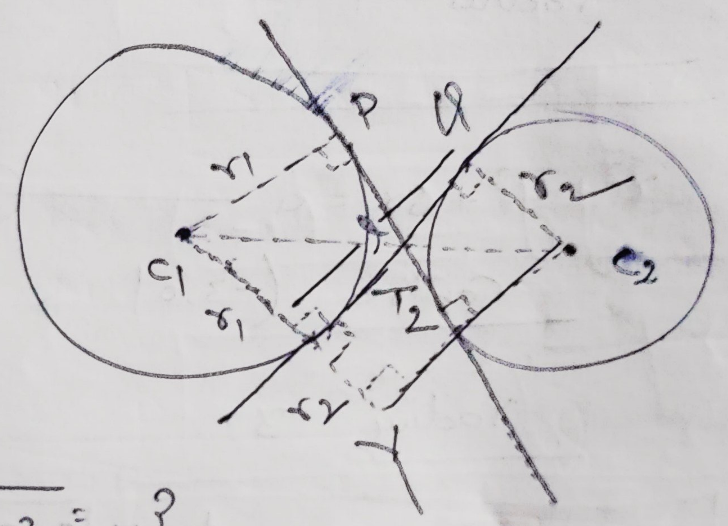
$$(C_1C_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + l^2$$

$$\boxed{l = \sqrt{(C_1C_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}}$$

Proved

तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्शी रेखाओं के गुणधर्म

(1) इन उभयनिष्ठ स्पर्श का प्रतिच्छेद बिन्दु उन दिये गये वृत्तों के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा को उनकी त्रिज्याओं के अनुपात में अन्त: विभाजित करता है।



$\overline{T_2} = ?$

$c_1 \quad (r_1) \quad T_2 \quad (r_2) \quad c_2$

(2)

$$\boxed{l_{\text{तिर्यक}} = \sqrt{(c_1c_2)^2 - (r_1+r_2)^2}}$$

$$\boxed{l_{\text{अनुस्पर्शी}} > l_{\text{तिर्यक}}}$$